

管路・開水路流れ境界面の伝播を伴う急変非定常流の解析法に関する基礎的研究

細田 尚*・多田彰秀**・井上和也***・
北原政宏****

本研究は、地下放水路、下水道網および発電所放水路などの地下水管系において、流量の急変時に生ずる管路流れと開水路流れの状態が共存する非定常流の解析法について、基本的な現象を例として取り上げ考察したものである。対象とした現象は、水で満たされた管路末端のゲートを急閉することによる空気泡の浸入現象であり、空気泡先端の伝播および水面形の変化を再現するための数値解析法を示すとともに、実験結果と比較することにより解析法の検証を試みる。

Key Words : open channel flow, pipe flow, air cavity, numerical analysis, Boussinesq equation

1. 緒 言

近年、都市の治水安全度を高める方策の一つとして、地下放水路や地下河川などが計画され、実際に施工されている。しかし、地下空間あるいは地下水管系において生じる可能性のある過渡水理現象が複雑であるため、現時点では十分に把握されていない水工学上の諸問題も少なくないと考えられる。

地下水管系における過渡現象の水理学的な特徴として、水路内の流量が急増・急減した場合、流れの状態が自由表面を有する開水路流れの状態から自由表面が水路天端に着水した管路流れの状態に、または逆に管路流れから開水路流れに遷移することが考えられる。このような遷移現象は、水力、火力発電所放水路系においても、負荷遮断によって流量が急変する時に生じることが知られている。

開水路流れと管路流れが共存している非定常流の解析法に関しては、従来、対象とする現象に応じて個別に研究が進められてきたように思われる。例えば、林¹⁾は流れ込み式発電所放水路のサージングに関して、サージタンク水位が放水路天端より低くなった場合の簡易解析法を提案している。すなわち、Fig.1を参照して、境界面が放水路内へ浸入した場合、水面を下流端水位とサージタンク水位を結んだ直線で近似した簡易解析法を提案している。また、Benjamin²⁾は、満水の管路末端を開放したときの空気泡の浸入現象を理論的に研究し、空気泡先端の伝播速度を導いている。Benjaminの理論は、境界面近傍の水面形に及ぼす表面張力の効果を考慮するなど

して改良され、実験的にも検証されている³⁾。これらの研究では、いずれも流体の非圧縮性を仮定している。

一方、下水道網内の非定常流に関して、管路流れの領域には水の圧縮性を考慮した水撃波の基礎式を適用し、開水路流れの領域には慣用の Saint Venant の式を用いる方法が開発されている。この方法では、管路頂部に圧力波の伝播速度に相当する幅のスロットを仮想的に立てることで、形式上全領域を開水路状態として解析することが可能になり、スロット・モデルと呼ばれている⁴⁾。ただし、雨水の浸入のような早い場合でも数分間の時間スケールの現象に対して圧縮性を考慮する必要性、圧力波の伝播速度として実際の管路の物性値 (10^3 (m/s) のオーダー) を用いると非常に小さな計算時間間隔を用いる必要があること、平面2次元場への拡張が困難など水理学的に明確でない点もある。

以上のように、管路・開水路流れ共存状態の非定常流は、対象とする現象によって用いられる基礎式や解析法が異なり、また境界面の非定常伝播過程の取り扱いなど検討すべき課題も多い。そこで本研究では、境界面の伝播を伴う非定常流の中で最も基本的と考えられる、満水の管路への空気泡の浸入現象を考え、空気泡先端の伝播と境界面近傍の水面形を再現するための基本的な数値解析法を示すとともに、従来の理論的成果および実験結果と比較することにより解析法の検証を試みる。

2. 対象とする現象と従来の研究

本研究で対象とする現象は、Fig.2に示したように水で満たされた長方形断面の管路の末端を瞬間に開放したときに生じる管路・開水路境界面の伝播を伴う流れである。この流れに関しては、Benjamin²⁾, Gardner-Crow⁵⁾, Wilkinson³⁾などによって研究され、境界面の伝播速度、水深など現象の基本的特性量が1次元解析法を用いて理論的に導かれるとともに、実験的にも検証されている。

* 正会員 工博 京都大学講師 工学部土木工学科
(〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工修 西松建設技術研究所

*** 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

**** 正会員 工修 運輸省

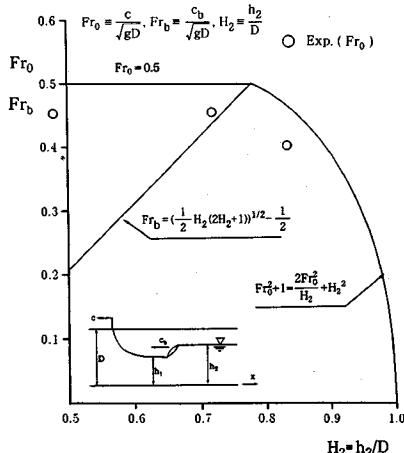


Fig.4 Relation between interface velocity and downstream depth

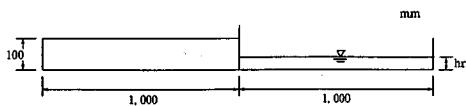


Fig.5 Experimental set-up

すなわち、流体として水を用いた実験結果から、よどみ点のごく近傍では空気泡の形状が管高さ D などの条件によらず変化しないこと（これに従い r , h_s が一定値となる。）を指摘し、無次元量 $\sigma/\rho gr^2$ および h_s/r がそれぞれ約 0.67 と 0.45 になることを用いて式（8）を変形し、式（12）を導いた。さらに、式（12）が Gardner-Crow⁵⁾ の実験結果とよく適合することを確かめている。Wilkinson の $D=0.1\text{ (m)}$ の実験値 $h_s/D=0.015$, $r/D=0.033$ と上記の $\sigma/\rho gr^2 \approx 0.67$, $h_s/r \approx 0.45$ から $r \approx 3.3\text{ (mm)}$, $h_s \approx 1.5\text{ (mm)}$ になる。

3. 水理実験の概要

数値解析法と解析結果を示す前に、本研究においても水理実験を行ったのでその概要を説明する。実験は、Fig.5 に示した幅 5 cm, 長さ 200 cm, 高さ 10 cm のアクリル製水槽を用いて行われた。水槽の中央に仕切板を設置し、水槽の左半分に注水して満管状態とする。その後に、仕切板を瞬時に取り除くことによって空気泡を浸入させ、ビデオおよび写真撮影を行うことで境界面位置と水深分布の時間変化を求めた。また、水槽の右半分にも貯水し、貯水深 hr を変化させることで Fig.3 の h_2 を変化させた。Fig.6 には、水槽右半分の貯水深を三通り ($hr/D=0, 0.5, 0.7$) に変化させた場合の空気泡の浸入過程を示した。 $hr/D=0, 0.5$ は、Fig.4 の $H_2 \leq 0.78$ の場合であり、 $hr/D=0.7$ は後続の段波が境界面に追いつく $H_2 > 0.78$ の場合である。

Fig.7 に境界面の位置と時間の関係を、Fig.8 に仕切

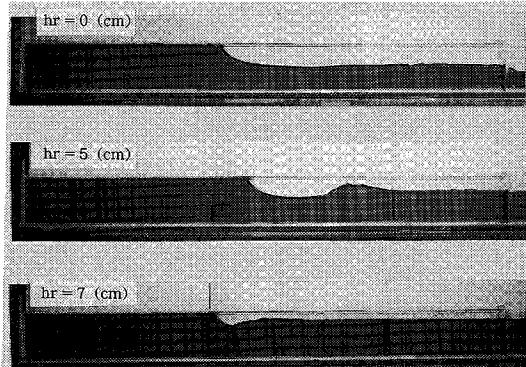


Fig.6 Photograph pf flow

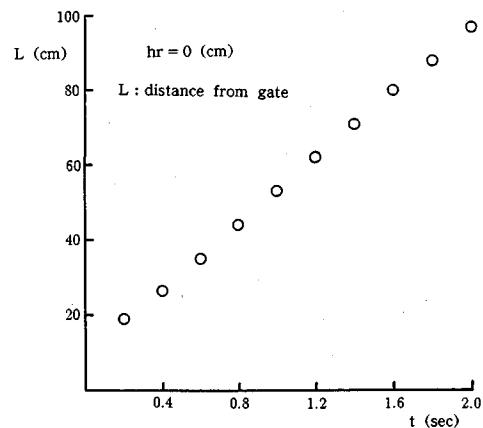


Fig.7 Relation between position of interface and time

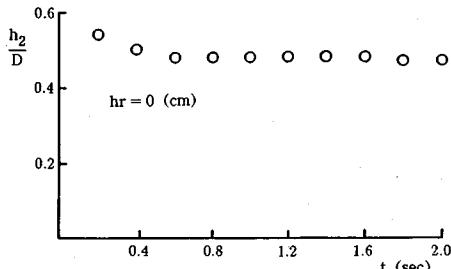


Fig.8 Relation between depth at the gate and time

板の位置の水深 h_2 と時間の関係を示した。Fig.7 から、境界面の移動距離は時間に比例していることがわかる。この図より境界面の伝播速度を求め、 h_2/D との関係を Fig.4 中に示した。この図より、表面張力の効果によって、伝播速度は理論式（9）および（11）より若干小さいこと、 $D=0.1\text{ (m)}$ として式（12）を計算すると $Fr_0 \approx 0.46$ となり、 $hr/D=0, 0.5$ の場合の実験結果と一致することがわかる。

4. 数値解析法

(1) 基礎式

1 次元解析法を用いて、現象を再現する方法について

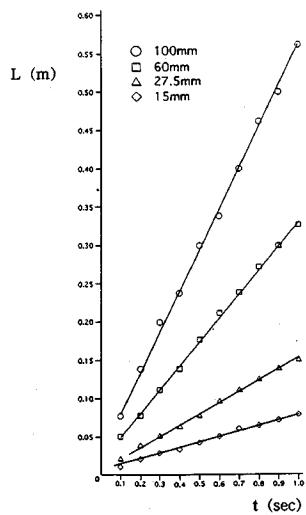


Fig.13 Relation between interface position and time

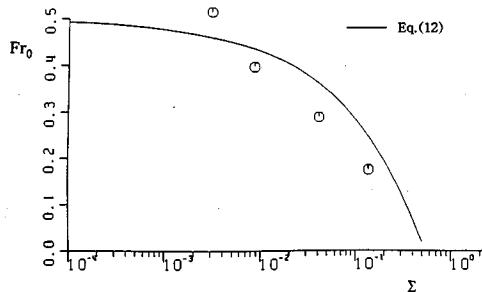
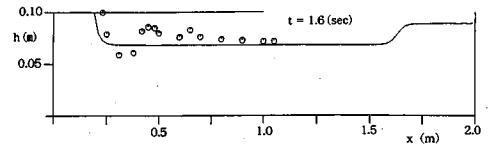
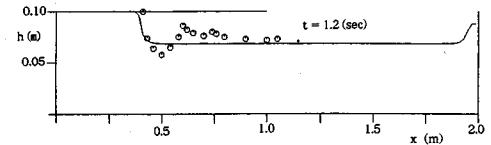
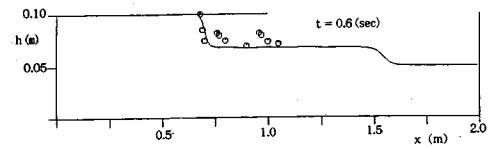
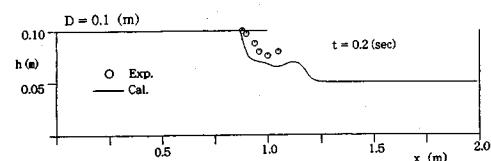
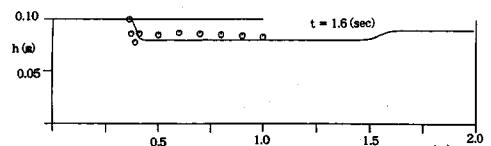
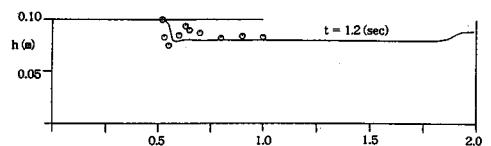
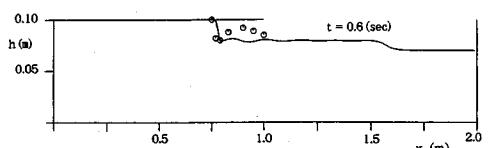
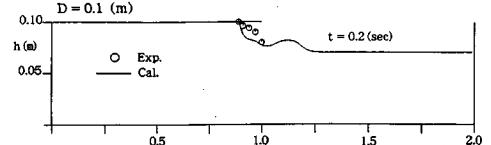


Fig.14 Relation between interface velocity and surface tension parameter

$hr=5\text{cm}$, 7cm の考察を行う前に、 $hr=0\text{(cm)}$ の場合の境界面の伝播に及ぼす管高さ D の影響について考える。2. で述べたように、Wilkinson は境界面の伝播速度と管高さの関係として式 (12) を導き、実験結果と適合することを確かめている。本研究の解析法を用いて、伝播速度と管高さの関係を再現できるかどうか確かめるために、 $D=6.0, 2.75, 1.5\text{(cm)}$ として計算した。境界面位置と時間の関係を示したのが Fig.13 ($D=10\text{(cm)}$ の結果も示した.) であり、この図から伝播速度を算定し Fr_0 と Σ の関係を Fig.14 に示した。図には式 (12) も示してある。計算結果は式 (12) とほぼ適合し、本解析法によって伝播速度に及ぼす管高さの効果をほぼ再現できると考えられる。

Fig.15 は $hr=5\text{(cm)}$ の結果である。境界面の伝播速度に関して計算結果と実験結果は一致しているが、境界面近傍の水面形状すなわち天端から約 $0.5 D$ の高さまで急激に減少しその下流に波状の段波が続く形が再現されていない。Fig.16 に示した $hr=7\text{(cm)}$ は、後続の段波が境界面に追いつく場合であり、この場合も境界面の伝播速度に関して計算結果と実験結果は一致している

Fig.15 Air intrusion process ($hr=5\text{(cm)}$)Fig.16 Air intrusion process ($hr=7\text{(cm)}$)

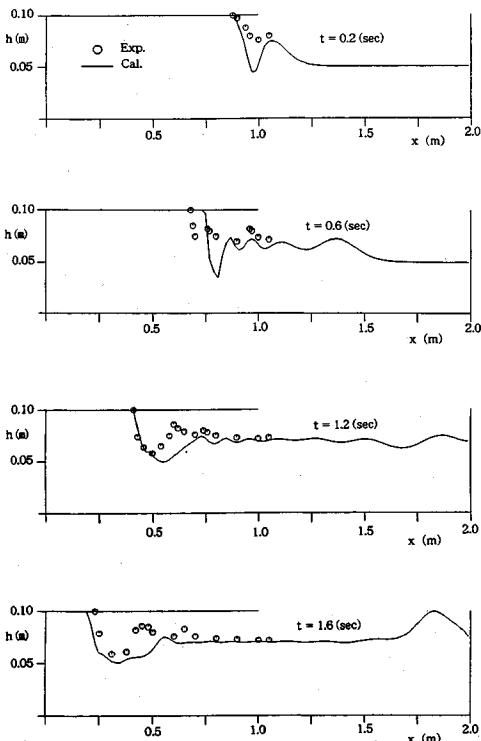


Fig.17 Calculated results with vertical acceleration term ($hr=5$ (cm))

が、境界面近傍のくびれた水面形状が十分には再現されていない。この理由として、水面形が急激に変化する境界面近傍で圧力が静水圧分布から大きく異なっていることが考えられる。そこで、次に開水路流れの運動方程式中の圧力項に鉛直加速度を考慮した補正項を付加し、モデルの改良を試みる。

6. モデルの改良とその結果

一次元解析の基礎式の誘導において、漸変流の場合通常静水圧分布が仮定されているが、波状段波のように水面が急激に変化する場合には、鉛直加速度項を無視できない。この効果を考慮した基礎式は古くから知られており、運動方程式(16)右辺に次式が付加される^{9),10)}。

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} h^2 u^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{2}{3} h^2 u \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial t} + \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right)$$

上式中第3項(鉛直加速度の非定常項)のみを考慮することにより、波状段波のような非定常性が卓越している現象が再現可能なことが知られており¹¹⁾、また境界面近傍では $Q \approx 0$ であることから、本研究では第3項を連続式(13)を用いて書き換えた式(26)を付加項として考慮する。すなわち、開水路流れの運動量方程式(16)右辺に

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} \right) \dots \dots \dots \quad (26)$$

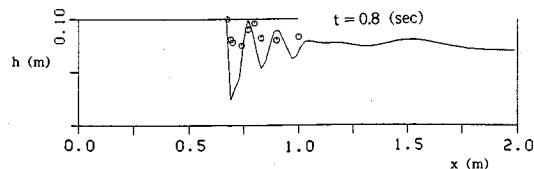


Fig. 18 Calculated results with vertical acceleration term ($hr=7$ (cm))

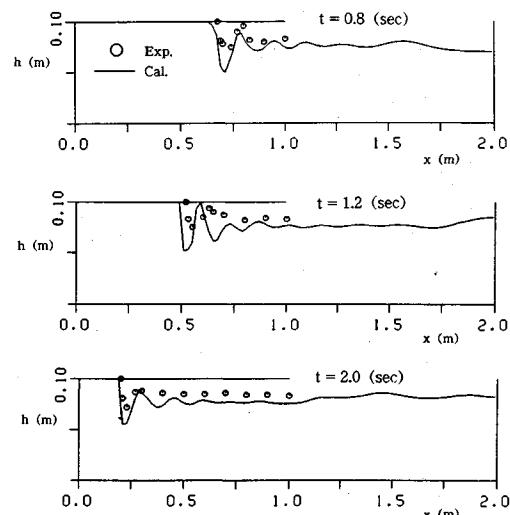


Fig.19 Calculated results with vertical acceleration term attenuated by dumping function ($hr=7$ (cm))

を付加した。これは、通常 Boussinesq 方程式と呼ばれている。

(1) 鉛直加速度項の離散化と計算結果

式(26)は通常 $\frac{1}{3}h^2 \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2}$ とおいて離散化されており¹¹⁾, 本研究でも次のように離散化した $\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3}h^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} \right) \right)$ を離散化した結果とほとんど差異のないことを確かめている).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} \right) \div \frac{(h_i^{n+1})^2}{3} \left[\frac{Q_{i+1}^{n+1} - 2Q_i^{n+1} + Q_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right. \\ \left. - \frac{Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right] \frac{1}{4t} \dots \dots \dots (27)$$

式(27)には $t=(n+1)\cdot\Delta t$ の水理量 Q_i^{n+1} が含まれているため陰解法となり、連立方程式を解くことによって $t=(n+1)\cdot\Delta t$ の水理量が計算される(式(27)中 $h_i^{n+1} = (h_{i+1/2}^{n+1} + h_{i-1/2}^{n+1})/2$ であり、 $h_{i+1/2}^{n+1}$ は $t=n\cdot\Delta t$ の Q_i^n を用いて陽的に計算される)。

鉛直加速度を考慮して得られた $hr=5\text{(cm)}$ の計算結果が Fig.17 である。境界面近傍の水面形のくびれが若干大きく、また波状段波の部分の適合性も十分ではないが、Fig.15 に示した静水圧分布の結果と比較して水面形の特徴が再現されていると思われる。 $hr=7\text{(cm)}$ の

水面形を Fig.18 に示した。図は $t=0.8(\text{sec})$ の場合であるが、実験結果と比較して水面波の振幅が大きくなり過ぎている。この理由として、水面勾配がある程度大きくなると生じる碎波を解析法に考慮していないことが考えられる。この点を改良するために、次に鉛直加速度項に減衰関数を乗じることにより、碎波の過程をある程度再現する簡便法について考察する。

(2) 減衰関数の導入

波状段波の場合、段波の波速を V 、段波前面の水深を h_0 とすると、 $V/\sqrt{gh_0}$ の値が 1.25 より大きくなると碎波はじめることが知られている¹²⁾。そこで、碎波はじめる時の段波前面の最大水面勾配を $(\partial h/\partial x)_{cr}$ として、計算結果の最大水面勾配 $(\partial h/\partial x)_{max}$ が $(\partial h/\partial x)_{cr}$ より大きい場合、鉛直加速度項の効果を減ずるような減衰関数 f_{dump} を式 (27) に乘じて計算を行った。関数として、試みに最も単純な指數関数式 (28) を用いた。

$$f_{dump} = \exp\left[-\beta\left(\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{max} - \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{cr}\right)\right], \quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{max} \geq \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{cr} \text{ のとき}$$

$$= 1.0, \quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{max} < \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{cr} \text{ のとき}$$
(28)

ただし、波状段波および跳水の水面形特性量を、基礎式の基本解（孤立波解とクノイド波解）を用いて表すモデルが提案されており^{13), 14)}、 $(\partial h/\partial x)_{cr}$ の値はこのモデルを用いて、Appendix A に示したように、 $(\partial h/\partial x)_{cr}=0.225$ とした。また、定数 β は試行錯誤的に 0.5 とした。

Fig.19 は $hr=7(\text{cm})$ の場合の鉛直加速度項に減衰関数を乗じた計算結果であり、関数を乗じない場合 (Fig.18) と比較して、実験結果とある程度適合している。

7. 結 語

本研究は、管路・開水路流れ境界面の伝播を伴う非定常流の解析法について、基本的な現象を例として取り上げ、考察したものである。得られた成果を箇条書きにして要約すれば次のようになる。

- 1) 流れを管路、開水路および境界面の三領域に分割し、各領域の流れの計算法を示すとともに、境界面位置を追跡しながら全体の流れを解析する基本的な方法を示した。
- 2) 解析法を、満水の管路への空気泡の浸入現象に適用し、実験結果および Benjamin より Wilkinson の理論と比較し、検討した。その結果、下流水深が小さく境界面に追随する段波が生じない場合には、計算結果は実験結果および理論と適合した。しかし、下流水深が大きく段波が生じるとき、境界面近傍の波状またはくびれた水面形が十分再現できなかった。
- 3) 境界面近傍の水面形が再現できない理由として、圧

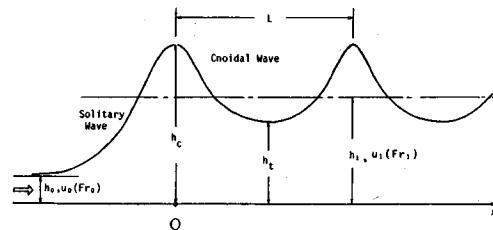


Fig.A-1 Free surface profile composed of solitary wave and cnoidal wave

力が静水圧分布とかなり異なっていることが考えられ、圧力分布に鉛直加速度の効果を考慮することで解析法を改良した。その結果、境界面近傍で天端から管高さの約半分まで急激に減少する水面形がほぼ再現された。また、境界面に追随する波状の段波も、形状の適合性は十分でないものの計算結果に再現されている。

4) ただし、水面勾配の増加に伴う波状段波の碎波過程が解析法に考慮されていないため、下流水深が増加するとき波状段波の振幅が過大になった。そこで、鉛直加速度項に減衰関数を乗じて碎波過程を再現する簡便法を示し、実験結果とある程度適合する結果を得た。

今後、本研究で考察した基本的な解析法を、立坑を有する管路系のサーボング現象など実際的な現象に適用し、実用性を検討したい。

Appendix A

孤立波とクノイド波を接続することにより波状段波（あるいは波状跳水）の水面形を構成するモデル¹³⁾を用いて $(\partial h/\partial x)_{cr}$ を算定する方法について説明する。

波状段波とともに移動する座標系において、Fig.A-1 のように孤立波とクノイド波を用いて水面形を構成することが考えられた。ただし、両者の接続条件として上流無限遠の水深 h_0 とクノイド波の領域の平均水深 h_1 が共役関係式 (A.1) を満たすという条件が用いられる。

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{\sqrt{1+8Fr_0^2}-1}{2} \quad \dots \quad (\text{A.1})$$

孤立波とクノイド波の水面形は各々式 (A.2) と式 (A.3) で表される。

$$h = h_0 + (Fr_0^2 - 1)h_0 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2h_0} \sqrt{\frac{3(Fr_0^2 - 1)}{Fr_0^2}} x \right] \quad \dots \quad (\text{A.2})$$

$$h = h_t + (h_c - h_t) \operatorname{cn}^2(x/\Delta, k) \quad \dots \quad (\text{A.3})$$

ここに、 cn は Jacobi の楕円関数であり、 Fr_0^2 、 Δ および k は次式で定義される。

$$Fr_0 = \frac{V}{\sqrt{gh_0}}, \quad \Delta = \frac{2h_0}{\sqrt{3\left(1 - \frac{h_0}{Fr_0^2 h_t}\right)}}, \quad k^2 = \frac{Fr_0^2 - h_t/h_0}{Fr_0^2 - h_0/h_t}$$

接続条件式 (A.1) を用いて Fig.A-1 に示した波状段

波の特性量が次のように導かれた。

$$\frac{h_c}{h_0} = Fr_0^2, \quad \frac{L}{h_0} = \frac{4F_1(\pi/2, k)}{\sqrt{3\left(1 - \frac{h_0}{Fr_0^2 h_i}\right)}}$$

$$\frac{h_t}{h_0} = 2 \frac{F_1(\pi/2, k) - E_1(\pi/2, k)}{F_1(\pi/2, k)(\sqrt{1+8Fr_0^2}-1) - 2Fr_0^2 E_1(\pi/2, k)}$$

ここに, $F_1(\pi/2, k)$, $E_1(\pi/2, k)$ はそれぞれ第一種, 第二種の完全積分を表わす。

$(\partial h/\partial x)_{cr}$ を求めるために式 (A.2) の一階および二階導関数を求めれば次式となる。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = B \operatorname{sech}^2(Ax) \tanh(Ax) \quad \dots \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = AB \operatorname{sech}^2(Ax) [\operatorname{sech}^2(Ax) - 2 \tanh^2(Ax)] \quad \dots \quad (\text{A.5})$$

ここに, A , B は次式で定義される。

$$A \equiv \frac{1}{2h_0} \sqrt{\frac{3(Fr_0^2 - 1)}{Fr_0^2}}, \quad B \equiv -(Fr_0^2 - 1) \sqrt{\frac{3(Fr_0^2 - 1)}{Fr_0^2}}$$

$\partial h/\partial x$ の極値は $\partial^2 h/\partial x^2 = 0$ となる x すなわち

$$x = \ln(2 \pm \sqrt{3})/(2A) \quad \dots \quad (\text{A.6})$$

を式 (A.4) に代入して次式で表される。

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{cr} = B \frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{3-\sqrt{3}} \quad \dots \quad (\text{A.7})$$

式 (A.7) に碎波のはじまる $Fr_0 = 1.25$ を代入すると

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{cr} \approx 0.225 \quad \dots \quad (\text{A.8})$$

が得られる。

参考文献

- 1) Hayashi, T. : Simplified solution of surging at the surge chamber at the initially full-flowing tail-race tunnel due to load decrease, 土木学会論文集, 第 71 号, pp.1~6, 1960.
- 2) Benjamin, T.B. : Gravity current and related phenomena, J. Fluid Mech., Vol.31, pp.209~248, 1968.
- 3) Wilkinson, D.L. : Motion of air cavities in long horizontal ducts, J. Fluid Mech., Vol.118, pp.109~122, 1982.
- 4) Song, C.C.S., Cardle, J.A. and Leung, K.S. : Transient mixed-flow models for storm sewers, J. Hydraulic Eng., ASCE, Vol.109, No.11, pp.1487~1504, 1983.
- 5) Gardner, G.C. and Crow, I.G. : The motion of large bubbles in horizontal channels, J. Fluid Mech., Vol.43, part 2, pp.247~256, 1970.
- 6) Harten, A. : High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, J. Computational Physics, Vol.49, pp.375~393, 1983.
- 7) Hirt, C.W. and Cook, J.L. : Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain, J. Computational Physics, Vol.10, pp.324~340, 1972.
- 8) 井上和也 : 開水路非定常流の数値計算法とその水工学への応用に関する研究, 京都大学学位論文, 1986.
- 9) Forchheimer, P. : Hydraulik, Teubner, Leipzig, 1930.
- 10) Iwasa, Y. : Analytical considerations on cnoidal and solitary waves, Memoirs Fac. of Eng., Kyoto Univ., Vol.17, No.4, pp.264~276, 1955.
- 11) Peregrine, D.H. : Calculation of the development of an undular bore, J. Fluid Mech., Vol.25, pp.321~330, 1966.
- 12) Sandover, J.A. and Zienkiewicz : Experiments on surge waves, Water Power, Nov., pp.418~424, 1957.
- 13) Iwasa, Y. : Undular jump and its limiting conditions for existence, Proc. 5th Japan National Congress for Applied Mech., pp.315~319, 1955.
- 14) 細田 尚・多田彰秀 : 鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析, 水工学論文集, 第 38 卷, pp.457~462, 1994.

(1994.3.10 受付)

HYDRAULIC ANALYSIS OF UNSTEADY FLOWS WITH PROPAGATION OF AN INTERFACE BETWEEN FREE SURFACE FLOW AND PRESSURIZED FLOW

Takashi HOSODA, Akihide TADA, Kazuya INOUE and Masahiro KITAHARA

The hydraulic transient with the propagation of an interface between open channel free surface flow and pressurized pipe flow is investigated numerically. The fundamental numerical simulation model is firstly described by means of the control volume method. Then, the simulation model is applied to the intrusion process of an air cavity into a horizontal duct, which was studied theoretically by Benjamin. The calculation is carried out under the hydraulic conditions of laboratory tests. It is pointed out through the comparison between the calculated results and the laboratory tests that the effects of vertical acceleration for the pressure distribution should be included in the momentum equation of open channel flow to reproduce the free surface profile near an moving interface and the following undular bore.