

弾塑性構成式に基づく異方性砂の非排水挙動の評価

森尾 敏*・日下部 伸**・安福規之***・
兵動正幸****

本研究は、一般応力空間での両極端の応力状態である三軸圧縮と伸張時の非排水挙動を統一的に表現する構成式について検討したものである。本構成式では、破壊時の内部摩擦角 ϕ と体積最大圧縮時の応力比 M を定義する内部摩擦角 ϕ_m の大小関係が重要である。ここでは、 M の π 平面での形状を選定することで、中間主応力に応じて ϕ と ϕ_m の大小関係を変えた。この結果、三軸圧縮と伸張時の非排水挙動の大きな違いをうまく表現することができた。

Key Words : undrained triaxial test, saturated sand, anisotropic, constitutive relation

1. まえがき

砂のような粒状体は、通常強い固有異方性¹⁾を有しており、堆積面（水平方向）と最大主応力方向のなす角度 δ によって、その挙動は大きく異なる。一般に、 δ が 90° から減少して強度が低下するのに伴って体積最大圧縮量は増大し、破壊時ひずみも増加する。このため、三軸圧縮状態で膨張的（Dilative）な挙動を示す材料が、伸張状態では収縮的（Contractive）な挙動を示す実験結果が数多く報告されている²⁾⁻⁸⁾。

一方、近年大地震による液状化の発生予測、影響予測および対策効果の予測が重要な検討課題となってきた。特に、有効応力法による2次元あるいは3次元液状化解析手法の実務への適用は、液状化対策工の設計を実施するうえで急務であり、上で述べた砂の異方的特性をうまく表現できる妥当な弾塑性構成式の確立が望まれている。

本研究は、液状化に関連の深い飽和砂の非排水挙動に着目し、一般応力空間での両極端の応力状態である三軸圧縮と伸張挙動を統一的に表現する構成式について検討したものである。解析では、筆者ら^{9),10)}が既に提案している砂の繰返し弾塑性構成式の流れ則を拡張し、これを静的な単調載荷に対して適用している。具体的には、塑性ポテンシャル曲面（流れ則）を定義する体積最大圧縮時の応力比 M の π 平面での形状を任意に選定できるモデルを提案している。これによって、飽和砂の非排水三軸圧縮と伸張挙動の大きな違い（異方性）をうまく表現できることを示す。

一般応力空間で提示された繰返し弾塑性構成式には、何らかの異方性を導入することで、三軸圧縮と伸張挙動の違いを表現できるものが多い。 π 平面での断面形状に着目すると、西ら¹¹⁾のモデルは破壊曲面と塑性ポテンシャル曲面にモール・クーロン規準を負荷曲面にDrucker-Prager規準を適用している。そして、これら3曲面の中心位置をすべて初期応力の方向にずらすことで、初期応力による応力誘導異方性を表現している。八嶋ら¹²⁾のモデルも、3曲面の中心位置をすべて初期応力の方向にずらしており、負荷曲面と塑性ポテンシャル曲面はDrucker-Prager規準、破壊曲面はモール・クーロン規準である。また、平井¹³⁾のモデルは、3つの曲面をローデ角 θ （後述の式（5））を用いて設定し、3曲面とも同じ定義式が用いられている。Pastorら¹⁴⁾のモデルも、ローデ角 θ を用いて3曲面を同じ定義式で設定しているが、 π 平面での形状は平井のモデルとは異なる。

これらのモデルでは、強度特性および体積変化特性（ダイレイタンス特性）のそれぞれの特性に及ぼす中間主応力の影響は表現される。しかしながら、三軸圧縮時に膨張的な挙動を示す材料が、三軸伸張時に収縮一方となるような強い異方性を表現することは困難である。

本論文では、まず砂のせん断過程における体積変化特性に関する既往の実験結果および筆者らの実験結果を、構造的な異方性に着目して整理し、その結果に基づいて、流れ則を定義する体積最大圧縮時の応力比 M の π 平面での形状を任意に選定できるモデルの重要性を示す。次に、この特性を表現できる構成式（流れ則）を提示し、平均主応力一定排水せん断試験および、いくつかの非排水三軸圧縮・伸張試験結果との比較から、本モデルの適用性を調べる。

砂の構造的な異方性を表現する方法に修正応力を用いる方法²³⁾がある。ここで提案する構成式は、砂の非排水挙動で表れる構造的な異方性を通常の三軸圧縮と伸張試

* 正会員 (株) 奥村組 電算センター 数値解析・制御グループ (〒545 大阪市阿倍野区松崎町2丁目2番2号)

** 正会員 (株) 奥村組 技術研究所 地盤研究室

*** 正会員 工博 九州大学助教授 工学部建設都市工学科

**** 正会員 工博 山口大学助教授 工学部社会建設工学科

表-1 既往の実験結果から得られた ϕ_{mc} , ϕ_{me} , R_m

実験番号	文献名	砂の種類	供試体の作成方法	試験方法	p, σ_r (kPa)	D_r (%)	ϕ_{mc} (deg.)	ϕ_{me} (deg.)	R_m
1	山田ら ²⁾	富士川砂	Pouring	p 一定	98	34	34.9	44.7	1.186
2					98	34	36.3	43.8	1.138
3	石原ら ⁵⁾	富士川砂	pouring	p 一定	98	38	32.5	34.8	1.053
4	龍岡ら ¹⁸⁾	富士川砂	水中落下	p 一定	98	53	31.6	35.8	1.098
5					196	53	34.1	35.8	1.037
6					294	53	36.0	35.8	0.998
7	三浦ら ³⁾	豊浦砂	MSP Dry Tapping Wet Rodding	σ_r 一定	196	55	30.1	29.7	0.990
8					196	55	30.1	32.6	1.064
9					196	55	29.2	34.4	1.133
10	Pradhan ら ⁴⁾	豊浦砂	空中落下	p 一定	24.5 ~ 147	30~90	27.7	27.5	0.994
11	著者ら ⁹⁾	豊浦砂	水中落下	p 一定 σ_r 一定	980 784 ~ 1764	40	32.3	32.0	0.992
12	著者ら ^{15, 16)}	秋穂砂	空中落下	p 一定	98	60	25.4	25.4	1.000
13	著者ら	カーボネイト砂 (Dogs Bay砂)	空中落下	p 一定	98	40	36.9	34.4	0.950
14					98	80	36.9	40.6	1.070
15	Vaidら ²⁰⁾	Ottawa砂	水中落下	非排水	196 ~ 2500	33~43	28.2	29.2	1.028

験に基づいて比較的簡単に表現しようとしたもので、構造的な異方性と中間主応力に依存する異方性を一体として取り扱ったものである。修正応力を用いる方法との対応については、本モデルは降伏・破壊曲面と塑性ポテンシャル曲面にそれぞれ異なる構造テンソルを適用したことに相当すると考えられる。

以下、応力はすべて有効応力を意味し、応力とひずみは圧縮を負として取り扱う。ただし、図の表示は、慣例に従い、圧縮を正としている。

2. 実験結果に基づく体積変化特性の定量的評価

既往の研究において、破壊時の内部摩擦角 ϕ の異方性（強度異方性）に関する研究は数多く見られるが、体積最大圧縮時の応力比 M の異方性に関する研究は、比較的少ない。ここでは、まず筆者らの実験を含めて、既往のデータから体積最大圧縮時の内部摩擦角 ϕ_m （変相角に相当する）を求め、その異方性の程度が試料、供試体作成方法および相対密度等によって大きく異なることを示す。

(1) 山田ら²⁾の実験

山田ら²⁾は、平均主応力 p 一定 (98 kPa) の排水条件下で、立方体供試体を用いた真の三軸せん断試験（三主応力制御試験）を行った。供試体は、飽和した富士川砂を鉛直方向に注入して作成された。

図-1はこの結果で、●印は体積最大圧縮時の応力比を、△印は破壊時の応力比を表している。ここでは、応

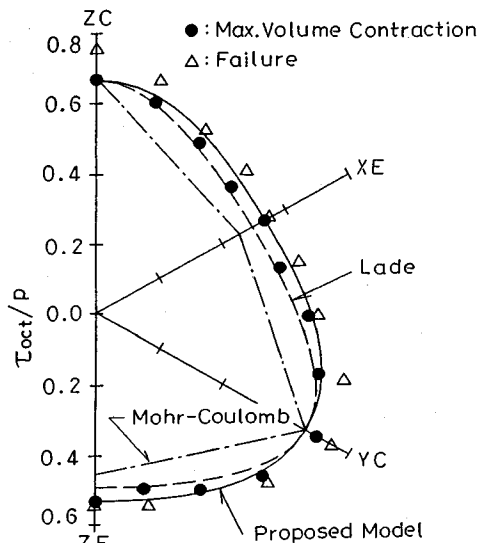


図-1 π 平面での体積最大圧縮時の応力比²⁾

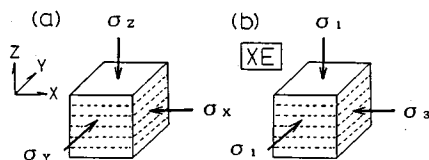


図-2 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の定義

力比を τ_{oct}/p で表示しており、 τ_{oct} は八面体せん断応力である。また、図中の ZC は通常の三軸装置での圧縮試験 ($\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3 = \sigma_x = \sigma_y$) に、ZE は伸張試験 ($\sigma_1 = \sigma_x$

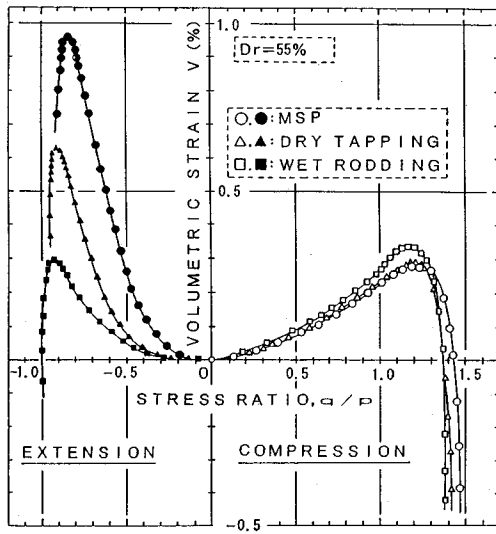


図-3 供試体作成法の違いによる体積変化特性³⁾

$=\sigma_Y, \sigma_3=\sigma_Z$)に相当する。一方、 YC は $\sigma_1=\sigma_Y, \sigma_3=\sigma_X=\sigma_Z$ の条件下での圧縮試験、 XE は $\sigma_1=\sigma_Y=\sigma_Z, \sigma_3=\sigma_X$ での伸張試験である。ただし、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は最大、中間および最小主応力を意味し、絶対値の最大のものを最大主応力、最小のものを最小主応力という。 $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ の定義は図-2(a)のとおりで、一例として XE の場合の主応力を同図(b)に示す。

応力比～体積ひずみ関係図から、三軸圧縮時(ZC, YC)と三軸伸張時(ZE, XE)の体積最大圧縮時の応力比を読み取り、そのときの内部摩擦角 ϕ_{mc}, ϕ_{me} を表-1(実験番号1, 2)に示した。この試験では、 ϕ_{me} は ϕ_{mc} よりかなり大きく、その差は $8\sim 10^\circ$ であることが分かる。

ZC での内部摩擦角 $\phi_{mc}=34.9^\circ$ を用いたモール・クーロン規準、Lade規準および後述の式(10)で表される筆者らの導入した幾何学的規準^{15)~17)}による応力比を図-1中に併記した。筆者らの規準の材料定数として、 $A_m=0.806$ を用いたが、これについては3.(3)で詳述する。●印は、すべてモール・クーロン規準より外側にある。また、三軸伸張時にはLade規準($\phi_{me}=39.7^\circ$)よりさらに外側にあり、特に軸対称応力条件下では幾何学的規準と実験結果との対応は良いようである。なお、この幾何学的規準では、 $\phi_{me}=44.7^\circ$ 、Drucker-Prager規準では、 $\phi_{me}=67.7^\circ$ である。

(2) 三浦ら³⁾の実験

三浦ら³⁾は、側圧 σ_r 一定(196 kPa)の排水条件下で、通常の円柱供試体を用いた三軸圧縮および伸張試験を行った。材料は豊浦砂で、多重ふるい落下法(MSP法)、Dry Tapping法、Wet Rodding法と呼ばれる3種類の方法を用いて供試体を作成している。

図-3は、この結果である。同図の三軸伸張側の結果

をみると、体積最大圧縮量は、MSP法>Dry Tapping法>Wet Rodding法の順にあるのに対し、このときの応力比(q/p)の絶対値は、MSP法<Dry Tapping法<Wet Rodding法の順で、順番が逆転しているのが特徴的である。ここに、 $q=\sigma_1-\sigma_3$ である。体積最大圧縮時の応力比からそのときの内部摩擦角 ϕ_{mc}, ϕ_{me} を求め、表-1(実験番号7~9)に示した。

MSP法によって作成された供試体は、堆積方向への载荷に対して変形しにくいという異方性を有している³⁾が、表-1(実験番号7~9)では、異方性の強いものほど ϕ_{mc} と ϕ_{me} が近い値を示している。また、MSP法、Dry Tapping法、Wet Rodding法の順に砂の構造が乱され、固有異方性が取り除かれていると考えれば、固有異方性が消失するのに伴って ϕ_{me} が ϕ_{mc} より大きくなるといえそうである。別の表現をすれば、体積最大圧縮時の応力比の π 平面での位置は、三軸伸張状態でモール・クーロン規準より外側にあり、異方性の強い材料ほどモール・クーロン規準に接近することを示している。

ただし、材料が膨張的挙動を示すか、収縮的挙動を示すかは、この ϕ_{me} と ϕ_{mc} の大小関係だけで決まるものではなく、5.で後述するように破壊時の内部摩擦角 ϕ と体積最大圧縮時の内部摩擦角 ϕ_m の相対的な大小関係(ϕ と ϕ_m の異方性の違い)に基づいて考察する必要がある。

(3) Pradhanら⁴⁾の実験

Pradhanら⁴⁾は、平均主応力 p 一定の排水条件下で、種々の繰返し三軸試験を行った。材料は豊浦砂で、供試体の作成方法は空中落下法である。

実験で得られた ϕ_{mc} と ϕ_{me} を表-1(実験番号10)に示している。この実験で、彼らは「 ϕ_{mc} と ϕ_{me} は、それぞれ 27.7° と 27.5° ではほぼ等しい。また、この値は供試体密度、応力経路、応力履歴、圧力レベルによらない」との結論を出している。この結果は、前述の三浦らの行ったMSP法による結果と対応しているものと判断できる。

(4) 筆者らの実験

筆者らは、 p 一定(98 kPa)の排水条件下で三軸圧縮および伸張試験を行った。材料は、カーボネイト系の破碎しやすい砂(以下、Dogs Bay砂と呼ぶ)で、供試体の作成方法は空中落下法である。

実験で得られた ϕ_{mc}, ϕ_{me} を表-1(実験番号13, 14)に示している。この実験では、 ϕ_{mc} は相対密度 D_r によらず一定(36.9°)である。これに対し、 ϕ_{me} は D_r の低下に伴って低下しており、 $D_r=40\%$ の ϕ_{me} は、 80% の ϕ_{me} より 6° 程度小さいことが分かる。

(5) 体積変化特性の定量的評価

(1)~(4)の結果は、砂の有する固有異方性の程度によって、体積最大圧縮時の応力比が三軸圧縮と三軸伸張において相対的に大きく異なることを示している。こ

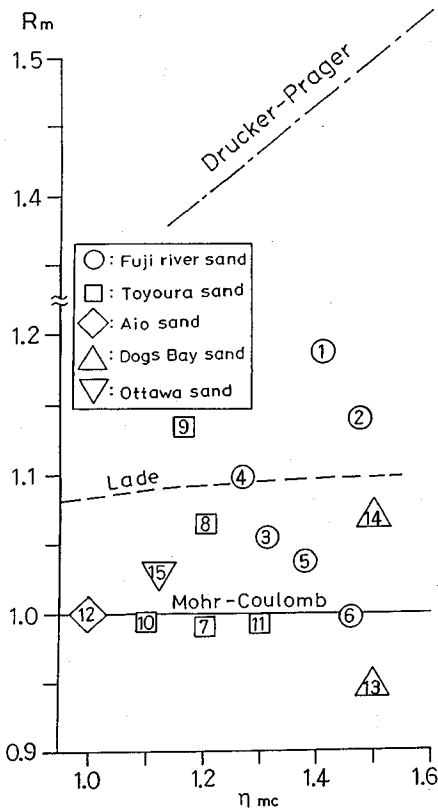


図-4 $R_m \sim \eta_{mc}$ 関係

のことを、次式で定義される指標 R_m を用いて評価することを考える。

$$R_m = \frac{\eta_{mc}(3 + \eta_{mc})}{3\eta_{mc}} \dots \dots \dots (1)$$

指標 R_m は、拘束圧による違いも含めて実験結果を统一的に解釈するためのものではなく、既往のモール・クーロン、Lade、Drucker-Prager等の規準が実験結果に表れる構造的な異方性をどの程度表現できるかを定量的に調べるために導入したものである。ここに、 η_{mc} 、 η_{mc} は三軸圧縮および伸張時の体積最大圧縮時の応力比 (q/p) の絶対値を意味する。この指標は、 $R_m=1$ のときモール・クーロン規準に一致し、 $R_m=1+\eta_{mc}/3$ のとき Drucker-Prager 規準に一致するという特徴を有している。

表-1 に、前述した実験で得られた R_m を示している。同表には、富士川砂を用いた石原ら⁵⁾の実験(実験番号 3)、同じく富士川砂を用いた龍岡ら¹⁸⁾の実験(実験番号 4~6)、豊浦砂、秋穂砂を用いた筆者ら^{15), 16), 19)}の実験(実験番号 11, 12) および Ottawa 砂を用いた Vaid ら²⁰⁾の実験(実験番号 15) から求めた R_m もあわせて示している。

図-4 は、表-1 の R_m を η_{mc} に対してプロットしたものであり、図中の数字は表-1 の実験番号である。図

中にはモール・クーロン規準を適用したときの R_m ($= 1$) を実線で、Lade 規準を適用したときの R_m を破線で、Drucker-Prager 規準を適用したときの R_m を一点鎖線で併記している。Lade 規準に従うと、 $R_m - \eta_{mc}$ 関係はやや右上りの曲線で表される。また、Drucker-Prager 規準も同じく右上り(勾配 1/3)の直線である。

同図において、強い固有異方性を有すると考えられる MSP 法(実験番号 7)と Pradhan らの実験(実験番号 10)では $R_m < 1$ であり、 η_{mc} がモール・クーロン規準より内側にあることが分かる。

一方、山田らの実験(実験番号 1, 2)と三浦らによる Wet Rodding 法(実験番号 9)の R_m は、Lade 規準の R_m よりかなり大きく、 η_{mc} が Lade 規準に従う曲線と Drucker-Prager 規準によるもの間にあることを示している。

龍岡らの実験(実験番号 4~6)から平均主応力 p の影響をみると、実験番号 4, 5, 6 の順に p が大きくなるが、これに伴って R_m は次第に低下し、モール・クーロン規準に接近していることが分かる。このことは、高圧下の豊浦砂(実験番号 11)の実験において R_m が 1 より小さくなることと整合している。

ただし、高拘束圧下で $R_m=1$ に接近することが、強い構造的異方性を意味するものではないことに注意が必要である。砂の異方的な挙動は、 ϕ と ϕ_m の異方性の違いに基づいて考察する必要がある。拘束圧が大きくなると、 ϕ と ϕ_m は共にモール・クーロン規準に接近し、両者の異方性の程度の違いが少なくなり、その結果、砂の挙動(応力経路、応力~ひずみ関係)に表れる異方的特性は小さくなるものと考えられる。

以上、既往の実験結果と筆者らの実験結果に基づいて、体積最大圧縮時の応力比 M に表れる固有異方性の強さを式(1)で示す指標 R_m を使って検討した。図-4の結果によると R_m の値は 0.95~1.20 とかなりの幅で分布し、ひとつの規準だけで異方性の程度を表すことの難しさが理解できる。材料の特性、供試体の作成方法、あるいは拘束圧の大きさ等によって異方性が変動するのであるから、このような特性をひとつの規準を使って評価するための有効な方法として、中間主応力係数 (b 値) に応じて体積最大圧縮時の応力比 M を任意に設定できる規準、すなわち、 M の π 平面での形状を任意に設定できる規準を考える必要のあることをこの結果は示している。ここで、 $b = (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$ である。次章では、この特性を表現できる流れ則について言及する。

3. 構成式の概要と流れ則への新たな異方性の導入

本モデルは、塑性硬化係数場理論に基づく無数曲面モデルの範疇に属し、応力比一定タイプの正規降伏曲面(破

壊曲面)とその内部に定義される無数の硬化曲面および流れ則, 硬化則(硬化係数)によって構成されている。硬化曲面のうち, 現在の応力点を通る活動硬化曲面は, 負荷の方向を規定する負荷曲面として用いられ, その移動, 拡大および縮小によって古典弾塑性論で弾性域として取り扱われてきた正規降伏曲面内領域での弾塑性挙動を記述している。

本研究では, 前述したように静的な単調載荷時の挙動を取り扱う。このとき, 陽に用いられる曲面は正規降伏曲面と負荷曲面の2つである。以下, 静的な単調載荷時のモデルの基本式(構成関係)のうち, 正規降伏曲面 F , 負荷曲面 f および流れ則について述べる。硬化則は前モデル^{9),10)}と同じであり, 静的な単調載荷時には負荷曲面が応力空間の原点を中心にして拡大する等方硬化型モデルとなる。

(1) 前モデル^{9),10)}での正規降伏曲面 F , 負荷曲面 f および流れ則

単調載荷時の正規降伏曲面 F は, 2階の応力テンソル σ_{ij} を用いて次式で表される。

$$F = \eta_{ij}\eta_{ij} - A^2 = 0 \quad (2)$$

ここに, $\eta_{ij} = s_{ij}/p$, $p = (1/3)\sigma_{kk}$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。 A は, F の半径で, 次式で与えられる。

$$A = \sqrt{(2/3)} G(\theta) \quad (3)$$

上式の $G(\theta)$ は次式で表される。

$$G(\theta) = \frac{1}{2(-v/3)^{1/2} \cos(u/3)} \quad (4)$$

同式は, 松岡・中井²¹⁾の破壊規準に基づいて中間主応力の影響をローデ角 θ の関数として導入^{9),17)}したものである。

ここに, $v = \frac{3-k}{3(k-9)}$, $\cos u = \frac{-2k \sin(3\theta) / \{27(k-9)\}}{2(-v/3)^{3/2}}$,

$k = 9 + 8 \tan^2 \phi_c$, ϕ_c は三軸圧縮時 ($\theta = \pi/6$) の破壊時の内部摩擦角である。 θ は, 次式で表され,

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left\{ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right\} \quad (5)$$

$J_3 = (1/3)s_{ij}s_{jk}s_{ki}$, $J_2 = (1/2)s_{ij}s_{ij}$ である。この結果, F の π 平面での形はモール・クーロン規準のひずんだ六角形に外接する凸な曲線, オムスピ形となり, 軸対称応力状態 ($\theta = \pm \pi/6$) でモール・クーロン規準と一致する。

負荷曲面 f は, 式(2)の A を次式の a に置き換えたものであり, F と同じ $G(\theta)$ を用いて中間主応力の影響が θ の関数として導入されている。

$$a = a_0 \cdot G(\theta) \quad (6)$$

ここに, a は f の半径で, a_0 は現在の応力点を通るように硬化則から決定される。

軸対称応力状態での静的な単調載荷時の流れ則(スト

レス・ダイレイタンシー関係)は, 次式で表され, カム・クレイモデルと一致する。

$$-\frac{dv^p}{de_s^p} = M - \eta \quad (7)$$

ここに, $dv^p = de_{kk}^p$, $de_s^p = |de_{ij}^p|$, $de_{ij}^p = de_{ij}^p - (1/3)dv^p\delta_{ij}$, de_{ij}^p は塑性ひずみ増分, $\eta = |\eta_{ij}|$ である。

$||$ はテンソルのノルムを表す。式(7)で用いられる体積最大圧縮時の応力比 M も, θ の関数 $G_m(\theta)$ を用いて次式で与えられる。

$$M = \sqrt{(2/3)} G_m(\theta) \quad (8)$$

ここで, $G_m(\theta)$ は, 式(4)で用いられる ϕ_c を ϕ_{mc} に置き換えたものであり, ϕ_{mc} は前述したように三軸圧縮状態での体積最大圧縮時の内部摩擦角である。

すなわち, 前モデルでは破壊および負荷に関して θ の影響を定義する $G(\theta)$ と流れ則に関して θ の影響を定義する $G_m(\theta)$ が同じ定義式(松岡・中井規準²¹⁾)に基づいて設定されている。

(2) 流れ則への新たな異方性の導入

ここでは, 中間主応力の影響を表す $G(\theta)$ および $G_m(\theta)$ に筆者ら¹⁵⁾⁻¹⁷⁾の導入した幾何学的に表現される規準を適用する。これは, $G(\theta)$ と $G_m(\theta)$ を独立に設定することで, 前章で述べたダイレイタンシー特性をよりの確に表現し, これによって非排水時のひずみ軟化(Contractive)から硬化(Dilative)に至る挙動をうまく表現しようと試みたものである。この試みは, 軽部ら²²⁾の結論(ダイレイタンシーとせん断強度は直接には関係のない現象であり, 破壊曲面がモール・クーロンの破壊六角錐に外接する曲面で表せるのに対し, 等ダイレイタンシー線は π 平面で静水圧軸を中心とする同心円群となる)とも整合するものである。

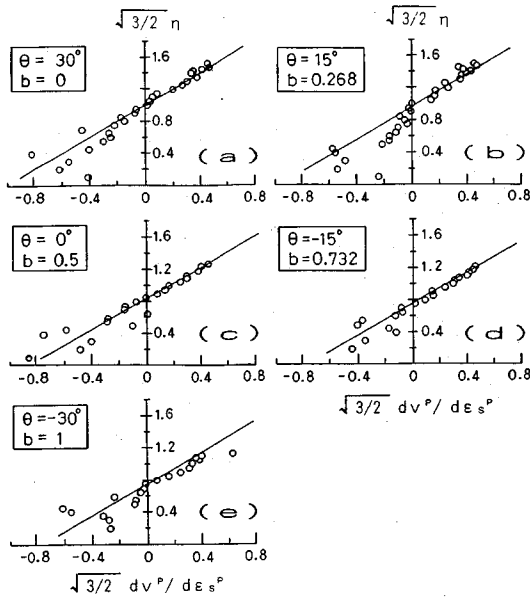
本モデルに組み込まれた幾何学的に表現される破壊規準を $G(\theta)$ の形式で表すと, 次式となる。

$$G(\theta) = \frac{\eta_{fc} \cdot A_f}{\{A_f^2 \cdot \cos^2(1.5\theta_0) + \sin^2(1.5\theta_0)\}^{1/2}} \quad (9)$$

ここに, $\theta_0 = \theta - \pi/6$, $\eta_{fc} = 6 \sin \phi_c / (3 - \sin \phi_c)$ で, η_{fc} は三軸圧縮状態での破壊時の応力比である。 A_f は材料定数であり, $A_f = 1$ と置くと $G(\theta)$ は π 平面で円(Drucker-Prager 規準)となり, $A_f = 3/(3 + \eta_{fc})$ と置くと三軸圧縮と伸張状態でモール・クーロン規準を満足する歪んだ楕円となる。したがって, この規準の有用性は A_f の値を変えることにより, π 平面での形状を任意に選定できるという点にある。また, π 面上の M の特性を評価する $G_m(\theta)$ は, $G(\theta)$ と同形の次式で与える。

$$G_m(\theta) = \frac{\eta_{mc} \cdot A_m}{\{A_m^2 \cdot \cos^2(1.5\theta_0) + \sin^2(1.5\theta_0)\}^{1/2}} \quad (10)$$

ここに, η_{mc} は式(1)で用いた三軸圧縮状態での体積最大圧縮時の応力比で, $\eta_{mc} = 6 \sin \phi_{mc} / (3 - \sin \phi_{mc})$ で



図—5 応力比～塑性ひずみ増分比関係

ある。また、 A_m は A_r と同じ特徴を有する材料定数であり、それぞれ独立に与えられる。

(3) 本モデルの材料定数

モデルの材料定数は、2つの弾性定数（初期せん断弾性係数 G_1 とポアソン比 ν ）、 ϕ_c 、 ϕ_{mc} 、硬化係数の初期値を設定する r および今回新たに導入した A_f 、 A_m の7つである。このうち、 ϕ_c と ϕ_{mc} は三軸圧縮時の破壊時の応力比 η_{fc} および体積最大圧縮時の応力比 η_{mc} を用いて、次式で与えられる。

$$\sin \phi_c = 3\eta_{fc} / (6 + \eta_{fc}) \dots\dots\dots(11)$$

$$\sin \phi_{mc} = 3\eta_{mc} / (6 + \eta_{mc}) \dots\dots\dots(12)$$

また、 A_f と A_m は三軸伸張時の破壊時の応力比 η_{fe} および体積最大圧縮時の応力比 η_{me} を用いて次式で与えられる。

$$A_f = \eta_{fe} / \eta_{fc} \dots\dots\dots(13)$$

$$A_m = \eta_{me} / \eta_{mc} \dots\dots\dots(14)$$

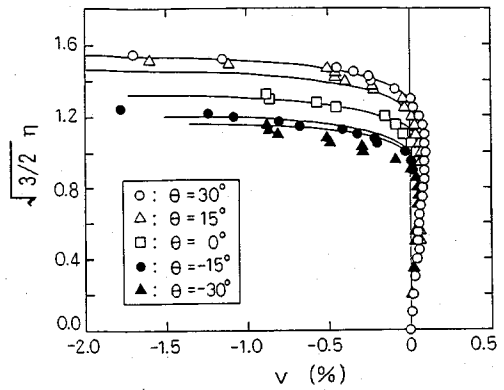
前述した図—1の実線は、式(14)から決定された $A_m = 0.806$ を用いて描いた $G_m(\theta)$ の π 平面での形状を示しているが、実験結果との対応は全体的に良好である。

4. 実験結果と解析結果の比較

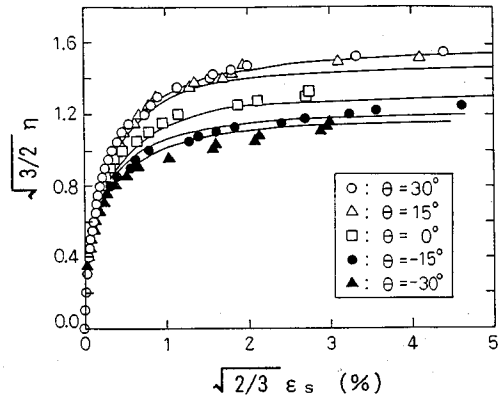
(1) 平均主応力一定、 θ 一定排水せん断試験の解析

まず、表—1（実験番号12）で前述した筆者ら^{15),16)}が行った平均主応力 p 一定（98 kPa）、 θ 一定排水せん断試験の解析を行う。用いた材料は $D_r = 60\%$ の秋穂砂で、供試体の作成方法は空中落下法である。

図—5は、式(7)で予測される応力比 $(\sqrt{3/2})\eta$ ～ 塑性ひずみ増分比 $(\sqrt{3/2}) dv^p / d\epsilon_s^p$ 関係と実験結



図—6 応力比～体積ひずみ関係



図—7 応力比～せん断ひずみ関係

表—2 解析に用いた材料定数

G_1 (kPa)	ν	ϕ_c (deg.)	ϕ_{mc} (deg.)	r	A_m	A_r
25000	1/4	39.2	25.4	2.0	0.751	0.750

果を比較したもので、○印が実験結果、実線が予測結果である。また、図—6は応力比 $(\sqrt{3/2})\eta$ ～ 体積ひずみ (v) 関係、図—7は応力比 $(\sqrt{3/2})\eta$ ～ せん断ひずみ $(\sqrt{2/3})\epsilon_s$ 関係の予測値と実験結果を比較したものである。図中には、 θ が 30° （三軸圧縮）、 15° 、 0° 、 -15° 、 -30° （三軸伸張）の場合の比較が示されている。ただし、図—5の実験結果においては、全ひずみを塑性ひずみとしてプロットしている。

解析に用いた材料定数は、表—2に示している。図—5～7において、予測値はストレス—ダイレイタンス—関係、体積変化特性および応力比～せん断ひずみ関係の θ 依存性をうまく表現しているといえる。

図—8は、三軸圧縮と伸張時の応力比 $(\sqrt{3/2})\eta$ ～ 主ひずみ関係の予測値と実測値を比較したものである。図(a)が三軸圧縮試験、図(b)が三軸伸張試験の比較であるが、いずれの場合も予測される主ひずみ値と実測値との対応も良好である。

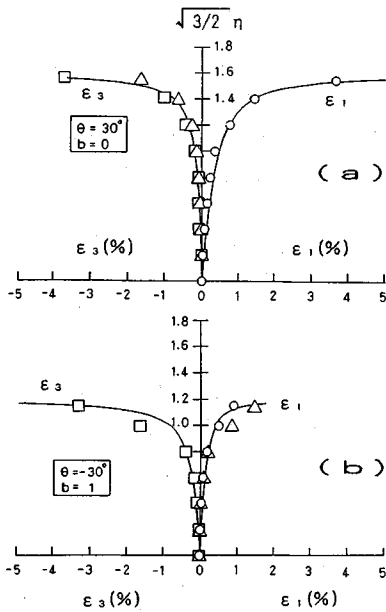


図-8 応力比~主ひずみ関係

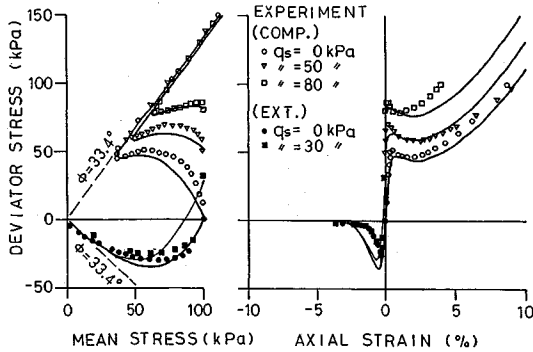


図-9 筆者らの実験結果⁶⁾と解析結果の比較

(2) 非排水三軸圧縮および伸張試験の解析

非排水時の解析を行うにあたり、 ϕ_c 、 ϕ_{mc} の決定法は3.(3)で述べたとおりである。まず、 A_f については、実際に行った非排水試験結果において三軸圧縮と伸張時の破壊時の内部摩擦角 ϕ がほぼ等しいという実験結果に基づいて、 $A_f = 3/(3 + \eta_{fc})$ で与えている。また、 A_m についてはこれをパラメトリックに動かして、実験結果にフィッティングする値を選定している。これは、ゆる詰め砂の非排水三軸伸張試験では、体積収縮一方の挙動を示し(後述の図-9参照)、 η_{mc} を一義的に決定できないこと、また特に伸張側では応力経路が反転する点の平均主応力がかなり小さく、 η_{mc} の正確な決定が困難なことによっている。

図-9は、筆者ら⁶⁾がひずみ制御で行った豊浦砂($D_r \approx 30\%$)の異方圧密からの非排水三軸圧縮および伸張試験結果と解析結果を応力経路と応力-ひずみ関係と比較

表-3 解析に用いた材料定数

	G_1 (kPa)	ν	ϕ_c (deg.)	ϕ_{mc} (deg.)	r	A_m
H	10000	1/8	33.4	30.4	1.0	1.000
K1	1000	1/3	36.9	28.7	1.5	0.810
K2	2300	1/3	36.9	28.7	1.5	0.810
K3	5560	1/3	36.9	28.7	1.5	0.810
V1	7600	1/3	35.0	30.0	1.5	0.850
V2	10000	1/3	35.0	30.0	1.5	0.790
V3	15500	1/3	35.0	30.0	1.5	0.790
M1	12200	1/3	31.5	28.0	1.5	1.000

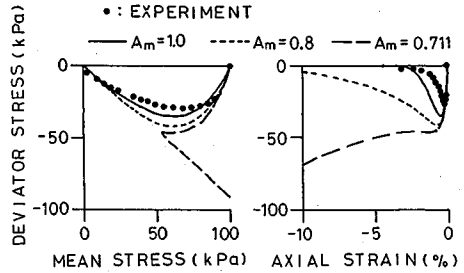


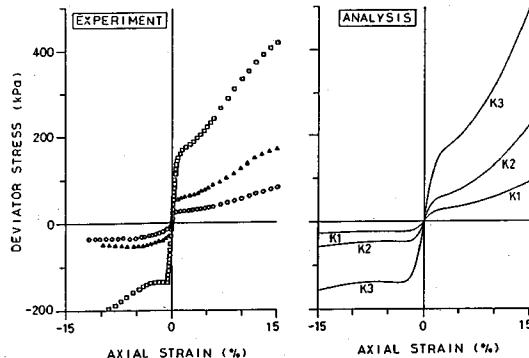
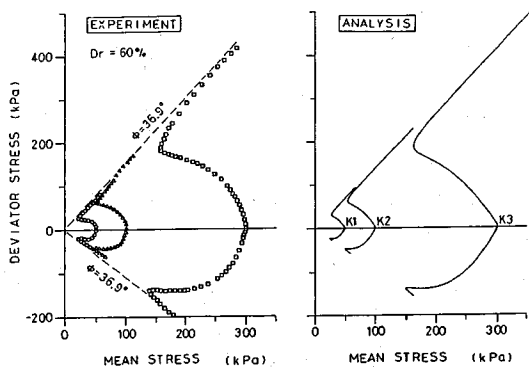
図-10 A_m を変えたときの解析結果(三軸伸張)

したものである。同図において、○、▽、□印は圧縮試験結果、●、■印は伸張試験結果を、実線は解析結果を示している。解析で用いた材料定数は、表-3(Hの記号)に示している。解析で採用した $\phi_c = 33.4^\circ$ での圧縮側と伸張側の応力比を、図中に破線で併記している。

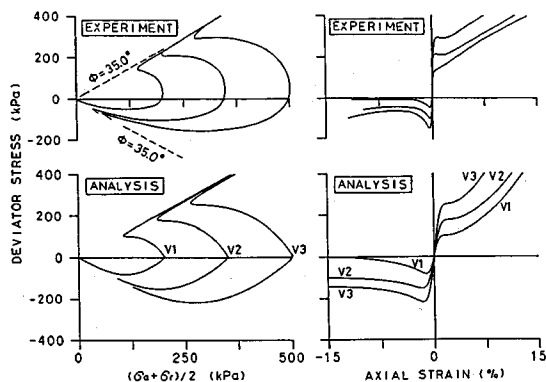
解析結果は、初期せん断 $q_s (= \sigma_{a0} - \sigma_{r0})$ を有するゆる詰め砂の非排水挙動をうまく表現している。ここに、 σ_{a0} 、 σ_{r0} は鉛直応力、側方応力の初期値である。特に、三軸圧縮状態では一旦ひずみ軟化が生じた後硬化に転じるのに対し、伸張状態では急激なひずみ軟化が生じ、静的な液状化に至る様子がうまく表現されている。

このような非排水時の強い異方性を表現するには、前述したように $G_m(\theta)$ を $G(\theta)$ と独立に設定するための A_m の導入が不可欠であると考えられる。このことをパラメトリックに詳細に検討したのが、図-10である。同図は、図-9と同じ材料定数を用いて、 A_m だけを0.8、0.711に変えたときの三軸伸張時の解析結果を示している。図中には図-9で用いた $A_m = 1.0$ の結果も併記している。なお、 A_m は式(10)から分かるように三軸圧縮時にはその効果が消失する($\theta = \pi/6$ のとき、分母と分子の A_m が相殺される)ため、圧縮時の解析結果は、すべて同じである。また、 $A_m = 0.711$ は伸張時にもモール・クーロン規準を満足するように、 $A_m = 3/(3 + \eta_{mc})$ から設定したものである。

同図において、 $A_m = 1.0$ に接近するにつれて急激なひずみ軟化が生じ、結果としてContractiveな挙動をうまく表現している。これは、流れ則を定義する体積最大圧縮時の応力比 M が π 平面で円(Drucker-Prager規準)



図一11 岡林らの実験結果⁷⁾と解析結果の比較



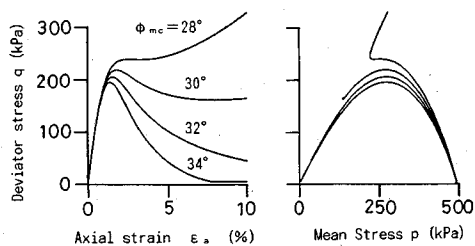
図一12 Vaidらの実験結果⁸⁾と解析結果の比較

に近いことを示しており、前述した軽部らの結論とも一致するものである。

図一11は、岡林ら⁷⁾が行った乱したしらす ($D_r=60\%$) の非排水三軸圧縮・伸張試験結果と解析結果を比較したものである。解析に用いた材料定数は、表一3 (K1~K3) に示しており、解析で採用した $\phi_c=36.9^\circ$ の圧縮側と伸張側の応力比を図中に破線で併記している。

解析結果は、三軸圧縮および伸張時の非排水挙動の大きな違いをうまく表現しており、伸張時にわずかではあるが軟化点を有する特徴も表現されている。

この解析では、 $A_m=0.810$ を用いている。ここで、 $A_m=3/(3+\eta_{mc})=0.724$ と置けば三軸伸張時にモール・



図一13 ϕ_{mc} を変えたときの解析結果 (三軸伸張)

クーロン規準と一致すること、また、 $A_m=0.788$ と置けばLade規準と一致することを考慮すると、三軸伸張時の M は、Lade規準とDrucker-Prager規準の間で、Lade規準に近い値を設定したことになる。

図一12は、Vaidら⁸⁾が行った Uniform tailings sand ($D_r=33\sim40\%$) の非排水三軸圧縮・伸張試験結果と解析結果を比較したものである。解析で用いた材料定数は表一3 (V1~V3) に示しており、 $\phi_c=35.0^\circ$ のの圧縮側と伸張側の応力比を図中に破線で併記している。図一9, 11, 12において、三軸圧縮と伸張時の ϕ はほぼ同じであり、前述したように $A_f=3/(3+\eta_{fc})$ に固定してもおおむね妥当であることが分かる。ただし、図一12の応力経路の横軸は、図一9~11とは異なり、実験の整理方法に合わせて $(\sigma_a+\sigma_r)/2$ を用いているので注意が必要である。解析結果は、実験に比べて伸張時の最大強度が若干大きいものの、三軸圧縮と伸張時の非排水挙動の特徴的な違いをおおむね表現している。

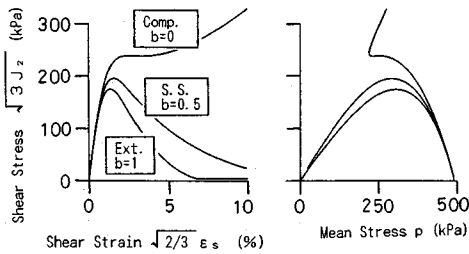
5. $G_m(\theta)$ を独立に設定することの効果

軸対称応力状態でひずみ軟化が発生し、静的な液化化に至る条件、その理論的背景については、文献10)で詳述した。ここでは、 ϕ と ϕ_m の相対的な大小関係がひずみ軟化の発生に与える影響について具体的に考察する。

図一13は、表一3の材料定数 ($M1$) を用いて、 ϕ_{mc} だけを28, 30, 32, 34°に変えた時の非排水三軸圧縮試験の解析結果¹⁰⁾である。ただし、三軸圧縮試験の解析であるため、前述のように A_m の値はこの結果に何ら影響を及ぼさない。同図において、 ϕ_{mc} を大きく ($\phi_{mc} > \phi_c$) すると急激なひずみ軟化が発生し、Contractiveな挙動を示す。逆に、 ϕ_{mc} を小さく ($\phi_{mc} < \phi_c$) するとひずみ硬化が生じ、Dilativeな挙動が表現される。

このように、 ϕ_c と ϕ_{mc} の大小関係によって、破壊時近傍のダイレイタンスー特性の逆転が表現できることは、既にいくつか報告されている^{10), 24)}。

図一14は、同様に表一3の材料定数 ($M1$) を用いて、非排水三軸圧縮試験 (Comp., $b=0$)、非排水三軸伸張試験 (Ext., $b=1$) および等方圧密での非排水単純せん断試験 (SS., $b=0.5$) の解析結果を比較したものであ



図—14 三軸圧縮, 伸張, 単純せん断試験の解析

る。ここで、せん断応力は $\sqrt{3J_2}$ を用いており、図中の圧縮試験結果(Comp.)は、図—13の $\phi_{mc}=28^\circ$ の結果と同じである。

この解析では、 $A_m=1.0$ を用いて $G_m(\theta)$ を設定した。また、 $A_f=3/(3+\eta_{fc})=0.703$ で与えた。この結果、三軸圧縮で $\phi=31.5^\circ$ 、 $\phi_m=28.0^\circ$ 、単純せん断で $\phi=33.8^\circ$ 、 $\phi_m=40.0^\circ$ 、三軸伸張で $\phi=31.5^\circ$ 、 $\phi_m=43.1^\circ$ が得られ、 ϕ_m が ϕ より相対的に大きいほどContractiveな挙動が強く表現されることになる。

このように、本モデルでは A_f と A_m をそれぞれ独立に与えることで、中間主応力係数 b 値に応じて ϕ と ϕ_m の相対的な大小関係を自由に与えることができる。この結果、今までのモデル^{(11)~(14)}では表わすことのできなかつた図—9に示したような三軸圧縮と伸張時でダイレイタンシー特性が逆転する強い異方性を比較的容易に表現することができる。

一方、今までのモデルでは破壊曲面、負荷曲面および塑性ポテンシャル曲面の π 平面での断面形状(異方性)を定義する規準が固定されているため、解析の適用範囲は限定されたものとなる。

6. 結 論

本文の主要な結論は、次のとおりである。

- ①：平均主応力 p 一定および側圧 σ_r 一定の排水せん断試験において、既往のモール・クーロン、Lade、Drucker-Prager等の規準が構造的な異方性の程度をどの程度表現できるかを定量的に示すための指標 R_m を提示した。
- ②：①で提示した R_m は、材料の特性、供試体の作成方法、あるいは拘束圧の大きさ等によって大きく変動しており、このような特性をひとつの規準を使って評価するための有効な方法として、体積最大圧縮時の応力比 M の π 平面での形状を任意に選定できる規準を考える必要があることを示した。
- ③：②の結果に基づき、破壊時の応力比 A の π 平面での形状と独立に、 M の π 平面での形状を任意に選定できるモデルを提示した。
- ④：③のモデルを用いることにより、三軸圧縮時には必ずみ硬化する材料が、三軸伸張時には必ずみ軟化を

示すような特性をうまく表せることを示した。

- ⑤：④の結果は、 M の異方性(π 平面での形状)をいかに設定するかが砂の非排水挙動の解析に重要であることを示している。

参 考 文 献

- 1) 龍岡文雄・朴 春植：砂の変形・強度特性の異方性Ⅰ，講座「地盤の異方性」，土と基礎，Vol. 41, No. 7, pp.79~87, 1993.
- 2) Yamada, Y. and Ishihara, K. : Anisotropic deformation characteristics of sand under three dimensional stress conditions, Soils and Foundations, Vol.19, No.2, pp.79~94, 1979.
- 3) Miura, S. and Toki, S. : A sample preparation method and its effect on static and cyclic deformation-strength properties of sand, Soils and Foundations, Vol.22, No.1, pp.61~77, 1982.
- 4) Pradhan, T.B.S., Tatsuoka, F. and Sato, Y. : Experimental stress-dilatancy relations of sand subjected to cyclic loading, Soils and Foundations, Vol.29, No.1, pp.45~64, 1989.
- 5) 石原研而・山田恭央・北川久雄：三主応力を変化させた砂のせん断特性，第10回土質工学研究発表会，pp.161~164, 1975.
- 6) Hyodo, M., Tanimizu, H., Yasufuku, N. and Murata, H. : Undrained cyclic and monotonic triaxial behaviour of saturated loose sand, Soils and Foundations, Vol.34, No.1, pp.19~32, 1994
- 7) 岡林 巧・村田秀一・兵動正幸・安福規之：乱したしらすの圧密非排水三軸せん断特性，第48回土木学会年次学術講演会，pp.912~913, 1993.
- 8) Vaid, Y.P. and Pillai, V.S. : Discussion of the critical state of sands, Geotechnique 42, No.4, pp.658~660, 1992.
- 9) 森尾 敏・日下部 伸・安福規之・兵動正幸：非共軸性の評価を取り入れた砂の繰返し弾塑性構成モデル，土木学会論文集，No.487/Ⅲ-26, pp.139~148, 1994.
- 10) 森尾 敏・日下部 伸・安福規之・兵動正幸：三軸応力状態での飽和砂の不安定挙動の解析的検討，土木学会論文集，No.499/Ⅲ-28, pp.157~165, 1994.
- 11) Nishi, K. and Kanatani, M. : Constitutive relations for sand under cyclic loading based on elasto-plasticity theory, Soils and Foundations, Vol.30, No.2, pp.43~59, 1990.
- 12) 八嶋 厚・岡二三生・柴田 徹・渦岡良介：4.11 LIQCAによる解析，地盤の液化化対策に関するシンポジウム発表論文集，pp.165~174, 1991.1.
- 13) 平井弘義：繰返し載荷を受ける砂の塑性・異方硬化モデル，土木学会論文集，第382号，pp.217~225, 1987.6.
- 14) Pstor, M., Zienkiewicz, O.C. and Chan, H.C. : Generalized plasticity and the modelling of soil behaviour, Int. Jour. for Nume. and Anal. Meth. in Geom., Vol.14, pp.151~190, 1990.
- 15) 安福規之：広範な応力域における異方圧密砂の降伏特性と弾塑性構成式に関する研究，九州大学学位論文，1990.
- 16) Yasufuku, N. and Ochiai, H. : Anisotropic hardening model for sandy soils over a wide stress region, Memoirs of

- the Faculty of Eng., Kyusyu Univ., Vol.51, No.2, 1991.
- 17) 西岡明宏・安福規之・兵動正幸・村田秀一：砂の拘束圧依存性と中間主応力の影響を考慮した構成式について，第28回土質工学研究発表会，pp.495～498，1993.
- 18) 龍岡文夫：三軸せん断装置による砂の変形特性に関する基礎的研究，東京大学学位論文，1972.
- 19) Miura, N., Murata, H. and Yasufuku, N. : Stress-strain characteristics of sand in a particle-crushing region, *Soils and Foundations*, Vol.24, No.1, pp.77～89, 1984.
- 20) Vaid, Y.P., Chung, E.K.F. and Kuerbis, R.H. : Preshearing and undrained response of sand, *Soils and Foundations*, Vol.29, No.4, pp.49～61, 1989.
- 21) Matsuoka, H. and Nakai, T. : Stress deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, *JSCE*, No.232, pp.59～70, 1974.
- 22) 軽部大蔵・栗原則夫：練り返し粘土のダイレイタンスとせん断強度について，土木学会論文集，第135号，pp.16-24，1966.
- 23) 飛田善雄：地盤の異方性 5. 構造テンソルによる異方性の表現，土と基礎，41-9，pp. 77-83，1993.
- 24) 岡二三生・八嶋 厚・加藤 満・中島 豊：弾塑性構成式を用いた浸透破壊解析法とその応用，土木学会論文集，No.493/Ⅲ-27，pp.127～135，1994.

(1994.5.23 受付)

THE EVALUATION OF ANISOTROPIC SAND UNDER UNDRAINED CONDITIONS BASED ON AN ELASTO-PLASTIC CONSTITUTIVE MODEL

Satoshi MORIO, Shin KUSAKABE, Noriyuki YASUFUKU and Masayuki HYODO

Sands deposited under water have been shown to be anisotropic. Their undrained response therefore depends on the direction of σ_1 (major principal stress) in relation to the depositional direction. As a result the contractive behaviour has been observed in triaxial extension while on the other hand in compression the response is dilatative at the same initial void ratio. This paper presents an analysis for the anisotropic undrained behaviour of sands under triaxial conditions. The following conclusions were reached.

- (1) the proposed model successfully simulates the undrained behaviour of sands under both triaxial compression and extension.
- (2) the cross section on the π plane of M (the stress ratio at the maximum volumetric contraction) has a major influence on the strength-deformation characteristics of sand