

# 粒状体のせん断時の粒子構造の変化とせん断ひずみの関係

山本修一\*・松岡 元\*\*

初期粒子構造や粒子間摩擦角の異なる2次元粒状体の個別要素法 (DEM) による二軸圧縮試験シミュレーション解析を行い、粒状体のせん断時の粒子構造の変化と応力～ひずみ関係との関わりについて考察するとともに、粒子構造の変化の微視的メカニズムを調べた。そして、粒子構造の変化を支配する粒子接点角の変化量とせん断ひずみの普遍的な関係を明らかにした。

**Key Words :** granular material, soil structure, dilatancy, biaxial compression test, distinct element method

## 1. はじめに

土は粒子の集合体であるから、その巨視的な力学特性は個々の粒子の挙動と関連するはずである。このような考えから、土などの粒状体の巨視的な力学特性を粒子レベルの微視的な考察に基づいて解明しようとする研究が古くから行われてきた<sup>1),2)</sup>。

Oda(1972)<sup>3)</sup>は実際の砂の三軸試験結果から初期の粒子接点角の度数分布が粒状体の力学特性に大きな影響を及ぼすことを示した。Oda and Konishi(1974)<sup>4)</sup>は光弾性材料の丸棒積層体の単純せん断試験から、粒子接点角の度数分布が最大主応力方向に片寄ることを示した。著者の一人、Matsuoka(1974)<sup>5)</sup>はアルミ丸棒や光弾性材料の丸棒の積層体の一面せん断試験を行い、粒子接点角の度数分布の変化に着目してモービライズド面上のせん断・垂直応力比～垂直・せん断ひずみ増分比関係を示した。

一方、コンピュータの発達とともに、粒状体のマイクロメカニクスの研究ツールとして、個別要素法 (DEM)<sup>6)</sup>が用いられるようになってきた。個別要素解析は実験では計測が困難な粒子の変位、粒子接点角、粒子間力、モービライズされる粒子間摩擦角等を容易に定量的に知ることができるというメリットがある。筆者らは、アルミ丸棒積層体の一面せん断試験結果および二軸圧縮試験結果とそれらの個別要素法によるシミュレーション解析結果とを定量的に比較して、個別要素法が粒状体の微視的なメカニズムを研究するツールとして有効であることを示した。そして、解析結果から、モービライズド面上のせん断・垂直応力比および垂直・せん断ひずみ増分比と粒子構造との関係を明らかにした<sup>7)</sup>。

このような粒状体のマイクロメカニクスの研究から、粒状体の力学挙動が微視的な粒子構造、特に粒子接点角の度数分布やその変化と密接な関係があることが明らかにされてきている。しかし、粒子構造の変化の源である粒子あるいは粒子接点がどのようなメカニズムでどのように挙動するのかは明らかにされていない。本研究では、初期粒子構造や粒子間摩擦角の異なる2次元粒状体の個別要素法による二軸圧縮試験シミュレーション解析の結果<sup>7)</sup>をもとに、粒状体のせん断時の粒子構造の変化と応力～ひずみ関係との関わりについて考察するとともに、粒子構造の変化の微視的メカニズムを調べた。そして、粒子構造の変化を支配する粒子接点角の変化量とせん断ひずみの普遍的な関係を明らかにした。

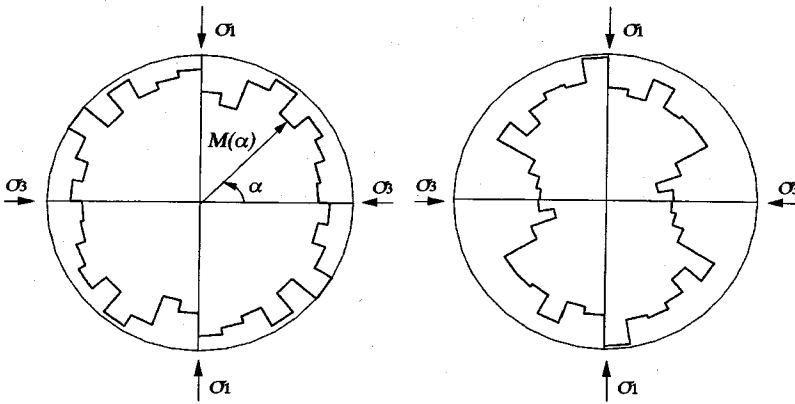
## 2. モービライズド面上の応力～ひずみ関係と粒子構造の変化

粒状体がせん断応力を受けると、粒子構造が変化することはよく知られている。図-1は、2種径アルミ丸棒積層体 ( $\phi 5\text{mm}$ と $\phi 9\text{mm}$ , 混合重量比3:2, 粒子数84個)の二軸圧縮試験のDEMシミュレーション結果<sup>7)</sup>から得られた粒子接点角の度数分布 $M(\alpha)$ を放射ヒストグラムで示したものである。ここに、 $\alpha$ は最大主応力面から時計回りに測った粒子接点角で、粒子接平面の垂直方向が最大主応力面と成す角度である (図-3参照)。なお、 $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ はそれぞれ最大, 最小主応力である。等方密時には分布が円形で、粒子構造が等方的であったものが、せん断によって分布がピーナツツ形に変化し、異方的な粒子構造になっていることがわかる。この粒子構造の変化は粒状体の最も典型的な特徴の1つであり、粒状体の力学特性と深い関係があると考えられる。

図-2は粒状体のせん断特性を支配すると考えられるせん断・垂直応力比の最大面、いわゆるモービライズ

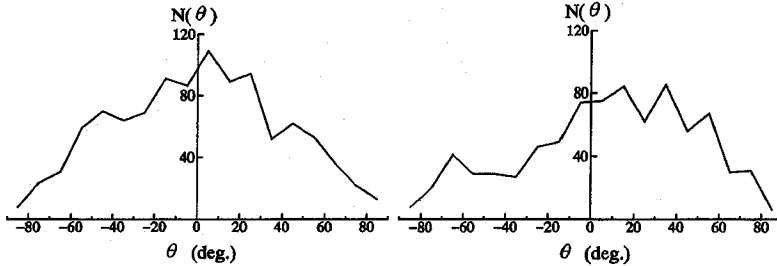
\* 正会員 (株)大林組 技術研究所 数値解析研究室  
(〒204 清瀬市下清戸4-640)

\*\* 正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科



(a) at initial hydrostatic stress condition (b) at peak stress ratio

図-1 粒子接点角の度数分布M(α)



(a) at initial hydrostatic stress condition (b) at peak stress ratio

図-2 モービライズド面上における粒子接点角の度数分布N(θ)

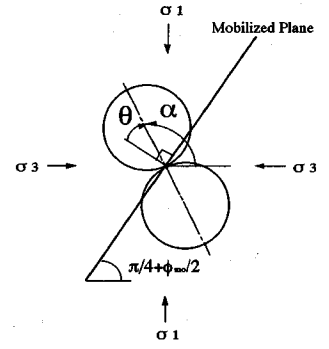


図-3 粒子接点角αとθ

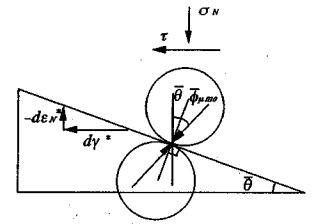


図-4 摩擦のある斜面上の粒子の運動に代表される粒状体の運動

面（最大主応力面から角  $(\pi/4 + \phi_{mo}/2)$ ）を成す面，ここに， $\tan \phi_{mo} = (\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} - \sqrt{\sigma_3/\sigma_1})/2$ ）上の粒子接点の接点角の度数分布  $N(\theta)$  を示している。ここに， $\theta$  は図-3 に示されるモービライズド面上の粒子接点角で，モービライズド面のせん断応力方向に対して反対方向回りを正としている。なお，モービライズド面上の粒子接点とは，接触する2粒子の粒子中心を結ぶ線分がモービライズド面と交差するものである。また，モービライズド面は，最大主応力面と角  $(\pi/4 + \phi_{mo}/2)$  を成す複数の平行面を供試体全体に一樣に設定している（間隔は10mm，数は44本）。図-2より，モービライズド面では，「せん断によって，せん断に抵抗しやすい（ $\theta$ が正の）粒子接点の度数が相対的に増加する」ということがわかる。

著者の一人，Matsuoka(1974)<sup>9)</sup>は以前にアルミ丸棒や光弾性材料の丸棒の一面せん断試験から，前記のモービライズド面上の粒子接点角の度数分布の変化を粒状体のせん断抵抗やダイラタンシー特性を支配する微視的要因として考察し，以下に示す式(1)~(2)に対応する関係を誘導している。そして，著者らは，より精度の高いDEM

によるアルミ丸棒積層体の二軸圧縮試験シミュレーション結果に基づいて同様の考察を行い，下記の関係が成立することを検証している<sup>7)</sup>。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \tan(\bar{\theta} + \bar{\phi}_{\mu mo}) \dots \dots \dots (1)$$

$$-\frac{d\epsilon_N^*}{dy^*} = \tan \bar{\theta} \dots \dots \dots (2)$$

ここに， $\tau/\sigma_N$ はモービライズド面上のせん断・垂直応力比である。 $\bar{\theta}$ はモービライズド面上の粒子接点角の平均値（平均粒子接点角）である。ただし，主要な構造骨格を成すと考えられる平均粒子間力以上の力を伝達する接点を対象とした平均粒子接点角である。また， $\bar{\phi}_{\mu mo}$ はそれらの接点でモービライズされている粒子間摩擦角の平均値（せん断に抵抗する方向にモービライズされている場合を正とした平均値）である。 $d\epsilon_N^*$ および $dy^*$ は，粒子の平均的な滑動方向が主ひずみ増分ベクトル  $d\epsilon_i = (d\epsilon_1, d\epsilon_3)$  の方向と一致するという考察に基づいて導入されたモービライズド面上のひずみ増分相当量（ひず

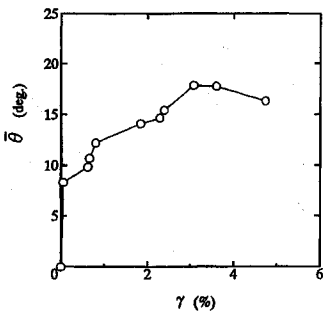


図-5 モーブリイズド面上の平均粒子接点角 $\bar{\theta}$ とせん断ひずみ $\gamma$ の関係

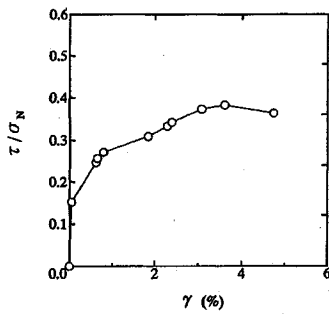


図-6 モーブリイズド面上のせん断・垂直応力比 $(\tau/\sigma_N)$ とせん断ひずみ $\gamma$ の関係

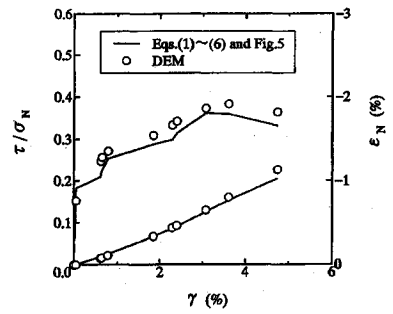


図-7 モーブリイズド面上の $\tau/\sigma_N \sim \gamma \sim \epsilon_N$ 関係:式(1)~(6)と図-5からの計算値(実線)とDEM(プロット)の比較

み増分とは異なる)で、次式で示される主ひずみ増分ベクトル $de_i = (de_1, de_3)$ のモーブリイズド面に垂直な成分および平行な成分である<sup>9)</sup>。

$$de_N^* = de_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{mo}}{2}\right) + de_3 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{mo}}{2}\right) \dots (3)$$

$$d\gamma^* = de_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{mo}}{2}\right) - de_3 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{mo}}{2}\right) \dots (4)$$

したがって、主ひずみ増分ベクトル $de_i = (de_N^*, d\gamma^*)$ は、その方向がモーブリイズド面上の粒子の平均的な滑動方向と一致すると考えられるものである。

ここで、特徴的なことは、マクロ量である応力比 $(\tau/\sigma_N)$ とひずみ増分相当量の比 $(-de_N^*/d\gamma^*)$ が粒子構造を代表するミクロ量である平均粒子接点角 $\bar{\theta}$ と関係づけられることである。そして、これらは「粒状体のせん断は図-4で示される摩擦のある斜面上を粒子が登り降りする問題としてとらえることができる」という、粒状体のせん断の重要なメカニズムの一つを端的に表している。

図-5はモーブリイズド面上のせん断ひずみ $\gamma$ と平均粒子接点角 $\bar{\theta}$ との関係を示している<sup>5)</sup>。また、図-6はモーブリイズド面上のせん断ひずみ $\gamma$ とせん断・垂直応力比 $(\tau/\sigma_N)$ の関係を示している。ここに、せん断ひずみ $\gamma$ は式(6)で表されるせん断ひずみ増分 $d\gamma$ から算定している。モーブリイズド面上の垂直ひずみ増分 $de_N$ およびせん断ひずみ増分 $d\gamma$ は、主応力方向と主ひずみ増分方向が一致するとすれば次式で表される。

$$de_N = \frac{de_1 + de_3}{2} + \frac{de_1 - de_3}{2} \cos\left[2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{mo}}{2}\right)\right] \\ = \frac{de_1 + de_3}{2} - \frac{de_1 - de_3}{2} \sin \phi_{mo} \dots (5)$$

$$d\gamma = (de_1 - de_3) \sin\left[2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{mo}}{2}\right)\right] \\ = (de_1 - de_3) \cos \phi_{mo} \dots (6)$$

図-5より、 $\bar{\theta}$ はせん断ひずみの増加とともに増加し、やがてピークに至って減少に転ずるのが見られる。また、この $\gamma \sim \bar{\theta}$ 関係は図-6の $\gamma \sim \tau/\sigma_N$ 関係と類似していることがわかる。このことは、式(1)からも明かなように、 $\bar{\theta}$ がせん断抵抗 $(\tau/\sigma_N)$ の主要な要因の1つであることを意味している。図-7は図-5の $\gamma \sim \bar{\theta}$ 関係と式(1)~(6)によって計算されたモーブリイズド面上の応力比 $(\tau/\sigma_N) \sim$ せん断ひずみ $\gamma \sim$ 垂直ひずみ $\epsilon_N$ 関係(実線)をDEM解析結果(プロット)と比較して示している。ここに、式(1)の $\bar{\phi}_{\mu mo}$ はDEM解析の結果から得られた値( $\bar{\phi}_{\mu mo} = 2^\circ$ )を用いた<sup>7)</sup>。なお、モーブリイズド面上の個々の接点において、粒子間摩擦のモーブリイズされる方向は必ずしもモーブリイズド面上のせん断に抵抗する方向だけではないので、せん断に抵抗する方向を正として平均した $\bar{\phi}_{\mu mo}$ は $2^\circ$ 程度であるが、モーブリイズされる粒子間摩擦角の絶対値の平均は $7 \sim 9^\circ$ (粒子間摩擦角 $\phi_p = 16^\circ$ の約4~6割)とかなりモーブリイズされている<sup>7)</sup>ことをここに付記しておく。図-7より $\bar{\phi}_{\mu mo}$ が推定できるならば式(1)~(6)と $\gamma \sim \bar{\theta}$ 関係から応力比 $(\tau/\sigma_N) \sim$ せん断ひずみ $\gamma \sim$ 垂直ひずみ $\epsilon_N$ 関係が予測できることがわかる。言い替えば、せん断に伴う粒子構造の変化( $\gamma \sim \bar{\theta}$ 関係)が粒状体の応力 $\sim$ ひずみ関係を支配するということになる。したがって、粒子構造の変化( $\bar{\theta}$ の変化)のメカニズムを解明することが重要であるといえる。

### 3. 粒子構造の変化の微視的メカニズム

せん断によって粒子構造は図-1, 2のように変化するが、この間、粒状体に何が起きているのであろうか。図-8は粒子構造が図-1のように変化する間の

(a)接触し続ける接点(定常接点と呼ぶ<sup>9)</sup>)の度数分布 $M_s(\alpha)$

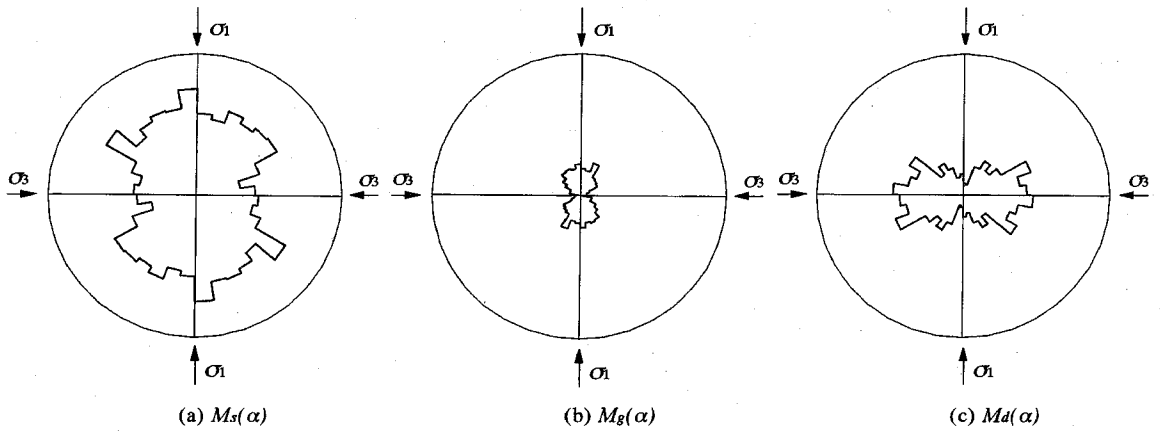


図-8 (a)定常接点の度数分布 $M_s(\alpha)$ ; (b)発生接点の度数分布 $M_g(\alpha)$ ; (c)消滅接点の度数分布 $M_d(\alpha)$

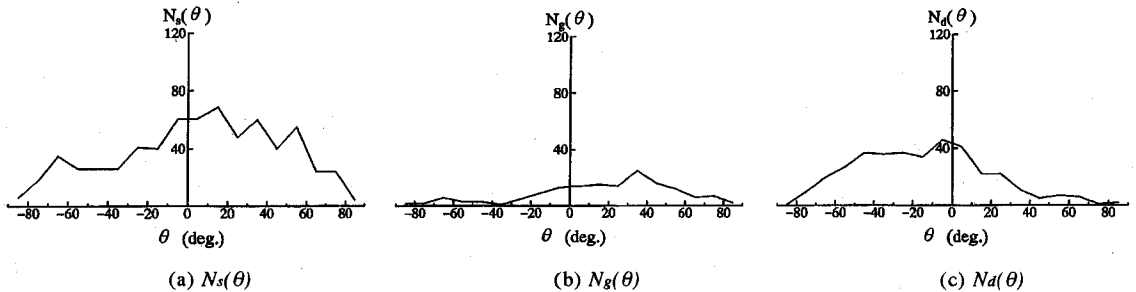


図-9 モービライズド面上の(a)定常接点の度数分布 $N_s(\theta)$ ; (b)発生接点の度数分布 $N_g(\theta)$ ; (c)消滅接点の度数分布 $N_d(\theta)$

- (b)接触していなかった粒子が接触して、新たに発生した接点(発生接点と呼ぶ<sup>9)</sup>)の度数分布 $M_g(\alpha)$
- (c)接触していた粒子が離れて消滅した接点(消滅接点と呼ぶ<sup>9)</sup>)の度数分布 $M_d(\alpha)$

を示している。なお、定常接点と発生接点の接点角 $\alpha$ は現接点角(主応力比ピーク時の接点角)で表わし、消滅接点の接点角 $\alpha$ は等方圧密時(接触していた時)の接点角で表している。また、グラフ軸のスケールは図-1と対応させている。図-8より、発生接点は最大主応力方向に集中し、消滅接点は最小主応力方向に集中しているのがわかる。同様の結果が、Oda, Konishi and Nemat-Nasser(1982)<sup>10)</sup>によって示されている。図-9は粒子構造が図-2のように変化する間のモービライズド面上の定常接点の分布 $N_s(\theta)$ 、発生接点の分布 $N_g(\theta)$ 、消滅接点の分布 $N_d(\theta)$ を示している。発生接点はせん断に抵抗しやすい $\theta$ の正の方向に集中し、消滅接点は反対に $\theta$ の負の方向に集中することがわかり、興味深い。これらの図から、図-1, 2のような粒子構造の変化は、粒子接点の異方的な発生・消滅による接点度数の増減と、後で述べる定常接点の滑動(すべり)・転動(ころがり)による

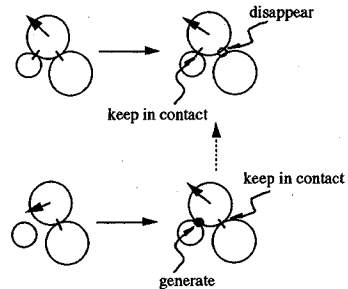


図-10 粒子接点の発生・消滅のメカニズム

接点角自身の変化によるものであると考えられる<sup>9)</sup>。そこで、粒子接点の発生・消滅がどのように起こっているのかをモービライズド面上の接点に着目して一点一点調べた結果、それらの主要なメカニズムは図-10のように単純化して考えることができる<sup>9)</sup>。すなわち、定常接点の滑動・転動によって、他の接点が消滅したり新たな接点が発生すると考えられる。以上から、図-1, 2で見られる粒子構造の変化は、粒子接点の滑動・転動による接点角の変化と、粒子接点の滑動・転動に起因して起こる

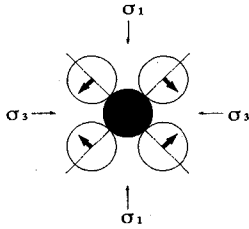


図-1 1 粒子接点の滑動・転動方向

接点の発生・消滅によるものであると考えられる。

そこで、以下では定常接点に着目してどのように接点角が変化(接点が滑動・転動)するのかを考察する。なお、粒子接点ではすべりところがりが混在し、接点角が変化するとき粒子間の摩擦は常にある程度モービライズされている(後掲 5 節参照)。

#### 4. 粒子接点角の変化量の分布

粒状体がせん断応力  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$  を受けた時、個々の粒子の動きは一見複雑であるが、平均的には主応力方向と粒子接点角との関係から図-1 1 に示す矢印の方向に滑動; 転動すると考えるのが自然である。実際には、すでに述べたように接点の発生・消滅があるが、以下では接触し続ける接点の滑動・転動に着目して考察する。

図-1 2 に、等方応力状態から主応力比  $\sigma_1/\sigma_3$  のピーク時までの 1 接点当たりの平均的な接点角の変化量  $\Delta\alpha$  の分布の例を放射グラフ(実線)で示す。対象とした粒子接点は、供試体内の接触し続ける全接点である。 $\Delta\alpha$  は粒子接点角  $\alpha$  と同様に反時計回りが正である。図中の破線は、接点角  $\alpha$  の粒子接平面、すなわち、最大主応力面と角  $(\alpha + \pi/2)$  を成す面に作用するマクロなせん断・垂直応力比  $(\tau/\sigma_N)$  の分布(式(7)で示される)を  $\Delta\alpha$  の分布に合うようにスケールリングして示している。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \sin\{2(\alpha + \pi/2)\}}{(\sigma_1 + \sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_3) \cos\{2(\alpha + \pi/2)\}}$$

$$= \frac{-(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\alpha}{(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\alpha} \dots \dots \dots (7)$$

図-1 2 から  $\Delta\alpha$  の分布(実線)はマクロなせん断・垂直応力比  $(\tau/\sigma_N)$  の分布(破線)とよく対応していることがわかる。すなわち、粒子接点の滑動・転動方向(正負)は粒子接平面に作用するマクロなせん断・垂直応力比  $(\tau/\sigma_N)$  の方向(正負)に対応しており、粒子接点は、主応力方向と粒子接点角との関係から図-1 1 に示す矢印の方向に滑動・転動するのがわかる。また、粒子接点角の変化量が最も大きいのは、マクロなせん断・垂

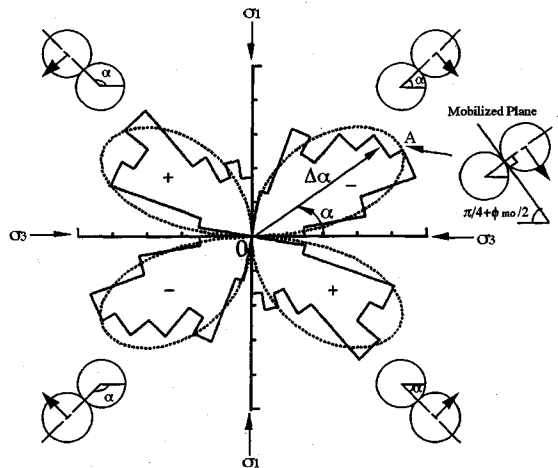


図-1 2 粒子接点角の変化量  $\Delta\alpha$  の分布

直応力比  $(\tau/\sigma_N)$  の最大面であるモービライズド面に平行な粒子接平面の接点である(図-1 2 のA点、挿し絵参照)。これらのことはミクロな粒子の滑動・転動がマクロなせん断・垂直応力比  $(\tau/\sigma_N)$  - 摩擦則- に支配されることを示しており、土のせん断特性を支配するのはモービライズド面であるという考え<sup>11)</sup>を支持するものである。

#### 5. モービライズド面上のせん断ひずみと粒子接点角の変化量の関係

粒状体のせん断特性を支配すると考えられるモービライズド面上のせん断ひずみと粒子接点角の変化量の関係を検討するために、まず、前記の粒子接点角の変化量の分布をモービライズド面上で考える。

図-1 3 に、モービライズド面上の粒子接点を対象として得られた、等方応力状態から主応力比  $\sigma_1/\sigma_3$  のピーク時までの粒子接点角の変化量  $\xi$  の分布をプロットで示す。ここに、 $\xi$  はモービライズド面上のせん断応力と同方向回りを正として測った粒子接点角の変化量である。したがって、右下がりのモービライズド面上で考えた  $\xi$  は時計回りが正となるので  $\Delta\alpha$  とは符号が逆になるが、 $\xi$  と  $\Delta\alpha$  は物理的には同じものを意味している。また、図中の実線は図-1 2 の破線と同様、接点角  $\theta$  の粒子接平面に作用するマクロなせん断・垂直応力比  $(\tau/\sigma_N)$  の分布をプロットに合うようにスケールリングしたものである。図-1 2 と図-1 3 は、全粒子接点を対象にしているか、モービライズド面上の粒子接点を対象にしているかの違いはあるが、どちらも 1 接点当たりの平均的な粒子接点角の変化量と粒子接点角との関係を示しており、本質的な違いはない。したがって、図-1 3 のモービライズド面上で

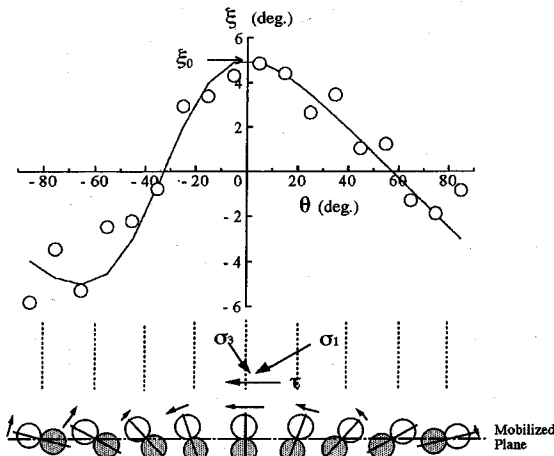


図-13 モービライズド面上の粒子接点角の変化量 $\xi$ の分布

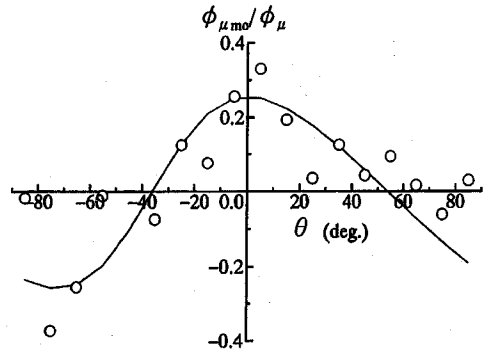


図-14 モービライズド面上の粒子接点のモービライズされる粒子間摩擦角 ( $\phi_{\mu mo}/\phi_{\mu}$ ) の分布

見た場合も、図-12の場合と同様に、粒子接点角の変化量 $\xi$ の分布はマクロなせん断・垂直応力比 ( $\tau/\sigma_n$ ) の分布とよく対応するのが見られる。そして、モービライズド面に平行な面を接平面とする粒子接点 ( $\theta=0^\circ$ の接点) の接点角の変化量 (図-13中の $\xi_0$ ) が最も大きいことがわかる。図-13の下部に示す挿し絵は、モービライズド面上の粒子がその粒子接点角に応じてどの方向にどの程度滑動・転動するか (ベクトルで示す) を、グラフ横軸の接点角 $\theta$ と対応させて描いた模式図である。この図から、モービライズド面上の粒子接点であっても、全ての接点と同じ方向に滑動・転動するのではないということが理解される。これは、前述の「粒子接点は主応力方向と粒子接点角の関係から図-11に示す矢印の方向に滑動・転動する」を考慮すれば容易に理解される。また、図-10の粒子接点の発生・消滅のメカニズムに、図-13で示される滑動・転動方向を適用して考えると、図-9で見られる「発生接点が $\theta$ の正の方向に集中し、消滅接点が $\theta$ の負の方向に集中する」ことは当然のこととして理解される。

図-14はモービライズされている粒子間摩擦角 $\phi_{\mu mo}$ を粒子間摩擦角 $\phi_{\mu}$ で正規化したもの ( $\phi_{\mu mo}/\phi_{\mu}$ ) の分布をプロットで示している。ここに、 $\phi_{\mu mo}$ はモービライズド面上のせん断応力と反対方向回りを正としている (なお、図中のプロットは $\theta$ の変域 $10^\circ$ ごとの、 $\phi_{\mu mo}$ の正負の符号を考えた平均値を表しており、 $\phi_{\mu mo}$ の絶対値の平均値とは異なる)。図中の実線は図-13と同様に接点角 $\theta$ の粒子接平面に作用するマクロなせん断・垂直応力比 ( $\tau/\sigma_n$ ) の分布をプロットに合うようにスケールしたものである。図より、粒子間摩擦角のモービライゼーションの度合も粒子接点角の変化量と同様に、粒子接平面のマクロなせん断・垂直応力比 ( $\tau/\sigma_n$ ) の大きい接点

ほど大きいことがわかる。粒子接点ではすべりやころがりを起こしつつ接点角が変化し、 $\phi_{\mu}$ はある程度モービライズされているが、平均的に見れば、接点角の変化の大きい接点ほど $\phi_{\mu mo}$ も大きいことがわかり、興味深い。

次に、モービライズド面上のマクロなせん断ひずみ $\gamma$ とマイクロな粒子接点角の変化量 $\xi$ の関係を考える。図-15は2種径アルミ丸棒積層体 ( $\phi 5\text{mm}$ と $\phi 9\text{mm}$ , 混合重量比3:2, 粒子数810~849個) の二軸圧縮試験を模擬した4ケースのDEMシミュレーション結果の主応力比 ( $\sigma_1/\sigma_3$ ) ~ 主ひずみ ( $\epsilon_1, \epsilon_3$ ) ~ 体積ひずみ ( $\epsilon_v$ ) 関係を示している。これらの解析は応力~ひずみ関係に影響する初期粒子配置、粒子間摩擦角 $\phi_{\mu}$ および初期間隙比 $e$ を変えて行ったものである (表-1参照)。解析は2ケースの二軸圧縮試験の等方圧密前 (2ケースはともにランダム配置している) の実験写真をデジタル化して得られた粒子配置 (仮にA,Bとする) に基づいている。ケース1は粒子配置A, ケース2~4は粒子配置Bを用いて等方圧密し、側圧一定でせん断した。なお、ケース4は等方圧密後、間隙比 $e$ を大きくするために、粒子間力を伝達していない浮遊粒子の一部を解析上消去した後でせん断した。消去粒子の選択にあたっては消去場所がなるべく片寄らないように注意した。図-15より、4ケースは主として、初期粒子配置の違い (ケース1とケース2), 粒子間摩擦角の違い (ケース2とケース3) および初期間隙比の違い (ケース2とケース4) によって応力~ひずみ関係が異なるのがわかる。応力~ひずみ関係の異なるこれらの4ケースについて、モービライズド面上のマクロなせん断ひずみ $\gamma$ と粒子接点角の変化量が最も大きい $\theta=0^\circ$ の粒子接点角の変化量 $\xi_0$  (図-13参照) の関係を図-16に示す。同図より、 $\gamma$ と $\xi_0$ はモービライズド面上のせん断・垂直応力比 ( $\tau/\sigma_n$ ) のピーク

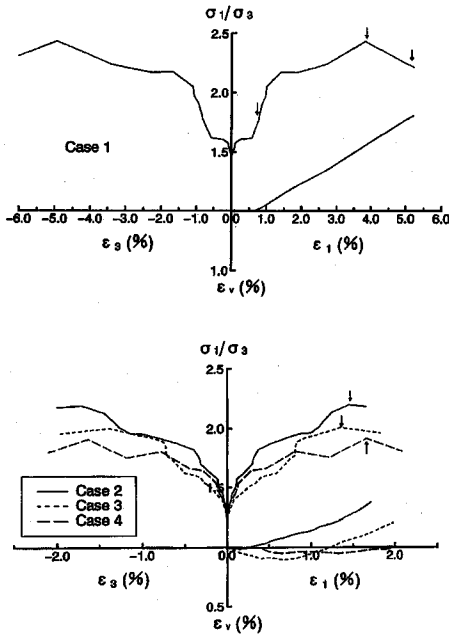


図-15 主応力比( $\sigma_1/\sigma_3$ )~主ひずみ( $\epsilon_1, \epsilon_3$ )~体積ひずみ( $\epsilon_v$ )関係 (4ケースの二軸圧縮試験のDEMシミュレーション解析結果)

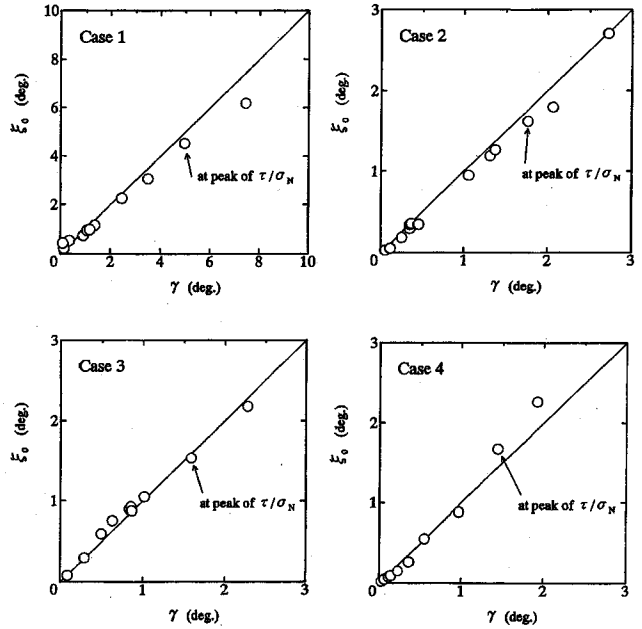


図-16 モーブリズド面上のせん断ひずみ $\gamma$ と $\theta=0^\circ$ の粒子接点角の変化量 $\xi_0$ の関係

表-1 解析ケース

case	friction angle $\phi_\mu$ ( $^\circ$ )	void ratio $e$
1	16	0.21
2	16	0.21
3	10	0.21
4	16	0.25

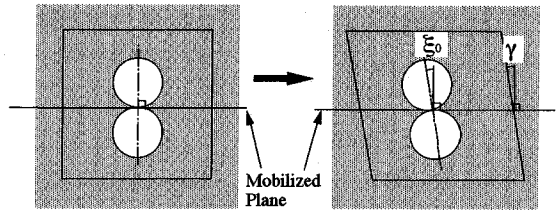


図-17 モーブリズド面上マクロせん断ひずみ $\gamma$ とマイクロな粒子接点角の変化量 $\xi_0$

後も含めてすべてのケースでよく対応していて、

$$\xi_0 = \gamma \dots \dots \dots (8)$$

の関係が成立するのがわかる。したがって、粒子接平面がモーブリズド面に平行な粒子接点での接点角の変化量 $\xi_0$ は、モーブリズド面上のマクロなせん断ひずみ $\gamma$ に等しいといえる。そして、この関係は初期粒子配置、粒子間摩擦角 $\phi_\mu$ および初期間隙比 $e$ に関係なく成り立つ普遍的なものであるといえる。また、このことはモーブリズド面上では、図-17に示すようにマクロな回転角であるせん断ひずみ $\gamma$ とマイクロな回転角である $\xi_0$ が等しいことを表わしており興味深い。

すでに述べたように、粒子接点角の変化量 $\xi$ の分布が図-13に示されるようにマクロなせん断・垂直応力比( $\tau/\sigma_N$ )の分布と対応するとすれば、任意の接点角 $\theta$ を成す粒子接点の接点角の変化量 $\xi$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} \xi &= c \frac{\tau(\theta)}{\sigma_N(\theta)} \\ &= c \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \sin\{2(\pi/4 + \phi_{mo}/2 - \theta)\}}{(\sigma_1 + \sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_3) \cos\{2(\pi/4 + \phi_{mo}/2 - \theta)\}} \\ &= c \frac{\sin \phi_{mo} \cos(2\theta - \phi_{mo})}{1 + \sin \phi_{mo} \sin(2\theta - \phi_{mo})} \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

ここに、 $c$ は $\theta$ に依存しない定数で、 $\sigma_N(\theta)$ 、 $\tau(\theta)$ はそれぞれ粒子接点角 $\theta$ の接平面に作用するマクロな垂直応力とせん断応力である(図-18参照)。ただし、 $\tau(\theta)$ は考えているモーブリズド面に作用するせん断応力と同方向回り(図-18の場合は反時計回り)を正とする。なお、図-18は右上がりのモーブリズド面を対象に描いているが、右下がりのモーブリズド面を考える場合には角度をすべて反対方向回りで考えれば(図-18を

紙面裏側から見て考えれば) 右上がりの場合と全く同様に考えることができ、右下がりのモービライズド面でも接点角の変化量 $\xi$ は式(9)で表わされる。式(9)で、 $\theta=0$ とすれば、

$$\xi_0 = c \frac{\sin \phi_{mo}}{\cos \phi_{mo}} \dots \dots \dots (10)$$

したがって、式(8),(9),(10)より、 $\xi$ は次式で表される。

$$\xi = \gamma \frac{\cos \phi_{mo} \cos(2\theta - \phi_{mo})}{1 + \sin \phi_{mo} \sin(2\theta - \phi_{mo})} \dots \dots \dots (11)$$

なお、式(11)は、接点角 $\alpha$ の接点での接点角の変化量 $\Delta\alpha$ と $\gamma$ の関係として表わすことができる。以下に、その誘導を示す。式(8)は図-12ではA点での関係であるから、一般的な表示で示せば次のようになる。すなわち、粒子接平面がモービライズド面に平行な $\alpha = \pm(\pi/4 - \phi_{mo}/2)$ の接点での接点角の変化量 $\Delta\alpha_{max}$ は

$$\Delta\alpha_{max} = \mp \gamma \dots \dots \dots (12)$$

ただし、 $\gamma$ は反時計回りを正とするモービライズド面上のせん断ひずみである。粒子接点角の変化量 $\Delta\alpha$ の分布が図-12に示されるようにマクロなせん断・垂直応力比( $\tau/\sigma_N$ )の分布と対応するとすれば、任意の接点角 $\alpha$ を成す粒子接点の接点角の変化量 $\Delta\alpha$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= c \frac{\tau(\alpha)}{\sigma_N(\alpha)} \\ &= c \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \sin\{2(\alpha + \pi/2)\}}{(\sigma_1 + \sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_3) \cos\{2(\alpha + \pi/2)\}} \\ &= -c \frac{\sin \phi_{mo} \cdot \sin 2\alpha}{1 - \sin \phi_{mo} \cdot \cos 2\alpha} \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

ここに、 $c$ は $\alpha$ に依存しない定数で、 $\sigma_N(\alpha)$ 、 $\tau(\alpha)$ はそれぞれ粒子接点角 $\alpha$ の接平面に作用するマクロな垂直応力とせん断応力である。ただし、 $\tau(\alpha)$ は反時計回りを正とする。式(13)で $\alpha = \pm(\pi/4 - \phi_{mo}/2)$ とすれば

$$\Delta\alpha_{max} = \mp c \cdot \frac{\sin \phi_{mo}}{\cos \phi_{mo}} \dots \dots \dots (14)$$

したがって、式(12),(13),(14)より、 $\Delta\alpha$ は次式で表される。

$$\Delta\alpha = -\gamma \frac{\cos \phi_{mo} \cdot \sin 2\alpha}{1 - \sin \phi_{mo} \cdot \cos 2\alpha} \dots \dots \dots (15)$$

式(11)と式(15)は表示は異なるが、物理的には「粒子接点角の変化量の分布と粒子接平面のマクロなせん断・垂直応力比の分布は比例関係にあり、モービライズド面に平行な粒子接平面での接点角の変化量はモービライズド面上のせん断ひずみに等しい」という同じ意味を表わしている。

式(11),(15)を検証するために、図-19~22にケース1の $\tau/\sigma_N$ のピーク前、ピーク時、ピーク後およびケー

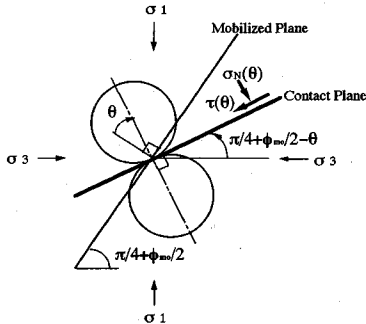


図-18 粒子接点角の接平面に作用するマクロな垂直応力 $\sigma_N(\theta)$ とせん断応力 $\tau(\theta)$

ス2~4の $\tau/\sigma_N$ のピーク時(図-15の矢印で示す時点)について、実際の粒子接点角の変化量の分布と式(11),(15)で表される分布とを比較して示す。図-19, 20では、実際の粒子接点角の変化量 $\xi$ をプロットで示し、式(11)で表わされる分布を実線で示している。また、図-21, 22では、実際の粒子接点角の変化量 $\Delta\alpha$ を実線で示し、式(15)で表される分布を破線で示している。図-19, 21より、モービライズド面上のせん断・垂直応力比( $\tau/\sigma_N$ )のピーク前、ピーク時およびピーク後の全ての場合に、粒子接点角の変化量の分布が式(11),(15)で近似されるのがわかる。また、図-20, 22より、初期粒子配置、粒子間摩擦角、初期間隙比の異なるケース2~4の場合にも粒子接点角の変化量の分布が式(11),(15)で近似されるのがわかる。したがって、任意の粒子接点での接点角の変化量は式(11)あるいは式(15)で表されるといえる。

6. まとめ

2種径アルミ丸棒積層体の二軸圧縮試験のDEMシミュレーション解析の結果から、粒状体のせん断時の粒子接点角の変化と応力~ひずみ関係の関わりについて考察し、粒子接点角の変化量とせん断ひずみの関係を明らかにした。主な結論をまとめると以下の通りである。

- (1) 粒状体の粒子構造を代表するモービライズド面上の平均粒子接点角 $\bar{\theta}$ は、モービライズド面上のせん断・垂直応力比( $\tau/\sigma_N$ )やひずみ増分相当量の比( $-d\epsilon_N^*/dy^*$ )と密接な関係があり、せん断(せん断ひずみ $\gamma$ の変化)に伴う $\bar{\theta}$ の変化は粒状体のせん断時の応力~ひずみ関係を支配する。したがって、 $\bar{\theta}$ はマクロな応力~ひずみ関係を支配する重要な粒子構造指標である。
- (2) せん断に伴う粒子構造の変化は、粒子接点の滑動・転動による接点角の変化と、粒子接点の滑動・転動に起因して起こる接点の発生・消滅によるものである。
- (3) 接点の発生は最大主応力方向に集中し、接点の消



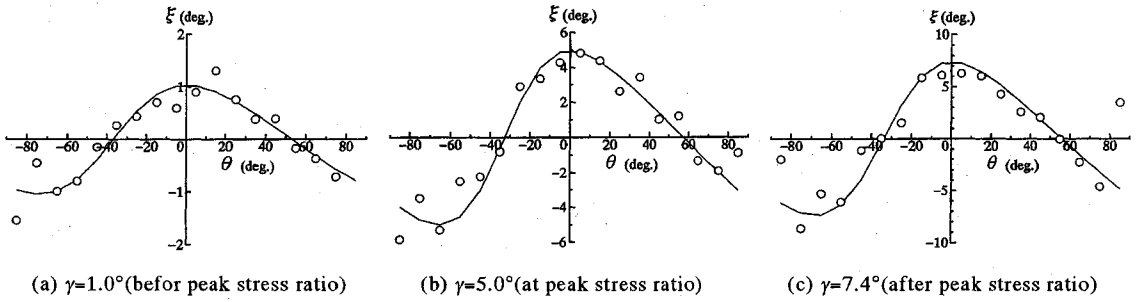


図-1 9 粒子接点角の変化量 $\xi$ のDEM解析結果 (プロット) と式(11)による計算値 (実線) の比較 (ケース1)

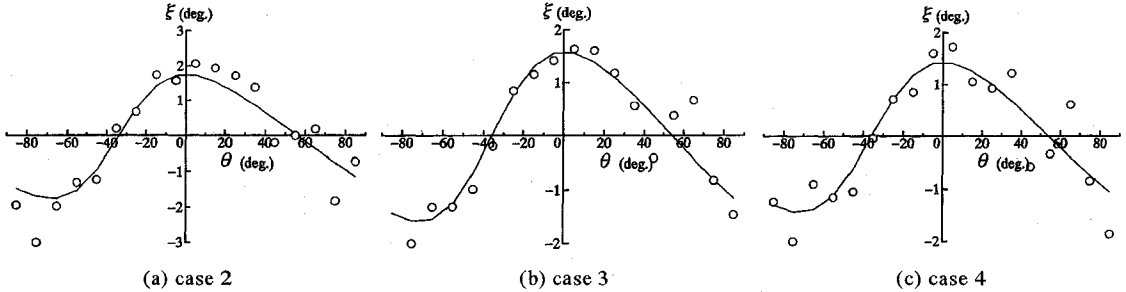


図-2 0 粒子接点角の変化量 $\xi$ のDEM解析結果 (プロット) と式(11)による計算値 (実線) の比較 (ケース2~4の応力比ピーク時)

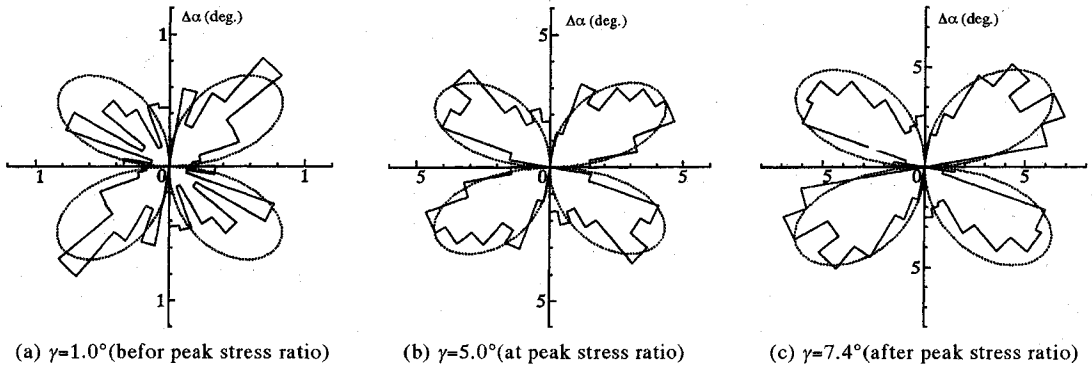


図-2 1 粒子接点角の変化量 $\Delta\alpha$ のDEM解析結果 (実線) と式(15)による計算値 (破線) の比較 (ケース1)

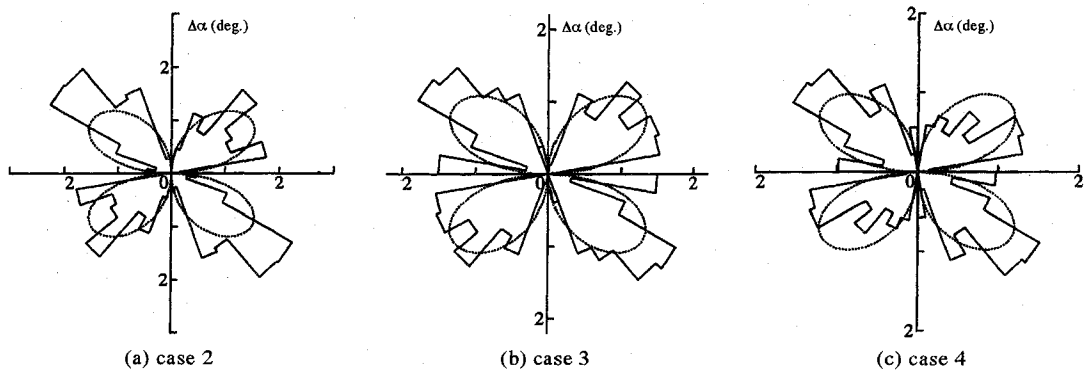


図-2 2 粒子接点角の変化量 $\Delta\alpha$ のDEM解析結果 (実線) と式(15)による計算値 (破線) の比較 (ケース2~4の応力比ピーク時)

減は最小主応力方向に集中する。

(4) 粒子接点角の変化量はモービライズド面に平行な粒子接平面の接点で最も大きく、その大きさはモービライズド面上のマクロなせん断ひずみと等しい。

(5) モービライズされる粒子間摩擦角 $\phi_{\mu mo}$ もモービライズド面に平行な粒子接平面の接点で最も大きい。

(6) 粒子接点角の変化量の分布とモービライズされる粒子間摩擦角の分布は、ともに、粒子接平面のマクロなせん断・垂直応力比 $(\tau/\sigma_N)$ の分布と比例関係にある。すなわち、粒子接点角の変化量は粒子接平面のマクロなせん断・垂直応力比 $(\tau/\sigma_N)$ -摩擦則-に支配される。

(7) 任意の粒子接点の接点角の変化量とモービライズド面上のマクロなせん断ひずみとの関係は本文中の式(11)あるいは式(15)で表わされる。

**謝辞**：本研究を行うにあたって(株)大林組技術研究所の表佑太郎博士に数々のご助力を頂いた。記して感謝の意を表する次第である。

#### 参 考 文 献

- 1) Newland, P. L. and Alley, B. H. : Volume change in drained triaxial tests on granular materials, *Geotechnique*, Vol. 7, No. 17, pp. 17-34, 1957.
- 2) Rowe, P. W. : The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, Vol. 269, pp.500-527, 1962.
- 3) Oda, M. : Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular material, *Soils and Foundations*, Vol. 12, No. 1, pp.17-36, 1972.
- 4) Oda, M. and Konishi, J. : Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear, *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 4, pp.25-38, 1974.
- 5) Matsuoka, H. : A microscopic study on shear mechanism of granular materials, *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 1, pp. 29-43, 1974.
- 6) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L. : A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique* Vol.29, No.1, pp.47-65, 1979.
- 7) 松岡 元・山本修一：個別要素法による粒状体のせん断機構の微視的考察，土木学会論文集，No.487/III-26，pp.167-175，1994.
- 8) 中井照夫：土の変形強度特性と地盤の変形解析への適用に関する研究，京都大学学位論文，pp.14-15，1980.
- 9) Matsuoka, H. and Takeda, K. : A stress-strain relationship for granular materials derived from microscopic shear mechanism, *Soils and Foundations*, Vol.20, No.3, pp.45-58, 1980.
- 10) Oda, M., Konishi, J. and Nemat-Nasser, S. : Experimental micromechanical evaluation of granular materials: effects of particle rolling, *Mechanics of Materials* 1, pp.269-283, 1982.
- 11) Matsuoka, H. : Stress-strain relationships of sands based on the mobilized plane, *Soils and Foundations*, Vol.14, No.2, pp.47-61, 1974.

(1994. 3. 15 受付)

## A RELATIONSHIP BETWEEN FABRIC CHANGES AND SHEAR STRAIN OF GRANULAR MATERIALS UNDER SHEAR

Syuichi YAMAMOTO and Hajime MATSUOKA

Based on numerically simulated biaxial compression tests by DEM on granular assemblies with different interparticle friction angles or different initial fabrics, the microscopic mechanism of fabric changes and the correlation between fabric changes and stress-strain behaviour of granular materials under shear is considered. And a general relationship between the shear strain on the mobilized plane and changes of interparticle contact angles which control fabric changes is made clear.