

# 面内引張りを受ける境界面亀裂問題の応力関数

藤井康寿\*・中川建治\*\*

本研究では弾性定数が異なる材料間に生じるインターフェイスクラック周辺が引張りを受ける問題の応力関数を導き、応力集中の大きさと弾性定数との関係、およびその解と従来の  $J$  積分との関係を計算例として示す。本解析解の特徴は、従来の理論解に見られるような振動（集積特異点）が存在しない関数解であってクラック先端部分に有限で滑らかな応力集中を生じさせることである。さらにこの解は  $J$  積分に関連させると安定した挙動を示すため、破壊の数値シミュレーションを試みる場合の応力分布関数のモデルとして有効な手段とみなし得よう。

**Key Words:** stress function, interface crack, finite stress concentration, elastic solution, uniform tension,  $J$ -integral value

## 1. はじめに

本研究では、弾性定数が異なる二種類の半無限弾性板が接合されている境界線上のインターフェイスクラックの面内力問題を対象とする。Williams<sup>1)</sup>はこの問題を最初に手掛けて以来多くの理論的解析が報告されている。

Williams<sup>1)</sup>, Rice と Sih<sup>2)</sup>, England<sup>3)</sup> および Erdogan<sup>4)</sup>等は剛さの異なる二種類の半無限弾性平板が  $y$  軸上で接合されていて原点を中心にクラックが生じている2次元問題の理論解を導いている。しかし、これらの解析解はクラック先端で応力集中が集積特異点の様相を示している(図-1参照)。England等は応力の特異性が、クラック先端近傍において非常に微小であるが変位のめり込みを引き起こす解を示した。これらの解は数学的には一応正しい解であるが、集積特異点という物理的には非現実的な特性を伴うので破壊力学上有用な解とは言えない。

インターフェイスクラック先端の応力の特異性を打ち消すため、Comninou<sup>5)</sup>はクラック先端部に『せん断抵抗力はないが、モードI(面内引張り)の引張りでありながら圧縮応力が生じて開口はしないと想定した contact zone という部分』を設定して不合理性を一応回避することに成功して多くの研究を報告している。このモデルには二つの問題点が存在して有効性に疑問の残ることは否定できない。一つは contact zone の長さ  $b$  がクラック長さ  $a$  に対して  $10^{-4}$  倍以下のオーダーとなり分子レベルの微小さに達し、材質の均質性を保ち得ない大きさである。もう一つは外部荷重が引張りでも応力拡大係数  $K$  はモードII(面内せん断)の  $K_2$  しか現れないことである。

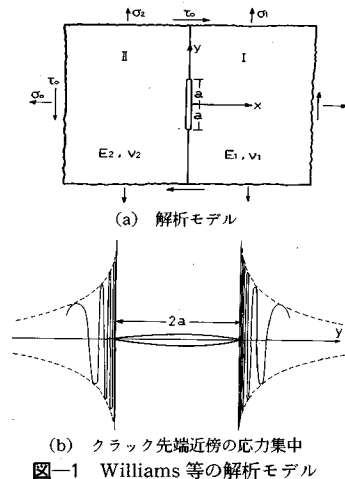


図-1 Williams等の解析モデル

長谷部等<sup>6)~11)</sup>は有理写像関数と複素応力関数とを用いて、多角形境界あるいは円形境界のインターフェイスクラック問題を剝離の問題として多くの研究を発表している。これらは写像関数による巧妙な解析法に基づいたものであるが、視点を変えると特異点近傍で複数個の点を中心に級数展開する手法を主体としているもので、クラック先端部の応力は無限大になることを前提として応力拡大係数を与えるものである。

最近の複合材料における研究成果として、光弾性実験によりクラック周辺の応力分布を求めた山崎ら<sup>12)</sup>の研究では、集積特異点は現れないと報告されている。その他、マトリックスとファイバーのインターフェイスクラックを解析するために破壊力学を適用した研究<sup>13)</sup>や原子レベルの離散的モデルで破壊シミュレーションを試みた報告<sup>14)</sup>等が報告されているが有限要素法による解析が主体となっているので特異性は現れていない。

著者らは既に半無限等方性弾性平板接合線のインターフェイスクラック問題に対して、開口変位を有項限の

\*正会員 工修 岐阜大学助手 工学部土木工学科  
(〒501-11 岐阜市柳戸1番1)

\*\*正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科

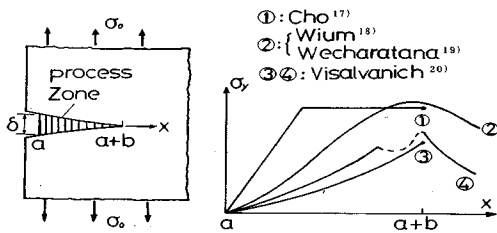


図-2 コンクリート、繊維補強コンクリートにおける開口部の応力

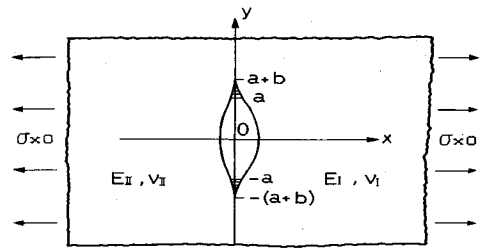


図-3 著者等の解析モデル

フーリエ級数で表現し、応力関数はフーリエ変換と有限項のフーリエ級数を用いて表現する解法で、プロセスゾーン (process zone) を有するインターフェイスクラックの解を提案している。それらによる結果は、クラック先端の応力は集積特異点がなく有限で滑らかな分布であり、開口変位についてもめり込みがなく滑らかな形状を呈するので工学上実用的なものであることを示し得た<sup>15), 16)</sup>。

他方コンクリートの実験的な研究報告では図-2に例示するように、クラックの先端では有限な応力集中を前提として結果の検討がなされているものがほとんどである。さらにコンクリートの破壊過程を数値シミュレーションで検討する場合には破壊の進行を判別する基準値 (たとえば降伏点) を無限大の値と規定することは不都合である。このような観点からクラック先端で有限な応力集中を構成する関数を導く事は有意義である。著者等はこのような応力関数を導いてコンクリート梁の4点曲げ破壊のシミュレーションに活用した<sup>21)</sup>。しかしこれらの関数はインターフェイスクラックの場合には適用不可能であるから、改めて適用可能な関数解を検討した次第である。

本文では、二種類の半無限弾性板が y 軸上で接合されて、境界線の一部分 ( $|y| < a+b$ ) で接合が不完全で直線状の剥離 (いわゆるインターフェイスクラック) を有しているクラックモデルが無限遠方で引張り力を受ける場合の応力関数解を導き得たので報告する。解の特性は『process zone 相当部分において有限で滑らかな応力分布を与えて同時にこの部分に開口変位も生じさせる解』である。著者等の上記の研究<sup>15), 16)</sup>と本解析解との大きな相違点は、前者は級数解であることと境界線上の応力度と変位しか得られないが後者は級数展開を避けた閉じた解であって、process zone 部分が如何に微小になっても解が全領域で求められる (級数解では発散する) ことである。したがって破壊の数値シミュレーションにも活用可能である。

## 2. 解析モデルと基礎式

対象とするインターフェイスクラックモデルは、図-

3に示すように y 軸上で材料定数が異なる二つの半無限弾性板が接合され、y 軸上の区間  $|y| < a+b$  で未接合となり直線状のインターフェイスクラックを形成しているものとする。巨視的なクラック部分の長さを a として後述の境界条件で示される応力度と開口変位が共存する区間を b とする。この区間 b を設定することにより、クラック先端近傍で応力分布は集積特異点 (換言すれば、激しく振動しながら無限大に発散する) 状にならずに有限な応力集中を示し、開口変位についても滑らかな形状を呈することになる。この区間 b がプロセスゾーン (process zone) に相当する区間である。左半平面 ( $x < 0$ ) はヤング係数  $E_{II}$ 、ポアソン比  $\nu_{II}$ 、右半平面 ( $x > 0$ ) はヤング係数  $E_I$ 、ポアソン比  $\nu_I$  で構成されているものとする。さらに無限遠方で一様引張り応力  $\sigma_x = \sigma_\infty$  ( $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ) のみが作用している平面応力問題とする。

複素変数  $z$  で表される複素関数 ( $\varphi(z)$  と  $\psi(z)$ ) で平面弾性問題を扱い、応力は実数部を採用することにする。応力関数  $W_j(x, y)$  の一般解と応力および変位の関係は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W_j(z, \bar{z}) &= 0, \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad \dots\dots (1) \\ W_j(x, y) &= \text{Re} [\bar{z}\phi_j(z) + \phi_j(\bar{z})] \quad \dots\dots (2) \\ \sigma_{xx} &= \partial^2 W_j / \partial^2 y, \quad \sigma_{yy} = \partial^2 W_j / \partial^2 x \quad \dots\dots (3) \\ \tau_{xy} &= -\partial^2 W_j / \partial x \partial y \quad \dots\dots (4) \\ 2G_j(u_j - iv_j) &= \kappa_j \bar{\phi}_j(z) - \bar{z}\phi_j'(z) - \phi_j'(z) \quad \dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここで、 $u_j, v_j$  は x 方向および y 方向の変位であり、式中に示したプライムの記号は  $z$  による微分を表す。 $G_j$  は材料  $j$  のせん断弾性係数、 $\kappa_j$  は材料  $j$  のポアソン比  $\nu_j$  の関数で、平面応力では  $\kappa_j = (3 - \nu_j) / (1 + \nu_j)$ 、平面ひずみでは  $\kappa_j = (3 - 4\nu_j)$  である。 $j$  は左右の材料を表す添え字で  $j = I$  は右半平面、 $j = II$  は左半平面を示す。

## 3. 境界条件

本研究の解析解を得るための境界条件を設定する。

1) 巨視的なクラック部分、すなわち  $|y| \leq a$  では応力度は  $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0$  であるが  $a < |y| < a+b$  区間では開口変位もあり応力度  $\sigma_x, \tau_{xy}$  も存在するものとする。このためには y 軸上の  $|y| = a$  区間より  $|y| = a+b$  区間へ至る過程で応力 (複素応力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) が連続であ

りかつ純虚数から複素数値になることが必要である。

2) y 軸上の境界線上の区間  $|y| \geq a+b$  では応力と変位が連続でなければならない。すなわち応力に対しては  $\sigma_{x1} = \sigma_{x2}$ ,  $\tau_{xy1} = \tau_{xy2}$ , 変位に対しては  $u_1 = u_2$ ,  $v_1 = v_2$  を満足しなければならない。

上記の条件を満たす応力関数は以下の特性を備えていることが必要である。①左半平面 ( $x < 0$ ) と右半平面 ( $x > 0$ ) の解は異なる定数を有する同型の関数で表される。すなわち同型の関数を定義した後クラック線上 (境界線上) で応力が一致するように関数全体に未定係数  $A, B$  を乗じる。②クラック線上で変位も一致するように応力関数内に係数  $(1 \pm ia)$  を乗じた項を設定して変位の連続条件を満足させる。

3) 無限遠方では引張り応力  $\sigma_{\infty}$  のみが作用する。

#### 4. 開口関数

y 軸に沿って長さ  $2a$  のクラックを有する等方等質な無限弾性板に無限遠方で一様引張り応力  $\sigma_{\infty}$  が作用するならば、クラック線上 ( $|y| > a$ ,  $x=0$ ) の応力集中は Westergaard<sup>22)</sup> によって与えられ、

$$\sigma_z = \sigma_{\infty} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \dots\dots\dots(6)$$

となることが知られている。この応力分布で無限大の応力集中や開口を構成する要因は

$$\frac{z}{\sqrt{(z^2 + a^2)}} = 2 \cosh \left\{ \frac{1}{2} \log \left( \frac{z-ia}{z+ia} \right) \right\} \dots\dots\dots(7)$$

である。

この関係に基づいて y 軸上で長さ  $2a$  のインターフェースクラックの開口を構成する基礎的な関数の一つとして

$$h(z, a) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{z+ia}{z-ia} \right) \dots\dots\dots(8)$$

を設定する。関数  $\log z$  は  $z=r^{i\theta}$  とすると、実数部は  $\log r$ , 虚数部は  $i\theta$  と表される。特に虚数局面は原点を中心一周すると  $\pm 2\pi$  変化する多重ラセン状曲面 (対数分岐) となる。この特性を考慮して関数  $h(z, a)$  を実数部と虚数部に分けて y 軸上で考察すると、実数部は  $y = \pm a$  で無限大となり、虚数部は y 軸上の区間  $|y| \geq a$  で実数から虚数 (あるいは虚数から実数) へ急変化 (クラック先端部  $y = \pm a$  で  $0$  から  $\pi$  へ直立) する曲面となる。このような特性を有する関数  $h(z, a)$  を内包した応力関数を採用した場合、Williams, Rice, England, Erdogan の研究で明らかなようにクラック先端近傍の応力集中は集積特異点の様相を示すことになる (上記の研究者等は関数  $h$  のような表現はしていないが間接的には同等である)。クラック先端における急変化の要因を平滑化する手法として、著者等<sup>21)</sup> が四点曲げコンクリート梁の破壊過程のシミュレーションに活用した重み積分法を用い

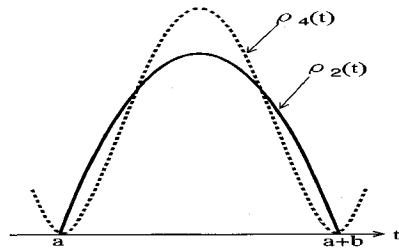


図-4 重み関数の形状

る。すなわち、クラックの長さを表すパラメータ  $a$  を積分変数  $t$  として関数  $h(z, t)$  に適当な重み関数  $\rho(t)$  を乗じつつ区間 ( $a \leq t \leq a+b$ ) にわたって積分する手法を適用するのである。基本的には  $\log z$  は原点に特異点を持っていても  $z^n \log z$  は原点でも積分可能であるという関係を適用することに相当する。

$$H(z, a, b) = \int_a^{a+b} \rho(t) h(x, y; t) dt \dots\dots\dots(9)$$

ただし、重み関数  $\rho(t)$  は区間 ( $a \leq t \leq a+b$ ) で定義される総面積が 1 の関数である。

これによって得られる  $H(z, a, b)$  中の特異点は無限大の応力を生じないものになる。

重み関数  $\rho(t)$  は図-4 に示すようにクラックの長さを表すパラメータ  $a$  に対して定義域を  $(a, a+b)$  として総面積が 1 になるように基準化して採用する。

2 次式重み関数を  $\rho_2(t)$ , 4 次式重み関数を  $\rho_4(t)$  として次のように仮定する。

$$\rho_2(t) = -\frac{6}{b^3} (t-a) \{t-(a+b)\} \dots\dots\dots(10)$$

$$\rho_4(t) = \frac{30}{b^5} (t-a)^2 \{t-(a+b)\}^2 \dots\dots\dots(11)$$

として式 (8), (10), (11) を式 (9) に代入して重み積分した結果は次のように表される。

2 次式重み関数を採用したときの関数  $H(z, a, b)$  は

$$\begin{aligned} H(z, a, b) = & -\frac{i}{b^3} \left[ \{z+i(a+b)\}^2 \left\{ z+i\left(a-\frac{b}{2}\right) \right\} \right. \\ & \times \log \{z+i(a+b)\} \\ & - (z+ia)^2 \left\{ z+i\left(a+\frac{3}{2}b\right) \right\} \\ & \times \log (z+ia) \\ & \left. - \frac{ib}{3} \left\{ 3\left(z+ia+i\frac{b}{2}\right)^2 + 2b^2 \right\} \right] \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

となり、4 次式重み関数を採用した場合は

$$\begin{aligned} H(z, a, b) = & \frac{i}{2b^5} \left[ -\{(z+ia+ib)\}^5 - 5(z+ia) \right. \\ & \times (z+ia+ib)^4 \\ & \left. + 10(z+ia)^2 (z+ia+ib)^3 \right. \\ & \left. \log (z+ia+ib) \right] \end{aligned}$$

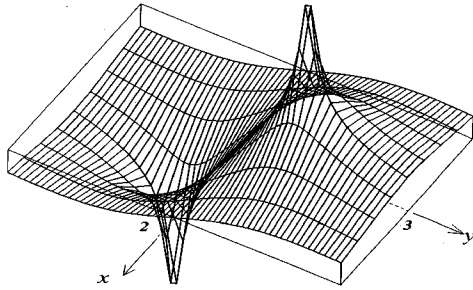


図-5 (a) 関数  $Q(z, a, b)$  (実数曲面: 2次式重み)

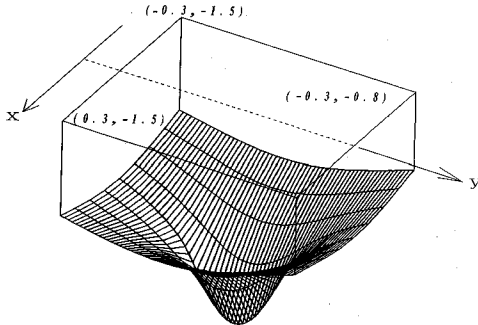


図-5 (b) 関数  $Q(z, a, b)$  (実数曲面拡大: 2次式重み)

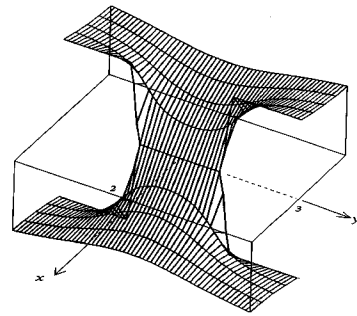


図-6 (a) 関数  $Q(z, a, b)$  (虚数曲面: 2次式重み)

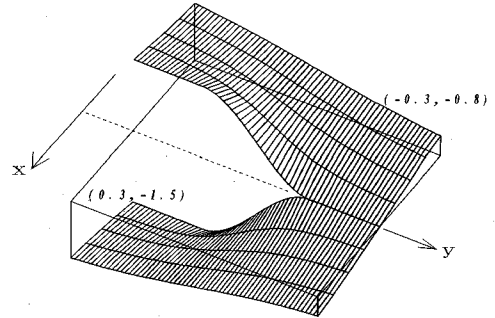


図-6 (b) 関数  $Q(z, a, b)$  (虚数曲面拡大: 2次式重み)

$$\begin{aligned}
 &+ \{(z+ia)^5 - 5(z+ia)^4(z+ia+ib) \\
 &+ 10(z+ia)^3(z+ia+ib)^2\} \\
 &\quad \times \log(z+ia) \\
 &+ \frac{47}{60} \{(z+ia+ib)^5 - (z+ia)^5\} \\
 &- \frac{15}{12} (z+ia)(z+ia+ib) \\
 &\quad \times \{(z+ia+ib)^3 - (z+ia)^3\} \\
 &- \frac{55}{3} ib(z+ia)^2(z+ia+ib)^2 \Big] \\
 &\dots\dots\dots(13)
 \end{aligned}$$

となる。

さらに関数  $H(z, a, b)$  を用いて本研究で必要とする関数  $Q(z, a, b)$  を次のように定義する。

$$Q(z, a, b) = H(z, a, b) - H(z, -a, -b) - i\pi/2 \dots\dots\dots(14)$$

関数  $Q(z, a, b)$  の演算式は割愛するが重み積分した結果の実数部曲面、虚数部曲面の形状を図-5、図-6に示す。図より実数曲面の無限項が有限化していること、虚数曲面については  $y$  軸上 ( $x=0$  の境界線上) において  $|y| < a$  区間では 0 で  $a < |y| < a+b$  区間では 0 から  $\pm\pi/2$  に緩やかに立ち上がることが認識されよう。

### 5. 応力関数

左右半平面とも同型の関数を用いるため右半平面 ( $x > 0$ ) に関して定義すると応力関数は、二種類の応力関数

を重ね合わせた関数として表される。すなわち、応力関数  $W_1(z, a, b)$  は無限遠方 ( $z \rightarrow \infty$ ) において一様引張り応力  $\sigma_{\infty}$  に収束する応力関数  $W_1(z, a, b)$  と無限遠方において応力が 0 となる特性を有する応力関数  $W_2(z, a, b)$  によって以下のように構成される。

$$W_1(z, a, b) = W_1(z, a, b) + W_2(z, a, b) \dots\dots\dots(15)$$

左半平面 ( $x < 0$ ) にはたいては応力関数  $W_1(z, a, b)$  を反転させて

$$W_{II}(z, a, b) = -W_1(z, a, b) \dots\dots\dots(16)$$

とするのみで解析が可能である。

a) 応力関数  $W_1(z, a, b)$  は

$$W_1(z, a, b) = z\phi_{3a}(z, a, b) + \phi_{3a}(z, a, b) \dots\dots(17)$$

$$\phi_{3a}(z, a, b) = iz \{A_1 F_{3a}(z, a, b) + B_1 F_{4a}(z, a, b)\} \dots\dots\dots(18)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{3a}'(z, a, b) &= iA_1 \{2zF_{3a}(z, a, b) + z^2 \frac{d}{dz} F_{3a}(z, a, b)\} \\
 &+ iB_1 z^2 \frac{d}{dz} F_{4a}(z, a, b) \dots\dots(19)
 \end{aligned}$$

$$F_{3a}(z, a, b) = 2 [\cosh \{(1+ia) Q(z, a, b)\} - \cosh \{(1-ia) Q(z, a, b)\}] \dots\dots\dots(20)$$

$$F_{4a}(z, a, b) = 2 [\sinh \{(1+ia) Q(z, a, b)\} + \sinh \{(1-ia) Q(z, a, b)\}] \dots\dots\dots(21)$$

と定義する。未定係数  $A_1, B_1, \alpha$  は応力と変位に関する境界条件を満たすよう決定する。

$$\sigma_{xy} = i2B_1 (F_{4a} + zF_{4a}') - i(z+\bar{z})$$

$$\times \{A_j (2F_3' + zF_3'') + B_j (2F_4' + zF_4'')\} \dots\dots\dots (22)$$

$$\sigma_{yy} = i4A_j (F_3 + zF_3') + i2B_j (F_4 + zF_4') + i(z + \bar{z}) \{A_j (2F_3' + zF_3'') + B_j (2F_4' + zF_4'')\} \dots\dots\dots (23)$$

$$\tau_{xy} = 2A_j (F_3 + zF_3') + (z + \bar{z}) \{A_j (2F_3' + zF_3'') + B_j (2F_4' + zF_4'')\} \dots\dots\dots (24)$$

$$2G_j (u_j - iv_j) = -iA_j \bar{z} (\kappa_j \bar{F}_3 - F_3) - iB_j \bar{z} (\kappa_j \bar{F}_4 + F_4) - i(z + \bar{z}) \{A_j (2F_3 + zF_3') + B_j zF_4'\} \dots\dots\dots (25)$$

1° y 軸上 |y| < a 区間での応力  $\sigma_{xy}$  と  $\tau_{xy}$  は式 (22), (24) から

$$\sigma_{xy}|_{x=0} = 2B_j [i4 \sinh(Q_r) \cos(\alpha Q_r) + i4y \left( \frac{\partial Q_r}{\partial y} \right) \{ \cosh(Q_r) \cos(\alpha Q_r) - \alpha \sinh(Q_r) \sin(\alpha Q_r) \}] \dots\dots\dots (26)$$

$$\tau_{xy}|_{x=0} = 2A_j [i4 \sinh(Q_r) \sin(\alpha Q_r) + i4y \left( \frac{\partial Q_r}{\partial y} \right) \{ \alpha \sinh(Q_r) \cos(\alpha Q_r) + \cosh(Q_r) \sin(\alpha Q_r) \}] \dots\dots\dots (27)$$

ただし,  $Q_r : Q(z, a, b)$  の実数部である。となり,  $\sigma_{xy}$ ,  $\tau_{xy}$  とも虚数となる。したがって y 軸上区間 |y| < a で  $\sigma_{xy} = \tau_{xy} = 0$  となり境界条件 1) を満足している。

2° y 軸上  $x = \pm 0$ , |y| > a + b での応力  $\sigma_{xy}$ ,  $\tau_{xy}$  は

$$\sigma_{xy}|_{x=\pm 0} = \pm 8B_j \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \left[ \cosh(Q_r) \cos(\alpha Q_r) - y \left( \frac{\partial Q_r}{\partial y} \right) \{ \alpha \cosh(Q_r) \sin(\alpha Q_r) - \sinh(Q_r) \cos(\alpha Q_r) \} \right] \dots\dots\dots (28)$$

$$\tau_{xy}|_{x=\pm 0} = \pm 8A_j \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \left[ \cosh(Q_r) \sin(\alpha Q_r) + y \left( \frac{\partial Q_r}{\partial y} \right) \{ \alpha \cosh(Q_r) \cos(\alpha Q_r) + \sinh(Q_r) \sin(\alpha Q_r) \} \right] \dots\dots\dots (29)$$

となり,  $x = \pm 0$  において  $\sigma_{xy}$  および  $\tau_{xy}$  も正負同じ値を示すので y 軸上での応力度の連続条件  $\sigma_{x1} = \sigma_{x2}$ ,  $\tau_{xy1} = \tau_{xy2}$  を成立させるためには

$$A_{II} = -A_I, B_{II} = -B_I \dots\dots\dots (30)$$

であればよい。

3° y 軸上  $x = \pm 0$ , |y| > a + b での変位の連続条件からパラメータ  $\alpha$  を決定する。式 (25) から  $u_I$ ,  $u_{II}$  は次のように示される。

$$u_I = -2A_I y \left[ -\frac{\kappa_I - 1}{G_I} \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(Q_r) \sin(\alpha Q_r) \right] - 2B_I y \left[ \frac{\kappa_I + 1}{G_I} \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(Q_r) \sin(\alpha Q_r) \right]$$

$$\dots\dots\dots (31)$$

$$u_{II} = -2A_{II} y \left[ -\frac{\kappa_{II} - 1}{G_{II}} \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(Q_r) \sin(\alpha Q_r) \right] - 2B_{II} y \left[ \frac{\kappa_{II} + 1}{G_{II}} \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(Q_r) \sin(\alpha Q_r) \right] \dots\dots\dots (32)$$

式 (30) より  $A_{II} = -A_I$ ,  $B_{II} = -B_I$  より変位の連続条件  $u_I - u_{II} = 0$  は

$$\left( \frac{\kappa_I - 1}{G_I} - \frac{\kappa_{II} - 1}{G_{II}} \right) \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) A_I + \left( \frac{\kappa_I + 1}{G_I} + \frac{\kappa_{II} + 1}{G_{II}} \right) \times \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) B_I = 0 \dots\dots\dots (33)$$

と表される。同様に式 (25) の虚数部を採用することにより得られる  $v_I$ ,  $v_{II}$  は

$$v_I = 2A_I y \left[ \frac{\kappa_I + 1}{G_I} \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(Q_r) \cos(\alpha Q_r) \right] + 2B_I y \left[ \frac{\kappa_I - 1}{G_I} \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(Q_r) \cos(\alpha Q_r) \right] \dots\dots\dots (34)$$

$$v_{II} = 2A_{II} y \left[ \frac{\kappa_{II} + 1}{G_{II}} \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(Q_r) \cos(\alpha Q_r) \right] + 2B_{II} y \left[ -\frac{\kappa_{II} - 1}{G_{II}} \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(Q_r) \cos(\alpha Q_r) \right] \dots\dots\dots (35)$$

となり, 変位の連続条件  $v_I - v_{II} = 0$  は式 (30) を用いることにより次のように表される。

$$\left( \frac{\kappa_I + 1}{G_I} + \frac{\kappa_{II} + 1}{G_{II}} \right) \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) A_I + \left( \frac{\kappa_I - 1}{G_I} - \frac{\kappa_{II} - 1}{G_{II}} \right) \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) B_I = 0 \dots\dots\dots (36)$$

式 (33), (36) は次の行列で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\kappa_I - 1}{G_I} - \frac{\kappa_{II} - 1}{G_{II}} \right) \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) & \left( \frac{\kappa_I + 1}{G_I} + \frac{\kappa_{II} + 1}{G_{II}} \right) \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \\ \left( \frac{\kappa_I + 1}{G_I} + \frac{\kappa_{II} + 1}{G_{II}} \right) \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) & \left( \frac{\kappa_I - 1}{G_I} - \frac{\kappa_{II} - 1}{G_{II}} \right) \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_I \\ B_I \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots (37)$$

左辺の行列式 = 0 よりパラメータ  $\alpha$  が決定する。

$$\alpha = \pm \frac{1}{\pi} \log \left\{ \frac{\kappa_{II} / G_{II} + 1 / G_I}{\kappa_I / G_I + 1 / G_{II}} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

パラメータ  $\alpha$  は bielastic constant<sup>2)</sup> と呼ばれている。等方等質 ( $E_I = E_{II}$ ,  $\nu_I = \nu_{II}$ ) で  $b$  が 0 に近づくと, 最終的には Westergaard の解と同値となり,  $\alpha$  は 0 へ収斂する。

4° 未定係数  $B_I$  は境界条件 3) で示した無限遠方の応力より決定され, 式 (37) から  $A_I$  が, 式 (30) から係数  $A_{II}$  および  $B_{II}$  も決定される。無限遠方の応力  $\sigma_{xy}$ ,  $\tau_{xy}$  は

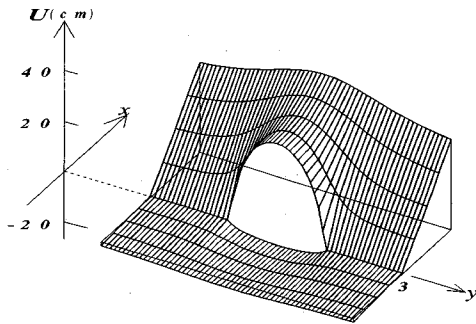


図-7 変位  $u$  (2次式重み)

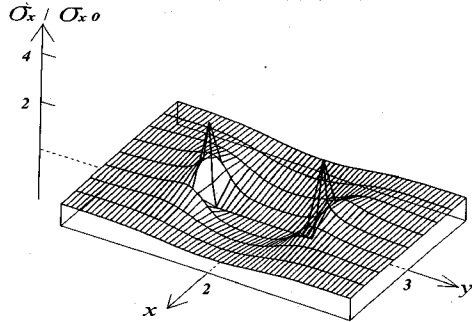


図-9 応力  $\sigma_x$  (2次式重み)

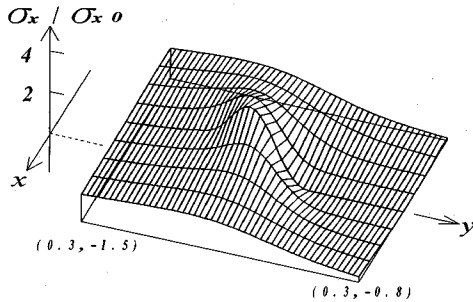


図-11 応力  $\sigma_x$  (拡大図: 2次式重み)

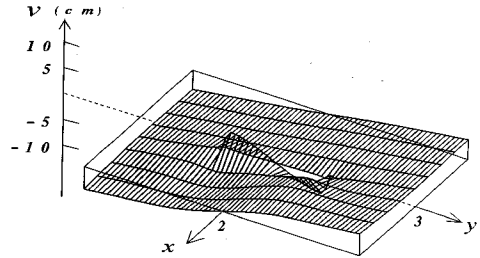


図-8 変位  $v$  (2次式重み)

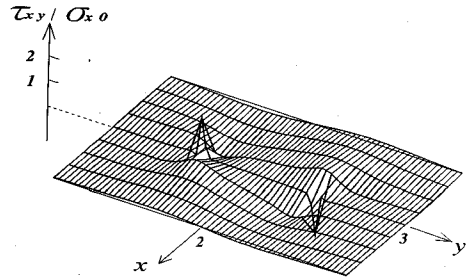


図-10 応力  $\tau_{xy}$  (2次式重み)

異なり無限遠方 ( $z \rightarrow \infty$ ) において  $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$  とする特性を有する。したがって応力関数  $W_1(z, a, b)$  において確定した係数  $A_j, B_j$  を活用することにする。

$$W_2(z, a, b) = \bar{z}\phi_{12}(z, a, b) + \phi_{12}(z, a, b) \quad \dots\dots\dots(42)$$

$$\phi_{12}(z, a, b) = A_1 F_{1j}(z, a, b) + B_1 F_{2j}(z, a, b) \quad \dots\dots\dots(43)$$

$$\begin{aligned} \phi_{12}'(z, a, b) = & A_1 \left\{ F_{1j}(z, a, b) + z \frac{d}{dz} F_{1j}(z, a, b) \right\} \\ & + B_1 \left\{ -F_{2j}(z, a, b) + z \frac{d}{dz} F_{2j}(z, a, b) \right\} \quad \dots\dots\dots(44) \end{aligned}$$

$$F_{1j}(z, a, b) = 2 \left[ \sinh \{(1+i\alpha) Q(z, a, b)\} - \sinh \{(1-i\alpha) Q(z, a, b)\} \right] \quad \dots\dots\dots(45)$$

$$F_{2j}(z, a, b) = 2 \left[ \cosh \{(1+i\alpha) Q(z, a, b)\} + \cosh \{(1-i\alpha) Q(z, a, b)\} \right] \quad \dots\dots\dots(46)$$

とする。

紙面の都合で割愛するが、応力関数  $W_2(z, a, b)$  による応力および変位成分は  $W_1(z, a, b)$  と同様に導き得る。 $a$  に関する条件式も式 (37) と等しいものとなる。

### 6. 計算例による検討

本解析解による応力集中の特性を検討するについて基本的には次のような対象を想定する。

図-3における  $x > 0$  の右半平面はコンクリートと仮定して各材料特性を添字 I で表す。 $x < 0$  の左半平面は等

$$\left. \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_{xy} &= 8B_1 \cosh(\alpha\pi/2) \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

となり、無限遠方での応力  $\sigma_{xy} = \sigma_{x0}$  を満たすよう  $B_1$  を与える。

$$B_1 = \frac{\sigma_{x0}}{8 \cosh(\alpha\pi/2)} \quad \dots\dots\dots(40)$$

式 (40), (37) から  $A_1$  は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} A_1 = & - \frac{\sigma_{x0}}{8 \cosh(\alpha\pi/2)} \\ & \times \frac{\{(\kappa_1+1)/G_1 + (\kappa_{II}+1)/G_{II}\} \sinh(\alpha\pi/2)}{\{(\kappa_1-1)/G_1 - (\kappa_{II}-1)/G_{II}\} \cosh(\alpha\pi/2)} \quad \dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

係数  $A_{II}, B_{II}$  は式 (30) から  $A_{II} = -A_1, B_{II} = -B_1$  とすることにより求められる。

b) 応力関数  $W_2(z, a, b)$  について

応力関数  $W_2(z, a, b)$  は応力関数  $W_1(z, a, b)$  とは

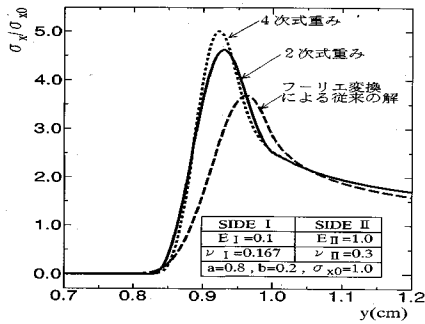


図-12 重み関数の相違による y 軸上の応力分布

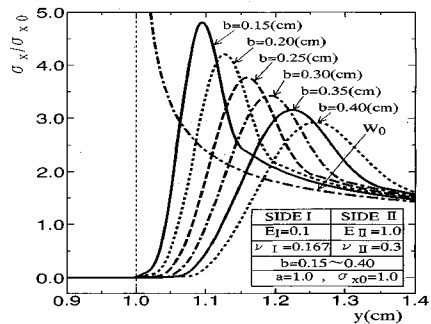


図-13 b の相違による  $\sigma_x$  の重ね合わせ (2次式重み)

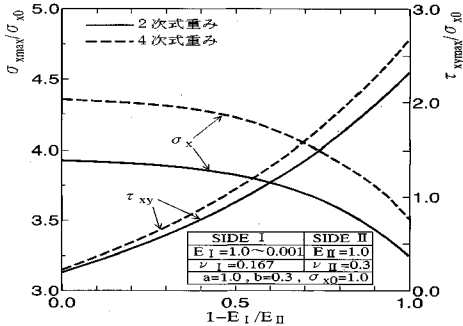


図-14  $E_I$  の変化による最大応力の変化

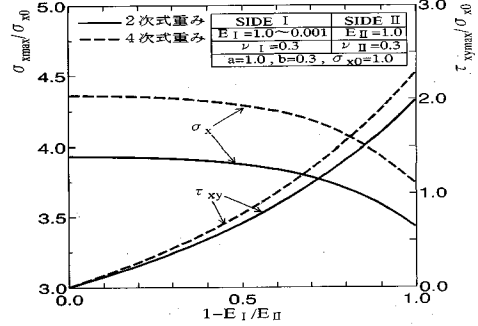


図-15  $E_I$  の変化による最大応力の変化

方等質の岩盤あるいは鋼の材質を想定して、各材料特性の添え字はIIとする。クラック長さを表す  $a$  (応力解放区間長  $=2a$ ) を  $1\text{cm}$  とし、無限遠方には、一様引張り応力  $\sigma_{\infty} = 1$  が作用する平面応力問題とする。岩盤あるいは鋼材のヤング係数を無次元量  $E_{II} = 1$  として  $E_I$  は  $E_{II}$  に対する比率で表現する。ポアソン比は  $\nu_{II} = 0.3$  と規定して  $\nu_I$  は同様に比率で表現する。

計算例は検討項目に合わせて次のように設定した。

1) 計算例-1 (応力と変位の状態): クラック近傍の長方形領域の変位  $u, v$  と応力  $\sigma_x, \tau_{xy}$  の状態を図-7 から図-11 に示す。開口部の変位  $u$  が両側のヤング率に応じて大きさが異なること、接合部では変位は連続していることが図-7 で認識される。図-11 の  $\sigma_x$  の詳細図から、開口部とプロセスゾーンおよび接合部で応力度も境界条件を満足していることが判定される。以上より、図-2 で言及した従来の多くの研究で活用されている応力分布モデルとして活用し得るものであること等が認識されよう。

2) 計算例-2 (y 軸上の応力集中): クラック線に沿うプロセスゾーン近傍の応力集中  $\sigma_x$  の形状を図-12 に示す。重み関数の相違 (2次式と4次式) による比較と、著者等<sup>16)</sup>によるフーリエ変換による解析結果の応力集中との相違を示したものであるが、図-1に関連して述べた過去の研究のような集積特異点が消滅して滑らかな応力集中を構成していることが納得されよう。3曲線の応力集中の大きさの相違については解の構成の相違によるも

ので致し方の無い事であるが、これについてはJ積分で再度検討をする。この例では応力集中の変化を把握し易いように  $b$  を大きくしているが、図-13の結果は  $b$  の減少と共に応力集中が増大して等方性体中の Westergaard の解の応力集中の形状に収束することと集積特異点は完全に回避されていることが示されている。本解析解のプロセスゾーンは開口変位と応力が共存する範囲であり、このような部分を構成することの有効性がこの結果で示されている。極限として  $b$  が  $0$  に近づけば、式(9)の重み積分を実行しないことになり、応力分布は式(6)である。すなわち図-13に併記した  $W_0$  に一致する。

3) 計算例-3 (ヤング率比と応力集中の関連): y 軸に沿う  $\sigma_x$  と  $\tau_{xy}$  の最大値  $\sigma_{max}, \tau_{ymax}$  とヤング率比の関係を図-14, 15 に示す。結果は平均応力で無次元化されているが、ポアソン比をコンクリートと鋼材の  $0.167$  と  $0.3$  とにする場合 (図-14) と両者を等しく  $0.3$  とする場合 (図-15) では特記するほどの相違は生じないことが推察されよう。応力集中の大きさはヤング率比の等しい場合が最も大きくなっている事が注目される。せん断応力はヤング率の相違が大きい程増加しているが、絶対値は  $\sigma_x$  には及ばない。

4) 計算例-4 (ポアソン比の変化と応力集中の関連): 図-16 はヤング率を等しくしてポアソン比の変化と応力集中の関係を求めたものであり、図-17 はヤング率比を  $1:15$  (鋼とコンクリート) とする場合のものである。

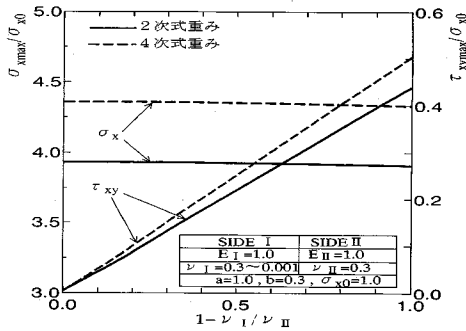


図-16  $\nu_1$ の変化による最大応力の変化

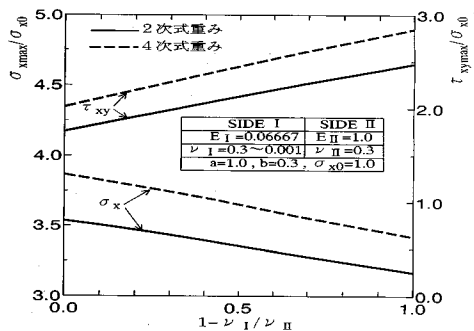


図-17  $\nu_1$ の変化による最大応力の変化

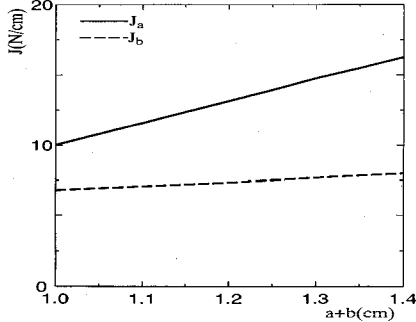


図-18 エネルギー解放率 J

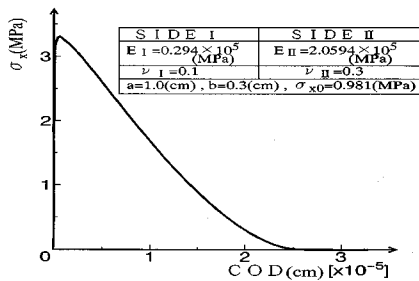


図-19 応力-開口変位曲線

表-1

a (cm)	b (cm)	二次式重み	四次式重み
		Ja (N/cm)	
1.00~1.05	0.2	13.93	14.02
1.05~1.10	0.2	14.76	14.90
1.10~1.15	0.2	15.49	15.60

$E_{II} = 1.0, E_I = E_{II}/10, \nu_{II} = 0.3, \nu_I = 0.167$

表-2

a (cm)	b (cm)	二次式重み	四次式重み
		Jb (N/cm)	
1.0	0.20~0.25	7.58	7.50
1.0	0.25~0.30	7.74	7.67
1.0	0.30~0.35	7.89	7.83

$E_{II} = 1.0, E_I = E_{II}/10, \nu_{II} = 0.3, \nu_I = 0.167$

一つのエネルギー解放率 J はクラック開口長さ a の変化 (b=一定) に伴うエネルギーの変化率  $J_a$  であり、他の一つはプロセスゾーンの長さのみの進展 (a=一定, b変化) に対するもの  $J_b$  である。図-18 は  $a+b=1$  より 1.4 まで変化させる場合の 2 種類のエネルギー解放率を図示したものである。応力集中では重み関数の相違 (2 次式と 4 次式) による差異は歴然としているが、J 積分によっては重み関数による差異は図上には現れていない。J 積分の数値を表-1 と表-2 に示すが、この結果より次のような重要な事柄が推察される。「重み関数の形状 (2 次式と 4 次式) の相違はクラック線上の応力集中の大きさには無視し得ない程の影響を与えるが、解放エネルギーという観点からは殆ど差異を生じさせない。  $J_a, J_b$  も  $a+b$  の一次式で表現される。」

片側のポアソン比が 0 に近づいても両側の弾性体のヤング率が等しいと  $\sigma_x$  には大きな変化は現れないが、ヤング率に相違がある場合は  $\sigma_{max}$  は減少することが示されている。片側のポアソン比が一定で他方のポアソン比のみが小さくなると境界面の連続性を維持するためにせん断応力が大きくなる事は容易に想像されることである。

5) 計算例-5 (J 積分の検討)：重み積分法という数学的手法によって有限な応力分布を与える応力関数を導く手法を導いた。2 次式と 4 次式の重みとによって応力集中の大きさにどの程度の相違が生じるかを前述の計算例が示しているが、いずれを採るべきかはこのままでは判定不能である。ここで観点を換えて、実験データを基にして破壊規準を表す一つの指標として活用されているエネルギー解放率 (J 積分) を求めて見よう。本研究の応力関数ではプロセスゾーンを構成しているので、J 積分を求めるには著者等の従来の研究<sup>23)</sup>において提案したように 2 種類のエネルギー解放率を定義することになる。

6) 計算例-6 (応力-開口変位曲線)：本研究で得られるクラック先端の解析結果と実験データとの照合はインターフェイスクラックの特性上非常に困難である。一つの検証法として、かつ本解析解の有用性を示す例として、コンクリートの破壊実験で活用されている応力-開口変位曲線 (いわゆる引張軟化曲線) を本解析解より導いて次に示す。コンクリートの実験では片側に切り欠きを有する供試体のクラック進展による破壊現象をシミュレートするために、引張軟化曲線が活用されている。軟化曲線を求めるために J 積分値を利用したり、破壊エネルギーを巧みに導入する手法などが提案されているが問題点も指摘されている。引張軟化モデルは破壊エネル



ギーを同一にしても軟化曲線の形状が異なれば、それを構成則の一つとして有限要素法 (FEM) 等に組み込んで求められる荷重-変位曲線のピーク後の挙動に影響を与えてモデルの唯一性の疑問が残ることは否定できない<sup>20)</sup>。本解析解で導き出される応力-開口変位曲線 (引張軟化曲線) は複素解析解を用いているため、従来の数値解析手法に見られるようにエネルギー値を導入したり、軟化特性を逆解析手法により推定する方法を用いなくてもクラック先端のプロセスゾーンの長さ  $b$  と各材料特性が与えられれば図-19 に示すようにクラック進展と連動した応力-開口曲線を描くことは可能である。これは引張軟化曲線として引用される村上ら<sup>20)</sup> の研究成果と相通じる曲線であろう。このことは従来の数値解析解とは異なり、材料パラメータと応力分布 (重み関数) の計測あるいは仮定値より材料の軟化特性を唯一に確定させることになる解であり本研究の特徴でもある。さらにインターフェイスクラックであるにも拘わらず従来活用されている引張軟化曲線に類似した形状が示し得たことは異質材料のクラック進展による崩壊過程をシミュレートするために適用可能な解であることを示唆している。

## 7. むすび

本研究で得られた見解を以下に示す。

1) インターフェイスクラック問題に対して実用的な解析解を提案した。応力と開口が共存する区間を構成したことにより不合理な集積特異点は消滅され有限な応力分布の解を導き得たのである。

2) 著者らの従来の研究<sup>19)</sup> と本解析解の大きな相違点は級数展開を避けた閉じた解であることと全領域で応力も変位も容易に計算し得る点である。この特性は数値シミュレーションにおいて活用する応力分布としては好都合である。

3) 境界線上の区間  $|y| > a+b$  における変位の連続条件を満たすように設定する bielastic constant  $\alpha$  は、応力と開口変位が共存する区間を設定しない従来の研究の場合<sup>9)</sup> と全く同等な関係を示す。

4) プロセスゾーン  $b$  に生じる応力分布は、重み関数の形状を変えることによって大きな自由度をもって変化させ得る性質のものである。どのような材料定数や応力分布にも一応対応可能な基本解を示したことになる。もし、実験計測によって応力分布が実際に与えられたならば、この応力分布を実現する重み関数の形状を数値解析によって近似的に決定し得よう。

5) 本研究で構成したプロセスゾーンは応力分布と開口変位が現れる領域である。この領域を現実的なクラック問題に対応させるならば、コンクリートや岩盤のような材料の崩壊実験で観察されるクラック先端のヘアー

クラックやマイクロクラックの発生領域を開口変位と応力の共存領域として滑らかな関数で近似的に表現していることになる。

6) 本研究では引張り応力が作用する (Mode I) インターフェイスクラックのモデルを対象としたが、用いた解析解はせん断応力が作用する問題 (Mode II) にも適用が可能である。

7) 本研究で提案した解析モデルは各弾性体の物理的な材料特性 (破壊機構) を保留して、全領域を弾性体とみなし得る場合には現実的な応力関数を導き得ることを示したものである。したがって解析解として応力分布の1つを表し得ても、実測された特定の場合に対して応力分布を実現させた解ではないので、これによって実際の現象を説明し得たと考えるべきものではない。

8) しかしエネルギー解放率 ( $J$ 積分) の視点から考察すると、ここで活用したような重み関数による差異は大局的には無視し得ることが判明した。このことはクラックの進展を数値シミュレーションによって検討する場合には非常に好ましい特性である。いずれの重み関数による応力分布を用いて破壊を進行させても (降伏やクラック進展の判定用限界値の設定)、エネルギー論的に破壊を評価する限り導かれる結論の特性 (傾向) は仮定した重み関数に依らず安定したものとなると推定される。同様に各種材料パラメータの相違による応力集中の割合を検証する場合にも有効な手段となることが推察される。

## 参考文献

- 1) Williams, M. L.: The stresses around a fault or crack in dissimilar media, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 49, pp. 199-204, 1959.
- 2) Rice, J. R and Sih, G. C.: Plane problems of cracks in dissimilar media, TRANS. ASME, J. Appl. Mech. Vol. 32, pp. 418-423, 1965.
- 3) England, A. H.: A crack between dissimilar media, TRANS. ASME, J. Appl. Mech. Vol. 32, pp. 400-402, 1965.
- 4) Erdogan, F.: Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks, TRANS. ASME, J. Appl. Mech. Vol. 32, pp. 403-410, 1965.
- 5) Comninou, M.: The interface crack, TRANS. ASME, J. Appl. Mech. Vol. 44, pp. 631-636, 1977.
- 6) Hasebe, N., Keer, L. M. and Nasser, S. N.: Stress analysis of a kinked crack initiating from a rigid line inclusion. Part I: Formulation, Mech. of Materials, Vol. 3, pp. 131-145, 1984.
- 7) Hasebe, N., Nasser, S. N. and Keer, L. M.: Stress analysis of a kinked crack initiating from a rigid line inclusion. part II: Direction of propagation, Mech. of Materials, Vol. 3, pp. 147-156, 1984.
- 8) Hasebe, N. and Miura, M.: Stress analysis of a crack at an end of partly embedded strip, Proc. of JSCE, Struct. Eng., Vol. 2, No. 2, pp. 345-352, 1985.
- 9) Hasebe, N. and Takeuchi, T.: Stress analysis a semi

- infinite plate with a thin rigid body, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 23, No. 5, pp. 531-539, 1985.
- 10) Hasebe, N., Okumura, M. and Nakamura, T.: Stress analysis of a debonding and a crack around a circular rigid inclusion, *Int. J. of Fracture*, Vol. 32, pp. 169-183, 1987.
  - 11) 奥村幹也・長谷部宣男・中村卓次: 有限部で接合された異材半平面の剥離端からのクラックや剥離の発生条件, 土木学会論文集, No. 428/I-15, pp. 77-86, 1991.
  - 12) 山崎淳一・結城良治・北川英夫: エポキシ間異材境界上の疲労伝播特性と接合力の評価, 日本機械学会論文集 (A編), 52巻, 476号, pp. 963-970, 1986.
  - 13) Budiansky, B., Hutchinson, J. W. and Evans, A. G.: Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 34, No. 2, pp. 167-189, 1986.
  - 14) 須賀唯知・舟橋章・高橋裕: 分子動力学的手法による界面き裂の解析, 日本機械学会論文集 (A編), 57巻, 535号, pp. 678-685, 1991.
  - 15) Duan, S., Yazaki, H. and Nakagawa, K.: A crack at the interface of an elastic half plane and a rigid body, *Eng. Fract. Mech.*, vol. 32, No. 4, pp. 573-580, 1989.
  - 16) Duan, S., Yazaki, H., Fujii, K. and Nakagawa, K.: A mathematical approach of the interface crack with a fracture process zone, *Research Report of the Faculty of Eng., Gifu Univ.*, No. 41, pp. 1-10, 1991.
  - 17) Cho, Kyu. Zong. et al.: Fracture process zone of concrete cracks, *J. of Eng. Mech.*, 110, 8, pp. 1174-1184, 1984.
  - 18) Wium, D. J. W. et al.: Hybrid model for discrete cracks in concrete, *J. of Eng. Mech.*, 110, 8, pp. 1211-1229, 1984.
  - 19) Wecharatana, M. and Shah, S. P.: A model for predicting fracture resistance of fiber reinforced concrete, *Cement and Concrete Research*, 13, 6, pp. 819-829, 1983.
  - 20) Visalvanish, K. and Naaman, A. E.: Fracture model for reinforced concrete, *ACI Journal*, Title No. 80-14, pp. 128-138, 1983.
  - 21) Fujii, K., Duan, S. and Nakagawa, K.: A mathematical model for fracture process of four point bending concrete beam, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 40, No. 1, pp. 37-44, 1991.
  - 22) Westergaard, H. M.: Bearing pressure and cracks, *TRANS. ASME*, Vol. 33, A-49-A-53, 1939.
  - 23) Duan, S., Fujii, K. and Nakagawa, K.: Finite stress concentrations and J-integrals from Normal Loads on a Penny-Shaped Crack, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 32, No. 2, pp. 167-176, 1989.
  - 24) 日本コンクリート工学協会, コンクリートの破壊力学研究委員会, コンクリート構造の破壊力学に関するコロキウム, 第1部, JCI-C19, pp. 144-45, 1990. 3.
  - 25) 村上聖・岸谷孝一・平居孝之: 破壊エネルギーの物理的意味とその評価 (コンクリートの破壊エネルギーに関する研究), 日本建築学会構造系論文集, 第445号, pp. 11-18, 1993.

(1993.6.14 受付)

## STRESS FUNCTION AROUND AN INTERFACE CRACK UNDER UNIFORM TENSION AT INFINITY

Kouju FUJII and Kenji NAKAGAWA

A new stress function for an interface crack between two dissimilar elastic half planes which are subject to uniform tension is proposed in this paper. Figures and tables are used to show the relation of the elastic characteristics of the both materials and the maximum stress concentration ratio, or the relation of the J-integral value that was given by a conventional solution and that obtained by this study. The character of this function consists of finite stress concentration with no oscillations at the crack tips, although the elastic solution is used. It is introduced that the behavior of the J-integral values obtained by proposed function are stable for the crack extension, so that this function is suitable for using in numerical simulation of fracture phenomena.