

# 樹木群を有する河道流れの境界せん断力の特性と境界混合係数 $f$ の評価

渡辺明英\*・福岡捷二\*\*

洪水解析に河川の適正な管理を目指して準二次元解析が用いられることが多い。この解析で用いている境界混合係数は、物理的考察から求められている。本文では、樹木群を有する河道における流れ場を平均場と変動モードに分解して解析することにより、浅水方程式の解で大規模水平渦によって生じている樹木群境界せん断力を求められることを示している。変動場の特性と境界混合係数が定まる機構を明確にし  $f$  の値の理論式を導いている。この式が福岡・藤田の実験結果をよく説明することを示している。

**Key Words** : boundary mixing coefficient, horizontal large eddies, river flow, vegetated area, two-dimensional shallow water analysis

## 1. 緒言

低水路河岸沿いに樹木が繁茂している河道では、洪水時に樹木群と流れの間で大規模な水平混合が生じている。このとき、樹木が多少水没した状態までは流れ場は全体として平面二次元流れで表現できることが明らかにされた<sup>1)~3)</sup>。一方、樹木が存在しない複断面河道の低水路近傍ではその幾何形状により鉛直方向に特性の異なる三次元的な流れ場になる。したがって、複断面河道に単純に水深平均された水理量を用いて平面二次元解析法を適用すると、河岸近傍での精度は著しく低くなる。このことが、樹木群のある複断面河道流れと単なる複断面河道流れの構造の違いである<sup>3)</sup>。しかし、複断面河道において低水路河岸付近の局所的な細かい流れの構造にとらわれなければ、河道全体の流れは平面二次元流れで近似して良く、この意味で平面二次元解析法が適用できる。

河道には樹木が育成しており、これらの樹木を考慮に入れた合理的な河道計画が求められている。樹木の繁茂形態は多様であるため、樹木が引き起こす水理現象の本質的な部分を解析の中に出来るだけ簡潔に表すことにより水理現象を説明し、河道計画に取り込むことが基本的に重要である。このため福岡・藤田<sup>4),5)</sup>は、①樹木群が存在する河道において樹木群内を死水域として扱い、大規模水平混合による樹木群境界でのせん断力を境界混合係数<sup>3)</sup>  $f$  で評価し、大型水理模型実験によって  $f$  の特性を明らかにし、②この  $f$  を用いた準二次元解析を行い、流速横断分布と縦断水位の計算法を提案し、これらが実河川の現象を良く説明することを示した<sup>6)</sup>。樹木が河道内部にある場合について、 $f$  は次式で与えられている<sup>4)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} f &= 0.072 \frac{K\sqrt{h}}{\bar{u}\sqrt{b'}} \quad \left( \frac{K\sqrt{h}}{\bar{u}\sqrt{b'}} \leq 0.4 \right) \\ f &= 0.029 \frac{K\sqrt{h}}{\bar{u}\sqrt{b'}} + 0.017 \quad \left( \frac{K\sqrt{h}}{\bar{u}\sqrt{b'}} > 0.4 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$f = \tau_s / \{ \rho (\Delta u)^2 \} \dots\dots\dots (2)$$

$K$  : 樹木群内部の透過係数<sup>1),3),4)</sup>,  $h$  : 水深,  $\bar{u}$  : 樹木群外の平均流速,  $b'$  : 樹木群幅,  $\tau_s$  : 境界せん断力,  $\rho$  : 水の密度,  $\Delta u$  : 樹木群内外の流速差  
式(1)の  $f$  値は水平混合現象を支配する流れに関する考察と実験結果に基づいて決められたものである。実河川に適用した結果、式(1)は十分な適用性を持っている<sup>4),6)</sup>。樹木群から発生する平面渦による河道流れの大規模混合が最近明らかになり、平面二次元流解析<sup>1)~3)</sup>によって現象の説明がなされている。二次元解析法を適用し、準二次元解析に導入された式(1)の物理的な意味とその表現を詳細に検討することは準二次元解析の応用範囲の拡張および学術上からも意義がある。

本研究では樹木群の境界混合係数  $f$  を理論的に検討し、一般的な表現を得ようとしている。平面二次元流解析法<sup>1)~3)</sup>を用いて境界混合係数  $f$  の値を算定し、これと福岡・藤田の  $f$  の実験値<sup>4),5)</sup>と比較する。流速変動、水位変動に対して考察を加え、 $f$  値の決定機構を考察するとともに  $f$  値の一般式を導く。この式と式(1)を比較し、式(1)の物理的な意味と適合性の評価を行う。これにより、河道計画及び樹木管理に用いられている準二次元解析法<sup>8),9)</sup>の物理的妥当性を確かめる。

注) 境界混合係数は、池田ら<sup>6)</sup>や辻本ら<sup>7)</sup>も流速横断分布を表すための渦動粘性係数に使う混合係数として用いている。しかし、これらは、本文で対象とする河道の流下能力に関わる樹木の境界せん断力を評価したものではなく、植生が河道内部にある場合について取り扱っておらず、 $f$  値を決定する物理機構について言及していない。

\* 正会員 工博 建設省土木研究所主任研究員 河川部河川研究室 (〒305 茨城県つくば市大字旭一番地)

\*\* 正会員 工博 Ph.D 広島大学教授 工学部第4類 (建設系)

## 2. 解析方法

### (1) 解析の考え方

樹木群が引き起こす流れの大規模水平混合を浅水流方程式を解いて求める。浅水流方程式で解が得られる理由は、以下のように考えられる。

開水路における流体混合は、スケールによって大きく3つに分けられる。第1は、底面抵抗に起因する水深よりも小さいスケールの3次元混合である。第2は、水深スケールの混合であり、二次流によって起こる鉛直面内の混合である。第3は、本文で対象とする大規模水平渦による混合で、現象の規模は水深よりも十分大きい。これらの変動の空間スケールは変動の周期に対応している。河道内に樹木群がある場合に生じる混合現象は、水平渦による2次元の大規模渦混合と底面抵抗による3次元の小規模混合である。これらの空間と時間のスケールは2オーダー程度違うので、大規模平面渦に着目する場合には底面乱れによる影響は渦動粘性係数として扱うのが一般的である。このため、平面二次元解析では、底面の抵抗に基づく乱れの影響は、渦動粘性係数の形で表される。

浅水流では重力による力と底面の抵抗力が主要な釣合関係を構成する。樹木群が水路中央にある場合の実験解析によれば水平混合に起因する抵抗は、全体の力の2~4割の大きさを占め、この内の多くは大規模渦によって生じている。すなわち、水平混合が活発な状態では小規模混合の影響は小さい。このことは、渦動粘性係数は大きさのorderが正しければ十分であることを意味する。したがって、樹木群の抵抗を浅水流方程式の中に取り込むことにより、樹木に引き起こされる水平混合が求まる。

### (2) 基礎方程式

本研究を議論する上で基礎方程式は重要であるのでここにもう一度記す<sup>1)</sup>。用いる基礎方程式は水深平均された運動方程式(3)と連続式(4)である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g \left( I_i + \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) - \frac{\tau_i}{h_0} - \frac{g}{K^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \nu_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u_j (h_0 + \eta)}{\partial x_j} = 0, \quad (i, j=1, 2) \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 $x_1$ : 流下方向の座標 ( $x$ ),  $x_2$ : 横断方向の座標 ( $y$ ),  $u_1$ :  $x$  方向の水深平均流速 ( $u$ ),  $u_2$ :  $y$  方向の水深平均流速 ( $v$ ),  $\eta$ : 水位変動量,  $h_0$ : 断面平均水深,  $g$ : 重力加速度,  $I_i$ :  $x_i$  方向の河床勾配,  $\tau_i$ :  $x_i$  方向の底面せん断力,  $\nu_i$ : 底面乱れによる渦動粘性係数 ( $\kappa u_* h_0 / 6$ ,  $\kappa$ : カルマン定数,  $u_*$ : 摩擦速度),  $t$ : 時間である。境界条件には側壁上でスリップ条件を適用し、底面せん断力は粗度係数  $n$  を用いて表す。

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0, \quad u_2 = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = 0, \quad \tau_i = \frac{g n^2}{h_0^{1/3}} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} u_i$$

流速と水位の時空間変動は、式(5), (6)のように各波数モードの重ね合わせで近似して表す。

$$u_i(t, y) = u_{i0}(t, y) + \sum \{ u_{im1}(t, y) \cos k_m x_c + u_{im2}(t, y) \sin k_m x_c \} \dots \dots \dots (5)$$

$$\eta(t, y) = \eta_0(t, y) + \sum \{ \eta_{m1}(t, y) \cos k_m x_c + \eta_{m2}(t, y) \sin k_m x_c \} \dots \dots \dots (6)$$

$x_c = x - ct$ ,  $c$ : 系の波速

ここに、下付き記号0は  $x$  方向の空間平均値を、下付き記号  $m_1, m_2$  は、波数  $k_m$  に対する余弦成分、正弦成分の振幅を、 $m$  はモードの次数を表す。式(5), (6)を式(3), (4)に代入し、モードの最大次数を  $m_{max}$  とすると式(7), (8)が得られる。非線形項はAppendixの式(A.1), (A.2)に示す通りである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{imn}}{\partial t} = & -(u_{i0} - c) (u_{imn})' - u_{20} \frac{\partial u_{imn}}{\partial x_2} - u_{jmn} \frac{\partial u_{i0}}{\partial x_j} \\ & - g \left( \delta_{i1} (\eta_{mn})' + \delta_{i2} \frac{\partial \eta_{mn}}{\partial x_2} \right) - \left( u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{mn} \\ & - \sqrt{u_{j0}^2 + \sum (u_{jm1}^2 + u_{jm2}^2)} / 2 \frac{u_{imn}}{h_0} \left( \frac{g n^2}{h_0^{1/3}} + \frac{g h_0}{K^2} \right) \\ & + \nu_i \left\{ (1 + \delta_{i1}) (u_{imn})'' + \frac{\partial (u_{imn})'}{\partial x_2} \right. \\ & \left. + (1 + \delta_{i2}) \frac{\partial u_{imn}}{\partial x_2^2} \right\} \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_{mn}}{\partial t} = & -(u_{10} - c) (\eta_{mn})' - u_{20} \frac{\partial \eta_{mn}}{\partial x_2} \\ & - (h_0 + \eta_0) \frac{\partial u_{j0}}{\partial x_j} - \left( \eta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)_{mn} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

( $j, j=1, 2, n=1, 2, m=0, 1, \dots, m_{max}$ , ただし、 $m=0$ の場合には  $n$  はなし)

ここに、(a)'は  $x$  方向の微分を表し、

$$(a_0)' = 0, \quad (a_{m1})' = -k_m a_{m2}, \quad (a_{m2})' = k_m a_{m1},$$

$$(a_{mn})'' = -k_m^2 a_{mn}$$

である。

式(7), (8)は横断方向一次元の非定常方程式である。これらを差分化して時間積分すると解が得られる。横断方向の差分は、基本的に2次の精度である。ただし、樹木群境界近傍では平均流速、流速変動・水位変動の大きさが急変する。これらの時間変化を精度良く、かつ安定に求めるために、4次の風上粘性項として河村・桑原スキームの人工散逸項を用いている。時間積分は4次のルンゲ・クッタ法で行う。本文で用いるモデルは、既報の2次の波数までのもの<sup>1)-3)</sup>を高波数領域まで取ったものである。差分では、 $u, \eta$  と  $v$  の計算点を交互に配置し、さらにそれぞれの平均量と変動量の計算点も交互に配置

表-1 解析に用いた水理条件

Run A No.	樹木群水路中央, 水深4.6cm				
水路幅 B (m)	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0
樹木幅 b (m)	0.03	0.15	0.30	0.62	1.24
透過係数 K (m/s)	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38

Run B No.	樹木群水路片側, 水深6cm						
水路幅 B (m)	2.0	2.0	2.0	2.0	4.0	4.0	4.0
樹木幅 b (m)	0.3	0.6	0.9	1.2	0.6	1.2	1.8
透過係数 K (m/s)	0.38	0.38	0.38	0.38	0.96	0.96	0.96

して、解析モデルの計算安定性を高めている。

式(7)、(8)の解として、流速  $u_1$ 、 $u_2$  と水位  $\eta$  の流下方向平均値と各波数成分について平均値からの偏倚量、相対位相差及び系の波速  $c$  が得られる。波数成分の解の位相を時間的に停留させる座標系の移動速度を求め、これを波速としている。この様に得られる波速(位相速度)を時間積分したものが、波形の流下距離である。

### 3. 樹木群近傍の流れ場と境界せん断力

準2次元解析に用いられている樹木群と流れの間の境界混合係数  $f$  を平面二次元流の数値解析法を適用して理論的に求め、これと福岡・藤田<sup>4),5)</sup>の  $f$  の実験値を比較する。ここで対象とする場合は、矩形断面の水路に樹木が片側もしくは中央にある場合である。表-1に検討に用いた水理条件を示す。

既報<sup>1)</sup>では、実験時の流速変動をスペクトル解析して変動モードの次数を2次まで選び、平面流解析した。1次モードの波数を水平混合のスケールよりも小さく取ると、2次までのモードでは解析の精度は不十分である<sup>1)-3)</sup>。先の解析では、卓越波数帯の最大波数と最小波数の比は、2~3である<sup>1),2)</sup>。また、卓越波数帯のうち最大波数の2倍程度まで波数を取れば十分な解が求められている。したがって、最低6次までとれば卓越波数帯をまたがって計算できる。最小波数と次数を種々変えて計算した結果、最小波数を適切に選び、変動モードを6~8次までとすると十分な解が得られることが分かった。

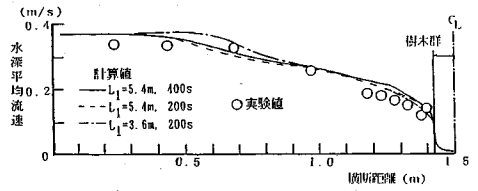
本節では、変動の展開モードを主に6次まで選んで解析を行い、流速分布とこれより求められる  $f$ 、並びに境界面でのせん断力を中心に検討した結果を述べる。

#### (1) 福岡・藤田の $f$ の算定方法

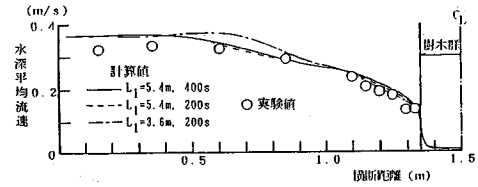
準2次元解析の枠組では、樹木群に作用するせん断抵抗を境界混合係数を用いて表している。樹木群の境界混合係数  $f$  は、福岡・藤田(方法2)<sup>4)</sup>によって、

$$f = \left( ghI - \frac{1}{\Delta B} \int_0^{\Delta B} \frac{qn^2}{h^{1/3}} u^2 dy \right) / (\Delta u)^2 \dots \dots \dots (9)$$

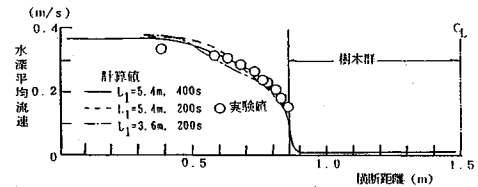
$\Delta u = u_{\max} - u_{\min}$ ,  $\Delta B = B - b'$ ,  $u_{\max}$ : 樹木群外の最大流速,  $u_{\min}$ : 樹木群内の最小流速



(a) Run A-2



(b) Run A-3



(c) Run A-5

図-1 水深平均流速分布(樹木群が水路中央の場合)

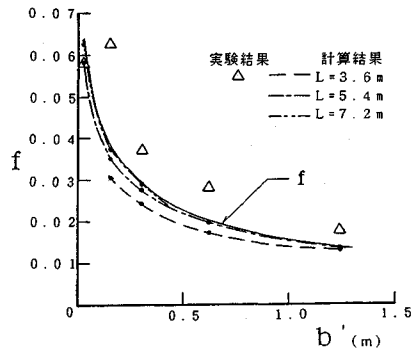


図-2 樹木が中央にある場合の境界混合係数

で与えられている。式(9)は、水深平均流速の横断分布から推定した全底面摩擦力と重力に起因する力の差が樹木群境界に作用するせん断力であるという考えのもとに導かれたもので、これを流速差  $\Delta u$  の2乗で除して  $f$  の形で表したものである。以下では、式(9)に基づいて求められた  $f$  を用いている。

#### (2) 樹木が水路中央にある場合

水路中央に樹木を配置した場合の平均流速分布の計算結果と実験結果を図-1に示す。これより、ある波数帯の渦によって作られる水深平均流速の横断分布は十分時間が経過した後では、大きく異なることはなく、いずれも実験結果を説明している。平面流解析の流速分布から得られる境界混合係数と実験値<sup>4),5)</sup>の比較を図-2に示す。これは、各樹木幅に対して1次モードの波長を  $L = 3.6, 5.4, 7.2, 9.0$  mと変化させ、ほぼ平衡に達した時の流速分布から式(9)に基づいて求めたものである。

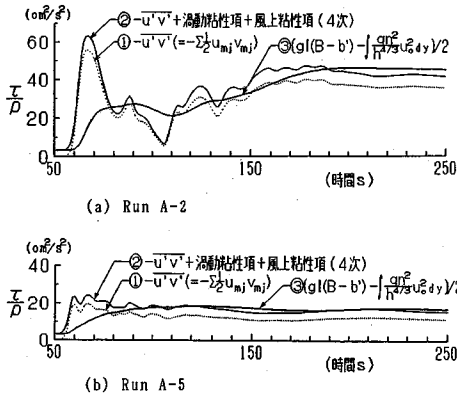


図-3 樹木群境界の境界せん断力の時間変化

実線は、各樹木幅・各波長に対する  $f$  の値の最大値の包絡線であり、これが各樹木幅に対する  $f$  の値である。図中の3つの線より樹木幅によって  $f$  が最大となる波長が異なっている。樹木群幅の違いによる境界混合係数の変化が浅水流解析によって説明されている。解析値と実験値のズレは、実験の流速・水深データの横断積分値が、流量の値よりも1~2割小さいためである。

Run A-2,5 を例にとり、①レイノルズ応力、②レイノルズ応力と渦動粘性・風上粘性による応力の和、③流速分布形から定まる境界せん断力の時間変化を図-3に示す。境界せん断力が、時間に関して一定になれば流れは平衡状態にあると解釈できる。平衡時の③を流速差  $\Delta u$  の2乗で除したものが先に示した  $f$  の値である。図-3(a)に示される様に、境界せん断力が大きい場合には、最終状態の流速分布から定まる境界せん断力③と解析から定まる応力②の間に差が生じている。これは、平均流速分布から底面せん断力を求める場合には、流速変動による底面せん断力の増分を加えておらず、その分だけ境界せん断力を大きく見積もっているためである。 $f$  の定義式(9)には、境界せん断力だけでなく、この様な流速変動による底面せん断力が含まれている。

### (3) 樹木が水路片側にある場合

樹木が片側にある場合の水深平均流速分布の解析結果を図-4に、これより得られる境界混合係数と実験値の比較を図-5に示す。図-4より、水深平均流速の横断分布は時間や波数に依存せずに決まった形をとる。図-5は、図-2と同様に、1次モードの波長を  $L=3.6, 4.5, 5.4, 7.2, 9.0$  m に選び、各波長毎に得られた  $f$  のグラフを作成し、樹木群幅  $b'$  に対する  $f$  の最大値の包絡線として表している。樹木群幅  $b'$  や透過係数  $K$  の違いに対して、 $f$  の解析結果は実験結果を説明している。これより、透過係数が大きいと  $f$  が大きくなり、樹木群が中央にある場合と逆に幅が狭いと  $f$  の値は小さい。

樹木群が片側にある場合に、幅が狭いと  $f$  の値が小さくなる理由を考察する。平面渦のスケールが大きいと流

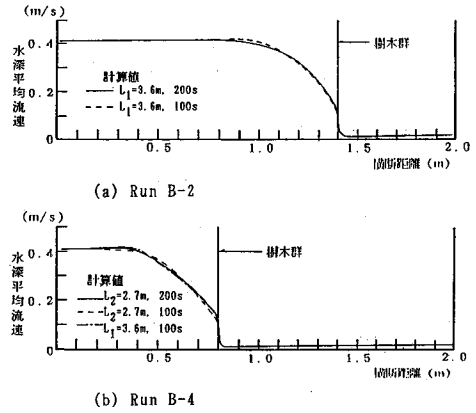


図-4 水深平均流速分布 (樹木群が水路片側の場合)

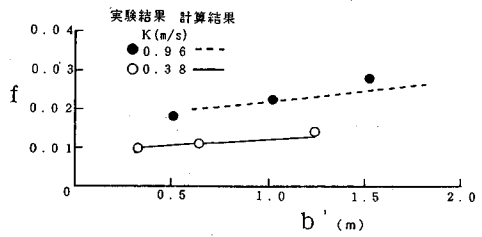


図-5 樹木群が片側にある場合の境界混合係数

速変動が大きくなり、境界せん断力は大きくなる傾向がある。しかし、透過係数や粗度係数、フルード数等の特性から定まる卓越流れのスケールが樹木幅や水路幅よりも大きいと大きな混合場となり得ず、小さな渦が混在する流れ場となる。そのため、大きなせん断力は現れにくい。5.で後述する様に、樹木幅が広い場合には低周波モードが卓越して安定した状態が得られるのに対し、樹木幅が狭い場合には平均流速分布やせん断力がほぼ一定になっても種々の変動モードが混在し、渦構造は安定しない。このような場合には、変動成分の全てがせん断力を生み出すことにはならないと考えられる。これらの理由から、樹木幅が狭いと  $f$  の値が小さくなると考えられる。

## 4. $f$ の決定機構

前述の様に樹木群が片側にあると、変動場が複雑になり、樹木幅や水路幅が狭くなるにつれて  $f$  の値が減少する。そのため、この減少量を解析的に陽形で求めることは難しい。この  $f$  の減少量は解析及び実験<sup>4)</sup>から樹木幅が広い場合の  $f$  の値の  $1/3 \sim 1/2$  程度である。樹木が片側にある場合には、幅広の水路での  $f$  値で代表し、幅の違いによる  $f$  値の減少割合は経験的に決めざるを得ない<sup>4)</sup>。また、幅の十分広い樹木群が片側に配置された場合の  $f$  値は幅広の樹木群が中央におかれた場合と同程度の値となっている。したがって、樹木群が水路の片側にある場合には、河道中央部に幅広の樹木がある場合の  $f$

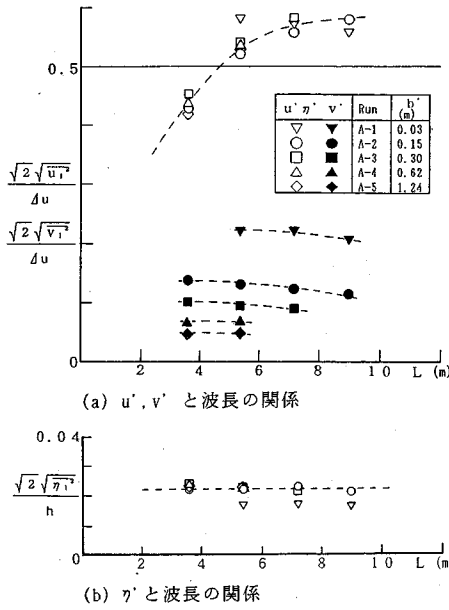


図-6 境界での1次モードの変動量の大きさ

値や水平せん断混合流れの実験から得られている  $f$  値等を基準値に選び、減少率は実験曲線を参考に決める。

次に、樹木群が水路中央部にある場合について、 $f$  の値を流速場の特性から検討し、 $f$  の一般的な表現を得る。

(1) 樹木境界近傍の流速変動と境界混合係数の関係

5. で示す様に樹木群に作用するせん断力は、樹木群近傍の1次モードのレイノルズ応力で代表される。境界近傍では1次モードの流速変動  $u'_1$  と  $v'_1$  は、位相がほぼ  $\pi$  ずれているため<sup>1)</sup>、レイノルズ応力は  $u'_1$  と  $v'_1$  の積で表される。各樹木幅について1次モードの波長を変えて求めた  $u'$ 、 $v'$ 、 $\eta'$  の樹木群近傍の値を図-6に示す。ここで、各変動量  $u'$ 、 $v'$ 、 $\eta'$  は、変動量の2乗平均値を  $\sqrt{2}$  倍して正弦波形の振幅として表した量である。この図より、 $u'$  の値は樹木幅に対してほとんど変化しない。波長が長くなると  $u'$  は大きくなり、ある波長以上では一定値に近づく。一方、 $v'$  の値は樹木幅が広くなると小さくなり、波長が長くなるとやや小さくなる。

$u'$  と  $v'$  の積は図-6に示した波長の範囲のどこかでピークを持ち、卓越する流れ場の波長が定まる<sup>1),2)</sup>。この最大せん断力に対応する  $f$  が流れ場の  $f$  であると考えられる<sup>1),3)</sup>。  $u'/\Delta u$  の値は (0.5~0.6) であり、これに  $v'/\Delta u$  をかけて2で除したものが  $f$  である。すなわち、

$$f = \frac{\tau_s/\rho}{(\Delta u)^2} \cong \frac{u'v'}{2(\Delta u)^2} = (0.25 \sim 0.3) \frac{v'}{\Delta u} \dots \dots \dots (10)$$

と表される。したがって、 $v'/\Delta u$  の値が定まれば  $f$  が定まる。以下では、この  $v'/\Delta u$  について述べる。

(2)  $v'/\Delta u$  を規定する水位変動の機構

$v'/\Delta u$  は樹木を通過する横断方向の流れの強さを表す無次元量であるから、これを規定する無次元量は  $\eta'/h$ 、

$b'/h$ 、 $K/\Delta u$  などである。これらの量のうち、所与の条件として与えることができない量は  $\eta'/h$  である。そこで、水位変動の特性を検討することによって  $\eta'/h$  を支配する物理量を明らかにする。

水位変動量  $\eta'/h$  は、図-6 (b) に示すように Run A-1 を除けば、波長・樹木群幅に依らずにほぼ一定になっている。Run A-1 が他の場合と異なるのは、樹木幅が狭いため樹木内の流速が大きくなり、流速差  $\Delta u$  が小さくなっているためである。水位変動を起こす主力は式 (7)、(8) の order 解析から、 $(c-u) \cdot k_1 u'_1$ 、 $(v'_1 \partial u'_2 / \partial y)$ 、 $k_m u'_1 u'_2$  などの慣性項であり、抵抗項は二次的なものである。主要な慣性項を無次元化すると、

$$\frac{(c-u)k_1 u'_1}{gk_1 h} = \frac{(\Delta u)^2}{gh} \cdot \frac{(c-u)}{\Delta u} \cdot \frac{u'_1}{\Delta u'}$$

$$\frac{k_m u'_1 u'_2}{gk_1 h} = \frac{(\Delta u)^2}{gh} \frac{k_m u'_1 u'_2}{k_1 (\Delta u)^2} \quad (m=1, 2),$$

$$\frac{v'_1}{gk_1 h} \cdot \frac{\partial u'_2}{\partial y} = \frac{(\Delta u)^2}{gh} \cdot \frac{v'_1}{\Delta u} \cdot \frac{\partial (u'_2/\Delta u)}{k_1 \partial y}$$

となる。

横断方向の微分値の無次元化を以下のように行う。混合現象はマクロにみると拡散現象として扱える。マクロにみた場合の水平拡散係数は、

$$\varepsilon_{t(\text{macro})} \propto f \Delta L \Delta L$$

である。ここで、 $\Delta L$  は拡散 (混合) の幅を表す長さのスケールである。流速分布や境界せん断力が平衡状態にある場合には、 $\Delta L$  の表現が閉じなければならないから

$$\Delta L \propto \sqrt{\varepsilon_{t(\text{macro})} h / \{ (gn^2/h^{1/3}) \Delta u \}}$$

の関係を満たす必要がある<sup>4)</sup>。これより、

$$\Delta L \propto fh / (gn^2/h^{1/3})$$

と表される。ここで、粗度係数を一定におき、比例係数をまとめて  $\gamma (\propto h^{1/3}/gn^2)$  として、横断方向の長さを無次元化する代表スケール  $\Delta L$  を  $\gamma fh$  で表す。平衡時の  $f$  は  $(u'v'/\Delta u^2)$  に比例する量であるから、

$$\frac{v'_1}{\Delta u k_1} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \propto \frac{v'_1}{\Delta u} \cdot \frac{1}{\gamma f k_1 h} \cdot \frac{\partial}{\partial (y/\gamma fh)} \propto \frac{\Delta u / u'_1}{\gamma k_1 h} \cdot \frac{\partial}{\partial (y/\gamma fh)}$$

となる。すなわち、 $v'_1$  と横断方向の微分値の積は、 $v'$  の値に依存せずに定まる量である。

樹木近傍の  $(c-u)$  の値は、流速分布形から求まる量である。流速分布や波速は、平衡状態が得られる波長帯ではほとんど変化しなくなる。したがって、 $(c-u)$  の値は  $\Delta u$  を用いて表される。 $u'_1$  は図-6 (a) で示されたように最大変動時には  $\Delta u$  に比例すると考えて良い。また、 $u'_2$  の大きさは  $u'_1$  の大きさに比例して決まる量でなければならない。さらに、渦運動に伴う流速の変動量は、樹木群外の混合領域全体で見たときに保存されなければならないから、

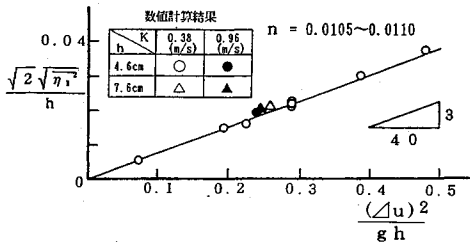


図-7  $(\Delta u)^2/gh$  と  $\eta'/h$  の関係

$$\text{Order} \left[ \bar{v}_1 \frac{\partial}{\partial y} \right] = \text{Order} [k_1 \bar{u}_1] = \text{Order} [k_1 (\bar{u}_0 - c)]$$

でなければならない。

以上より先に挙げた3つの慣性項はいずれも

$$\frac{(c-u)k_1 u_1}{gk_1 h}, \frac{k_m u_1 u_2}{gk_1 h}, \frac{v_1}{gk_1 h} \frac{\partial u_2}{\partial y} \propto \frac{(\Delta u)^2}{gh}$$

の関係に帰着することから、 $\eta'/h$  は  $(\Delta u)^2/gh$  に支配されると考えられる。図-7は、 $(\Delta u)^2/gh$  と  $\eta'/h$  の関係を、粗度係数が一定の場合について数値解析により求めた結果を示す。図-7は、樹木幅や透過係数、流速や水深などに依らずに、 $(\Delta u)^2/gh$  の値がほぼ一意的に決まる機構があることを示している。この機構は流速場の非線形過程に関係している。これより、 $v'/\Delta u$  は、 $b'/h$ 、 $K/\Delta u$ 、 $(\Delta u)^2/gh$  などから決まることになる。

(3)  $f$  の表示式

以上の考察を踏まえて、境界混合係数  $f$  の一般表示式を求める。樹木群内部での力の釣合は式(7)における高次の非線形項を除いた式から与えられるため、 $u_0$ 、 $u'$ 等の横断分布を求めることは可能である。しかし、 $f$ を陽な形で表すことは難しい。したがって、 $f$ の式形を以下の近似を与えて求める。① $u_0$ 、 $u'$ は境界付近で大きく、抵抗を増大させる。しかし、抵抗増大を起こす範囲は樹木幅が狭い場合を除けば樹木幅に比べて十分小さい。②5.で示す様に樹木群内では、水位変動量の横断分布は境界近傍を除きほぼ直線で近似でき、 $v'$ は $y$ 方向に一定とみなすことができる。第一近似として

$$u_0 \cong \text{const.}, u' \cong 0, v' \cong \text{const.}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{-2\eta'}{b'} \quad (\eta': \text{境界部の水位変動量}) \dots \dots \dots (11)$$

を与え、 $u_0$  と  $v'$  を求める。この近似の下で、 $u_0$ 、 $v'$ に関する運動方程式(7)を樹木幅にわたって積分し、樹木幅  $b'$  で除し、さらに式(11)の関係を考慮すると次式が得られる。ただし、底面せん断力は樹木による抵抗よりも小さいものとし、底面の粗度係数が大きい場合には透過係数を全抵抗と等価なもの置き換える。

$$ghI + \frac{2f(\Delta u)^2 h}{b'} \cong \frac{gh}{K^2} \bar{u}_{va} \bar{u}_0 \dots \dots \dots (12)$$

$$v' \cong \frac{K^2}{u_{va}} \frac{2\eta'}{b'} \dots \dots \dots (13)$$

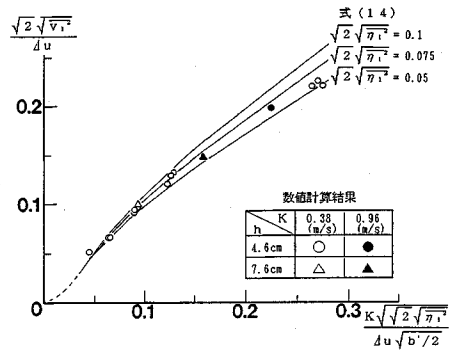


図-8  $(K/u)\sqrt{\eta'/b'}$  と  $v'/\Delta u$  の関係

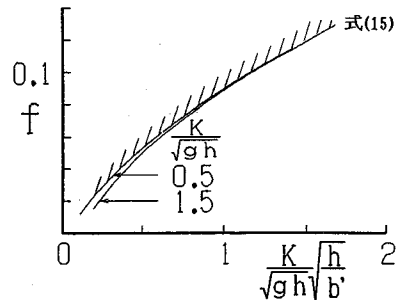


図-9 式(15)による  $f$  の関数形

$$u_{va} \cong \sqrt{\bar{u}_0^2 + v'^2/2}$$

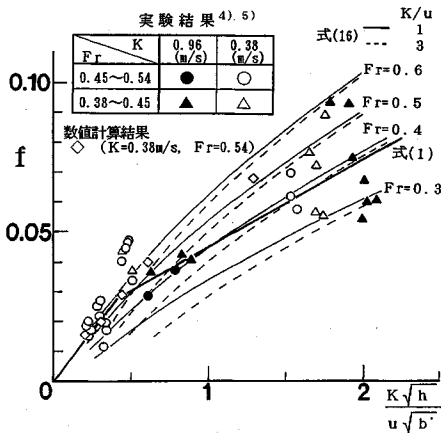
式(12)、(13)から  $v'$  を求めると

$$\frac{v'}{\Delta u} = \frac{K}{\Delta u} \sqrt{\frac{2\eta'}{b'}} \frac{1}{[1/2 + \{b'I/2\eta' + f(\Delta u)^2/gh\}^2]^{1/4}} \dots \dots \dots (14)$$

となる。図-8に式(14)と数値解析結果を示す。樹木幅  $b'$  が広い場合(図-8の横軸の小さい側)には式(14)と数値計算結果はほぼ一致しており、 $v'$  は  $K\sqrt{2\eta'/b'}$  に比例している。一方、樹木幅が狭い場合には、数値計算結果はそのときの水利条件  $\eta' = 0.1 \sim 0.075$  に対応する実線で示された式(14)の値よりも小さくなる。これは、樹木幅が狭いと  $u'$  の変動範囲が樹木群の大半に及び、この影響を無視できなくなり、近似①の近似度が低くなるためである。差が生じた他の要因として水路幅が平衡状態となる混合幅より小さいことが考えられる。しかし、水路幅5mとして解析した結果では、 $u'$ が増大して  $f$  は大きくなるが、 $v'$ 、 $\eta'$  は極く僅かな増分しか認められず、この影響は小さいことが分かった。

図-7に示したように  $(\Delta u)^2/gh$  はおよそ一定値であることから、 $v'/\Delta u$  は最終的に  $K/(\sqrt{gh})\sqrt{2h/b'}$  に比例することになる。以上から、 $f$  の理論上の上限は、

$$f = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \frac{K}{\sqrt{gh}} \sqrt{\frac{2h}{b'}} \frac{1}{\left\{ \frac{1}{2} + \alpha^2 \left( \frac{gb'I}{2(\Delta u)^2} + f \right)^2 \right\}^{1/4}} \dots \dots \dots (15)$$



図一〇 福岡・藤田の $f^{(4),5)}$ と式(16)の比較

$$\alpha = \frac{(\Delta u)^2}{gn'} , \beta = (0.25 \sim 0.30)$$

で表される。水理条件を

$$\frac{u^2}{\Delta u^2} \cong 1, \alpha \cong 13.3, \beta = 0.275, I = 1/1000$$

に選び、式(15)から求まる $f$ を図一〇に示す。これより、 $f$ は $K, h/b'$ の値が大きくなると増大し、その増大の割合は、これらの値が大きくなる程小さくなる。

式(1)の表示形に合わせて式(15)を変形すると、

$$f = \frac{(\beta/\sqrt{\alpha})\sqrt{2}Fr}{\left[ \frac{1}{2} + \alpha^2 \left( \frac{1b'}{2h} \cdot \frac{u^2}{(\Delta u)^2} \cdot \frac{1}{Fr^2} + f \right)^2 \right]^{1/4}} \cdot \frac{K}{u} \sqrt{\frac{h}{b'}} \dots (16)$$

となる。 $Fr, K/u$ をパラメータとして式(16)から求まる $f$ を、 $b'/h$ に対して示したものが図一〇である。

図中に式(1)及び福岡・藤田の実験結果<sup>4),5)</sup>も併せて示す。無次元化に用いた $u$ は実験値には平均流速 $\bar{u}$ 、数値解析と式(16)には最大流速 $u_{max}$ である。解析結果に $u_{max}$ を用いた理由は、 $f$ の値や水路幅によって $\bar{u}$ が異なり、これを用いると解の表現が陽でなくなるためである。図一〇において $K/u\sqrt{h/b'}$ の値が小さいときは最大流速と平均流速はほぼ同じである。しかし、 $K/u\sqrt{h/b'}$ の値が大きいたときは、平均流速は最大流速の0.8~0.9倍の値になるため、横軸の値が1~2割ずれる。

図一〇より、式(16)は $Fr \cong 0.40 \sim 0.55$ の範囲で得られた $f$ の実験値を説明し、式(1)ともよく対応している。ただし、透過係数が大きい場合や樹木幅が狭い場合には、 $u_0, u'$ が近似値よりも大きくなり、横断方向の抵抗が増大し、 $v'$ はここで用いた値よりも小さくなる。このため、 $f$ は式(16)で求めた値よりも小さくなる。

水平混合が激しく、混合が側壁まで及ぶときには、場全体で大きく生じている流速変動 $u'$ が制限を受け、 $f$ の値は小さくなる。このことから、樹木幅が狭い場合や透過係数 $K$ が大きい場合には有効な $\eta'$ が小さくなるため $\alpha$ を1~2割大きくとり、水路幅が狭い場合には $u'$ が小さ

くなるため $\beta$ を1~2割小さくする補正が必要である。

式(16)は実験値のパラッキの範囲内にあり、 $f$ の算定に十分適用可能である。これは、式(1)の物理的意味や適用限界を考える上で重要である。式(16)は、 $f$ 値が $K/u, Fr, h/b'$ の増大と共に大きくなり、 $K$ 値の大きい方が同じ $K/u\sqrt{h/b'}$ に対し $f$ が小さくなる。式(1)は $K$ を $u$ で無次元化しているため、 $f$ を決めるパラメータに流速が含まれて使い難い。表現方法としては、図一〇に示した式(15)が使い易いと思われる。

次に $f$ が粗度係数にどのように関係するかを調べる。これは式(15)の河川への適用を考える時に重要になるからである。水位変動での考察結果を準用すると、

$$\text{Order} \left( v'_i \frac{\partial u'_i}{\partial y} \right) = \text{Order} \left( \frac{u'_i v'_i}{\gamma h} \right) = \text{Order} (k_i u_i'^2)$$

という関係が成立する。流速分布が平衡に達する前は、流速分布から決まる $f$ は小さく、波数は大きい。平衡状態では、 $f$ は $(u'v')/(\Delta u)^2/2$ であること、 $\gamma$ の定義を用いることによって

$$\left( \frac{u'}{\Delta u} \right)^2 \propto \frac{1}{\gamma kh} = \left( \frac{gn^2}{h^{1/3}} \right) \frac{1}{\gamma kh}, \gamma = \gamma' / \left( \frac{gn^2}{h^{1/3}} \right)$$

となる。これを変形すると

$$kh \propto \left( \frac{gh^2}{h^{1/3}} \right) / \left( \frac{u'}{\Delta u} \right)^2$$

で表される。平衡状態では $(u'/\Delta u)$ の値がおおよそ確定する。その値は $gn^2/h^{1/3}$ を $kh$ で除したものに比例するため、 $(gn^2/h^{1/3})/kh$ の値も確定する。すなわち、粗度係数の影響は波長や拡散幅等の基本的な長さスケールの大小に関わるが、この長さスケールを用いて基礎式を無次元化すると、流速変動は粗度係数の値に陽に依存しないで決まる様になる。したがって、 $f$ は粗度係数に大きく依存せずに図一〇の関係から定まるとして良い。

### 5. 混合過程における変動量の波数特性

解析より求められた各変動量の特性を境界せん断力および変動量、せん断力の横断分布から検討する。

#### (1) 樹木群が中央にある場合の境界せん断力

各変動モードごとのレイノルズ応力の時間変化を図一〇に示す。図一〇より、水路中央部に樹木群がある場合には、最終的に低次のモードが卓越してほぼ安定な状態に至る<sup>1),2)</sup>。ただし、高次モードはなくなるわけではなく、境界部のせん断力に寄与していないだけである。また、高次モードがあるために全く安定な流れになるわけではなく、多少時間変動のある流れ場が形成される。

#### (2) 樹木群が片側にある場合の境界せん断力

樹木幅が狭いRun B-2と広いRun B-4の場合の境界面における①レイノルズ応力、②レイノルズ応力と渦動粘性・風上粘性によるせん断応力の和、③平均流速横断分布から求めたせん断応力の時間発達を図一〇に、

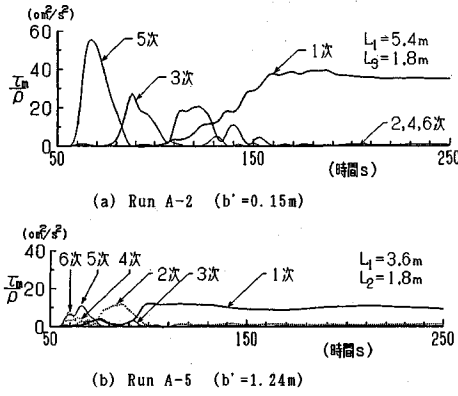


図-11 各波長モードのレイノルズ応力の時間変化

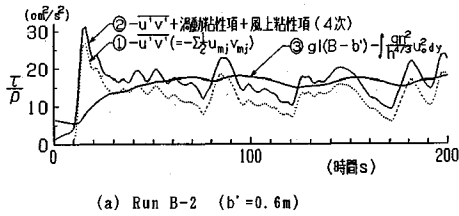


図-12 樹木群境界でのせん断力の時間変化

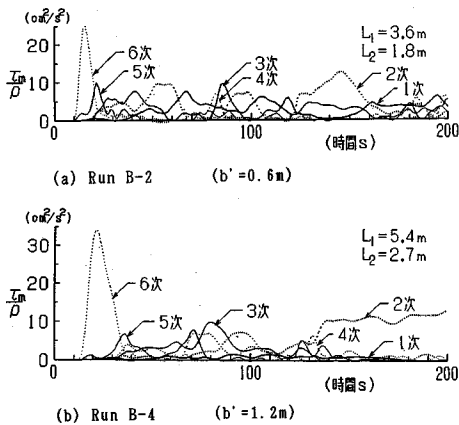


図-13 各波長モードのレイノルズ応力の時間変化

各モードごとのレイノルズ応力の時間変化を図-13に示す。これらの図より、樹木幅が広い場合には最終的に安定するのに対し、幅が狭い場合には1~4次の変動モードが時間的に交代する。幅が狭いと大きな構造で安定できなくなり、短い波長の渦が混在することになる。この場合にはモードの次数は4次程度まで選ぶ必要がある。

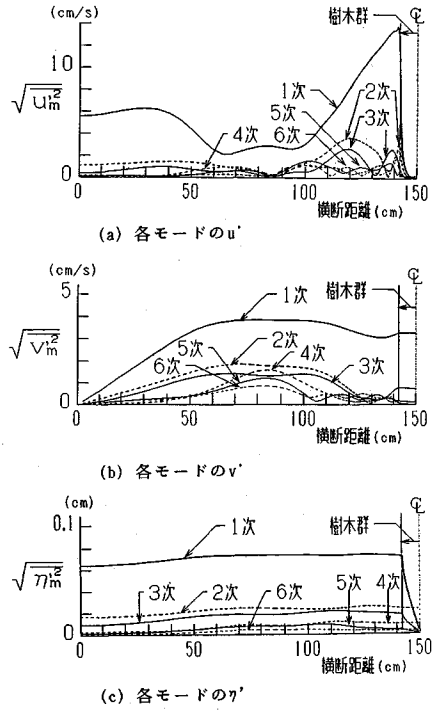


図-14 変動量の横断分布 (Run A-2)

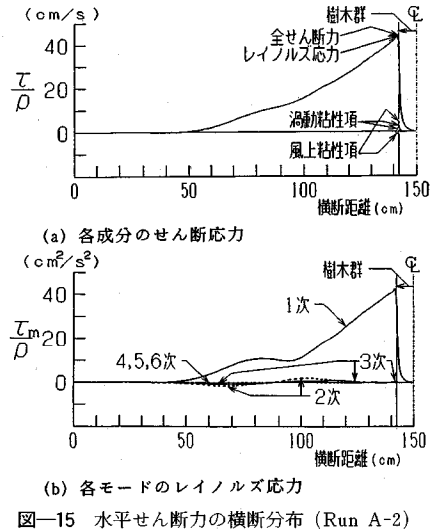


図-15 水平せん断力の横断分布 (Run A-2)

卓越する流れの平面構造のスケールよりも水路幅や樹木群幅が小さいと平面渦はそこまで成長できない。この場合に現れる変動モードは流速分布に対応したものではないため、変動の大きさを維持できず、流速横断分布も変化し、高次モードが次第に発達する。高次モードの応力により流速分布形が変化すると低周波モードが発達する。この力学過程が繰り返される。この場合、境界せん断力は波長が変化しても時間的にはほぼ一定である。

(3) 変動量の横断分布

各波数への変動量の依存性を検討する。



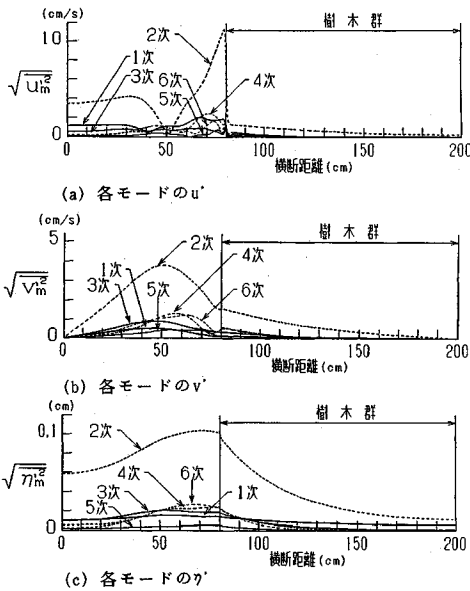


図-16 変動量の横断分布 (Run B-4)

Run A-2 の場合の各波数ごとの変動  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  の大きさの横断分布を図-14 (a) (b) (c) に示す。全体的に低周波モードが卓越している。卓越モードの流速変動  $u'$  の値が小さく、 $v'$  の値が大きい部分が大きな渦の中心である。大きな渦があれば、これより小さな渦へエネルギーが順次運ばれる。このため、境界近傍や渦の中心付近で、依然として高次の変動成分はある。しかし、水路中央に樹木が存在するような場合、2次程度までの変動モードで現象をほぼ表し得ることが分かっている<sup>1)-3)</sup>。すなわち、高次モードの変動は存在するが、大局的な流れ場の形成にはほとんど寄与していない。

これらの高次のモードがどの程度混合現象に関わっているかを水平せん断力を例に検討する。図-15は、流速変動による水平せん断力の横断分布を示している。図 (a) は全せん断力、レイノルズ応力、渦動粘性応力と風上粘性応力の横断分布を、図 (b) は各モード毎のレイノルズ応力分布を示している。渦の中心付近で卓越モードの2倍モード、3倍モードによる修正を若干受けるがほとんどの部分において卓越モードでほぼレイノルズ応力が表せている。境界面でのせん断力は、境界面近傍での卓越モードのレイノルズ応力の最大値で表される。粘性項の作用は流速勾配が急な樹木群境界面にしか現れない。これらの大きさは全せん断力の高々1~2割であり、半分以上は風上粘性による。これらは境界面での流速分布、せん断力分布を修正するものである。

図-16は樹木が片側にある場合の流速変動、水位変動の横断分布を示す。水路中央にある場合の図-14と比べて、 $v'$ ,  $w'$  の分布が大きく異なっている。これが、 $f$  の違いを生じさせる原因である。せん断応力の内訳を

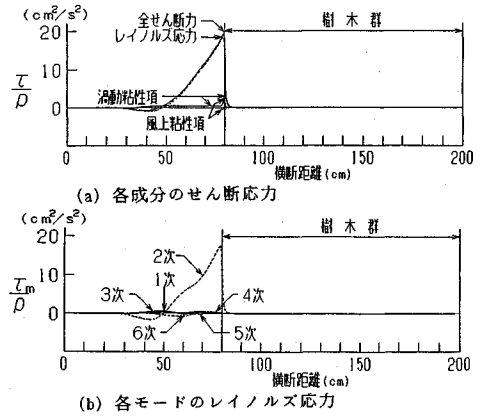


図-17 水平せん断力の横断分布 (Run B-4)

図-17に示す。卓越モードが存在する場合には、高次モードの影響は小さい。樹木が片側にある場合には、中央にある場合よりも渦粘性による影響があるが、その大きさは小さい。

#### (4) 得られた解析結果の物理的な意味

以上のことから、樹木群がある流れ場では卓越するモードとそれの2, 3倍の波数のモードまでで解が定まる。低周波の変動で解が収束する理由は、第1に高周波変動が低周波変動に大きな影響を与えない流れ場を形成することが可能になっていることが考えられる。高次モードは渦のエネルギーを消散させるために必要な通り道でしかなく、平均流れ場の形成にほとんど関わらない。これは、ここで対象とした流れ場では、高波数の変動は底面摩擦と底面乱れによるエネルギー消散のシステムに組み込まれてしまうためであると考えられる。

本文で示した解は、かなりの距離を流下した場合に生じるものである。樹木群が中央にある場合で示した様な最終的な混合形態に至るには、水路は十分に広い幅と長い距離を持つことが必要である。河川の幅が十分広いとは限らないし、同じ断面形状、樹木群繁茂形態が縦断的に一樣に続くわけではない。実現象として、ほとんどの場合は過渡状態にあると考えられる。しかしながら、平衡状態で得られる平均流速分布や境界せん断力は、実験等で得られる過渡状態のものと同程度異ならない。したがって、平衡状態で求めた  $f$  や流れの構造は十分な精度を持って流れの解析に適用できると考えられる。

## 6. 結 論

本文は、樹木の透過係数  $K$  と境界混合係数  $f$  の関係を理論的に論じたものである。現地河道の樹木の種類や繁茂形態と透過係数の関係については、今後の課題とする。本研究で得られた主要な結論を以下にまとめて記す。

1) 幅や位置、透過係数が異なる樹木群のある流れ場に平面二次元解析法を適用し、準2次元解析に導入されて

いる境界混合係数  $f$  の値を解析的に求め、これを実験値と比較した。

その結果、樹木群の境界混合係数  $f$  の物理意味が明確になり、 $f$  の一般表現式を得た。この  $f$  の式は、福岡・藤田により得られている式とほぼ一致する。これより、福岡・藤田らの準二次元解析法に含まれる  $f$  の物理性と妥当性が示され、準二次元解析の有効性が確認された。

2) 樹木群に作用するせん断力は低周波の卓越モードのレイノルズ応力で定まることが分かった。スペクトル分解して求めた卓越モードのレイノルズ応力を決める流速変動の大きさについての考察から、 $f$  が一意的に定まる機構が明らかになった。

### Appendix 非線形項の表現

式 (7), (8) 中の非線形項は、以下の様に表される。  
( $m \geq 1$  の場合)

$$\left( a \frac{\partial b}{\partial x} \right)_{m1} = \sum_{p=1}^{m \max} \sum_{q=1}^{m \max} \delta_{m(p+q)} k_q (a_{p2} b_{q1} + a_{p1} b_{q2}) / 2 + \sum_{p=1}^{m \max} \sum_{q=1}^{m \max} (\delta_{m(p-q)} + \delta_{m(q-p)}) k_q (a_{p1} b_{q2} - a_{p2} b_{q1}) / 2 \quad (A.1.1)$$

$$\left( a \frac{\partial b}{\partial x} \right)_{m2} = \sum_{p=1}^{m \max} \sum_{q=1}^{m \max} \delta_{m(p+q)} k_q (a_{p2} b_{q2} - a_{p1} b_{q1}) / 2 + \sum_{p=1}^{m \max} \sum_{q=1}^{m \max} (\delta_{m(p-q)} - \delta_{m(q-p)}) k_q (a_{p2} b_{q2} - a_{p1} b_{q1}) / 2 \quad (A.1.2)$$

$$\left( a \frac{\partial b}{\partial y} \right)_{m1} = \sum_{p=1}^{m \max} \sum_{q=1}^{m \max} \delta_{m(p+q)} (a_{p1} \frac{\partial b_{q1}}{\partial y} - a_{p2} \frac{\partial b_{q2}}{\partial y}) / 2 + \sum_{p=1}^{m \max} \sum_{q=1}^{m \max} (\delta_{m(p-q)} + \delta_{m(q-p)}) (a_{p1} \frac{\partial b_{q1}}{\partial y} + a_{p2} \frac{\partial b_{q2}}{\partial y}) / 2 \quad (A.1.3)$$

$$\left( a \frac{\partial b}{\partial y} \right)_{m2} = \sum_{p=1}^{m \max} \sum_{q=1}^{m \max} \delta_{m(p+q)} (a_{p2} \frac{\partial b_{q1}}{\partial y} + a_{p1} \frac{\partial b_{q2}}{\partial y}) / 2 + \sum_{p=1}^{m \max} \sum_{q=1}^{m \max} (\delta_{m(p-q)} - \delta_{m(q-p)}) (a_{p2} \frac{\partial b_{q1}}{\partial y} - a_{p1} \frac{\partial b_{q2}}{\partial y}) / 2 \quad (A.1.4)$$

( $m=0$  の場合)

$$\left( a \frac{\partial b}{\partial x} \right)_0 = \sum_{p=1}^{m \max} k_p (a_{p1} b_{p2} - a_{p2} b_{p1}) / 2 \quad (A.2.1)$$

$$\left( a \frac{\partial b}{\partial y} \right)_0 = \sum_{p=1}^{m \max} (a_{p1} \frac{\partial b_{p1}}{\partial y} + a_{p2} \frac{\partial b_{p2}}{\partial y}) / 2 \quad (A.2.2)$$

$\delta$  はクロネッカーのデルタであり、添え字の値が ( $m=p+q$ ) 等の場合には 1, それ以外の場合には 0 である。

### 参考文献

- 1) 福岡捷二・渡辺明英・津森貴行：樹木群を有する開水路における平面せん断流の構造とその解析，土木学会論文集，No.491/Ⅱ-27, pp.41~50, 1994.
- 2) 渡辺明英・福岡捷二・津森貴行：樹木群のある河道の流れの水平混合とその卓越波数，水工学論文集第 38 巻，pp.357~362, 1994.
- 3) 福岡捷二・渡辺明英・津森貴行：低水路際に樹木群を有する複断面河道における流れの平面構造，東京工業大学土木工学科研究報告，No.48, pp.33~51, 1993.
- 4) 福岡捷二・藤田光一：洪水流に及ぼす河道内樹木群の物理的影響，土木研究所報告第 180 号，1990.
- 5) 藤田光一・福岡捷二：洪水流における水平乱流混合，土木学会論文集，No.429/Ⅲ-15, pp.27~36, 1991.
- 6) 池田駿介・太田賢一・長谷川 洋：側岸部植生境界の周期渦の発生機構，土木学会論文報告集，No.443/Ⅱ-18, pp.47~54, 1991.
- 7) 辻本哲郎・北村忠紀：側岸部に植生群落を有する開水路流れの横断混合機構に関する実験的研究，土木学会論文集，No.491/Ⅲ-27, pp.61~70, 1994.
- 8) 福岡捷二・藤田光一・新井田 浩：樹木群を有する河道の洪水位予測，土木学会論文集，No.447/Ⅲ-19, pp.17~24, 1992.
- 9) 建設省河川局治水課監修：河道内樹木の伐採・植樹のためのガイドライン(案)，144 p, 1994.
- 10) 灘岡和夫・八木 宏：SDH & 2DH モデルを用いた開水路水平せん断乱流の数値シミュレーション，土木学会論文集，No.473/Ⅲ-24, pp.35~44, 1993.

(1994.3.8 受付)

## BOUNDARY SHEAR STRESS CAUSED BY VEGETATION NEAR RIVER BANK

Shoji FUKUOKA and Akihide WATANABE

The boundary mixing coefficient of the shear stress which acts on an interface between river flow and vegetation near river bank is determined analytically by applying 2-D flow computational model. In this analysis, depth averaged currents are separated into main flow and deviated flow whose components can represent flow field with large eddies. It becomes clear that the values of boundary mixing coefficient evaluated from this analysis agrees with the experimental values measured by FUKUOKA and FUJITA. Mechanism determining the boundary shear stress are examined in detail.