

逆対称荷重が作用する PC タンク側壁の断面力計算法

吉岡民夫*・大谷悟司**・高西照彦***

円筒形の側壁を有する PC タンクに、地震時動液圧などの軸に対して逆対称な荷重が作用した場合の断面力を求めるのに、円筒シェルの基礎式を構成する釣合式のうちの一つを、大域的なモーメントの釣合式で置き換えることによって、タンク側壁の法線方向の変位に関する常微分方程式を導いた。さらに、このようにして得られた微分方程式は上下ばねおよび回転ばねによって支えられたはりの変形を支配するそれに等価であることを示し、従来から広く用いられている骨組構造解析用のプログラムを利用して、容易に数値解析できることを示した。

Key-Words: prestressed concrete, cylindrical tank, anti-symmetric loading, numerical analysis

1. はじめに

プレストレストコンクリート(以下 PC)タンクは、上水用配水池、農業用貯水池、下水汚泥消化タンク、LNG や LPG 貯蔵タンクなどに幅広く用いられている^{1)~3)}。液体を貯蔵するタンク構造物の最も重要な要求性能は液密性で、特にライフラインとしての上水用配水池は、仮え地震により配水ネットワークが破壊されても、緊急自動車や給水車が地震後に取水できるように、地震時にもある程度の液密性を確保することが重要である。

コンクリートタンクの液密性を確保する最も良い方法は、ひび割れ発生もしくはひび割れ幅に関する制限である。PC タンクの代表的な形状は円筒形であり、シリンダー側壁に発生する主要な断面力は円周方向軸引張力(フープテンション)である。この断面力によるひび割れは断面を貫通して液密性を阻害する可能性が高い。コンクリートに発生するひび割れを制御して地震時の液密性を確保するために、まず、コンクリートに発生する詳細な応力状態を知ることが必要である。

一般に PC タンク側壁は、閉鎖断面シリンダーシェルとして応力解析が行われている。通常の使用状態では静水圧などの軸に対称な荷重が作用するが、その場合に対する解析法や断面力計算のための数表などはよく整備されている^{4)~7)}。一方、地震時にはこれらの荷重に加えて、軸に対して逆対称に作用する動液圧や躯体慣性力が側壁に作用する。逆対称荷重が作用する円筒シェルの断面力を求めるには、I)荷重、変位などを円周方向にフーリエ級数展開した後、解析的に解を求める方法、II)荷重、変

位などを円周方向にフーリエ級数展開した後、軸対称要素を用いて有限要素法(FEM)解析を用いる方法、III)3次元 FEM 解析を用いる方法などが考えられる。しかるに、特に大容量タンクなどを除いては、上述のような方法を用いて実際の設計をすることは極めて稀である。それは、上記 I)の方法は、一般にその解析解を求めることが困難であり、II)および III)の方法は、未だパーソナルコンピュータを用いて手軽に利用できる段階ではなく、PC タンク設計実務者にとってそれは必ずしも馴染み深いとは言いがたいからである。

著者らは軸に逆対称に作用する荷重を受ける円筒シェルの断面力を、いくつかの仮定と新たな釣合式を導入して、側壁の法線方向の変位に関する微分方程式を導き、逆対称荷重問題を近似的に軸対称荷重問題に置換できることを示し、一般的な形状の PC タンクの耐震設計には十分信頼できる精度で解が得られることを示した⁸⁾。しかるに、径に比べて背が高いタンクの場合などには、計算精度が悪くなる傾向があった。そこで本論文では、前論⁸⁾の近似解を導く際に用いた仮定を採用しなくてもよいような、精度の高い解が得られる式を新しく導いた。そして、2, 3 の数値計算を行って、本論の解析法の妥当性を示した。

2. 本解析法の概要

逆対称荷重が作用する円筒シェルの理論解を求め、それを数値解析することは容易ではない。そこで前論⁸⁾において、I)円筒シェルで成り立つ釣合式において、側壁の鉛直および円周方位変位については、その円周方向の変化率は微小であるとの仮定を導入し、II)直立円筒シェルの水平面上の側壁断面において、外荷重と断面力によって生ずるモーメントが釣合うという、いわば大域的な釣合式を新しく導入することによって、側壁の法線

*正会員 オリエンタル建設(株)技術研究所主任研究員
(〒321-43 真岡市鬼怒ヶ丘5)

** オリエンタル建設(株)技術部研究員

***正会員 工博 九州工業大学教授 工学部 設計生産工学科

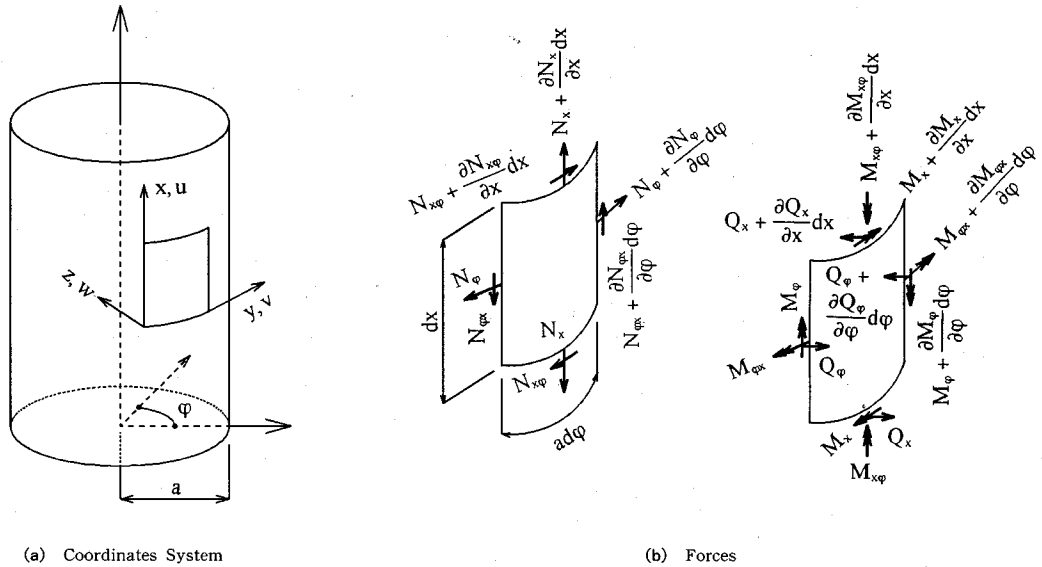


Fig. 1 Coordinates and Forces

方向の最大変位 w_0 に関する4階の常微分方程式を導いた。さらに、 w_0 に関する2階微分の項は微小であるとしてこれを無視することによって、上記の微分方程式が、円筒タンクの軸対称荷重を受けたときのそれと同型になる、すなわち、円筒タンクに対する非軸対称荷重問題を近似的に軸対称荷重問題に置換できることを示した。

本論では、近似的な仮定である上記1)の仮定を捨てても、多少の工夫は要するが、前論で示したのとほぼ同様な方法に従えば、その係数等の形は異なるが、いまの場合についても w_0 に関する4階の微分方程式が得られることを示した。新しく得られた w_0 に関する微分方程式は、軸対称荷重問題の場合のそれと比較して、 w_0 に関する2階微分の項および付加的な等価荷重の項を含む結果となる。等価荷重の項の中には2つの積分定数が含まれているが、この積分定数は側壁下端($x=0$)における w_0 に関する1階~3階微分の値 $w_0^{(1)}$, $w_0^{(2)}$, $w_0^{(3)}$ によって定まるので、上に得られた w_0 に関する微分方程式を厳密に解くためには、 $x=0$ において $w_0^{(1)}=w_0^{(2)}=w_0^{(3)}=0$ を出発値とした繰返し計算が必要になる。しかし、試算の結果、 $x=0$ において $w_0^{(1)}=w_0^{(2)}=w_0^{(3)}=0$ として解を求めても、その結果は実務的な耐震設計として十分な精度の数値解が得られることが判った。また、2階微分の項を含む4階の常微分方程式の数値解析に際して、2階微分の項は軸方向の等価な回転ばねで置換できることを示した^{9),10)}。このようにすればパーソナルコンピュータでも手軽に取り扱うことができる平面骨組解析プログラムを利用することができるので、数値解析が非常に容易に実行できる。さらには、2階微分の項を無視しても、実務的な耐震設計を行う上で、十分な精度で結果が得られることを示し

た。

3. 逆対称荷重が作用する円筒シェルの解析理論

(1) 円筒シェルの釣合方程式^{11)~13)}

Fig. 1 (a) に示すように、 x , y , z 軸をそれぞれシェル面の母線(鉛直)方向、円周方向およびシェル面の内側法線(半径)方向にとる。断面力を Fig. 1 (b) のように定義すると、 a を半径、 p を面垂直荷重として、力の釣合式は次式のように表される。次式で、肩付添字'および ϕ はそれぞれ

$$' = a \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{および} \quad \phi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

を表すものと約束する。

$$N'_x + N_{\phi x} = 0 \quad \dots\dots\dots (1-a)$$

$$N'_\varphi + N'_{x\varphi} - Q_\varphi = 0 \quad \dots\dots\dots (1-b)$$

$$Q'_\varphi + Q'_x + N_\varphi = -pa \quad \dots\dots\dots (1-c)$$

$$M'_\varphi + M'_{x\varphi} - aQ_\varphi = 0 \quad \dots\dots\dots (1-d)$$

$$M'_x + M_{\phi x} - aQ_x = 0 \quad \dots\dots\dots (1-e)$$

式(1)より面外せん断力 Q_x , Q_φ を消去すれば

$$N'_x + N_{\phi x} = 0 \quad \dots\dots\dots (2-a)$$

$$aN'_\varphi + aN'_{x\varphi} - M'_\varphi - M'_{x\varphi} = 0 \quad \dots\dots\dots (2-b)$$

$$aN'_\varphi + M''_x + M'_{x\varphi} + M'_{\phi x} + M'_\varphi = -pa^2 \quad \dots\dots\dots (2-c)$$

(2) 応力-ひずみ-変位の関係^{11),12)}

Fig. 1 (a) に示すように、 u , v , w をそれぞれ鉛直、円周および半径方向の変位、 ϵ_x , ϵ_φ , $\epsilon_{x\varphi}$ をそれぞれ x 方向ひずみ、 y 方向ひずみおよびせん断ひずみ、 κ_x , κ_φ , $\kappa_{x\varphi}$ をそれぞれ x 方向曲率変化、 y 方向曲率変化およびねじり率とすれば、ひずみと変位の関係は以下ようになる。

$$\epsilon_x = \frac{1}{a} u' \dots\dots\dots(3-a)$$

$$\epsilon_\phi = \frac{v' - w}{a} \dots\dots\dots(3-b)$$

$$\epsilon_{xp} = \frac{u' + v'}{a} \dots\dots\dots(3-c)$$

$$\kappa_x = \frac{w''}{a^2} \dots\dots\dots(3-d)$$

$$\kappa_\phi = \frac{w + w''}{a^2} \dots\dots\dots(3-e)$$

$$\kappa_{xp} = \frac{w'}{a^2} \dots\dots\dots(3-f)$$

また、シェルの法線回りの回転を

$$\omega = -\frac{1}{2} \left(\frac{u'}{a} - \frac{v'}{a} \right) \dots\dots\dots(3-g)$$

とし、 ν をポアソン比とすれば、断面力—ひずみ—変位の関係は次式のように得られる。

$$N_x = K(\epsilon_x + \nu\epsilon_\phi) + \frac{D}{a} \kappa_x$$

$$= \frac{K}{a} [u' - \nu(w - v) + kw''] \dots\dots\dots(4-a)$$

$$N_\phi = K(\epsilon_\phi + \nu\epsilon_x) - \frac{D}{a} \kappa_\phi$$

$$= \frac{K}{a} [v' - w + \nu u' - k(w + w'')] \dots\dots\dots(4-b)$$

$$N_{xp} = K \frac{1-\nu}{2} \epsilon_{xp} + \frac{D}{a} \frac{1-\nu}{2} \left(\kappa_{xp} + \frac{\epsilon_{xp}}{2a} + \frac{\omega}{a} \right)$$

$$= \frac{K}{a} \frac{1-\nu}{2} [u' + v' + k(v' + w'')] \dots\dots\dots(4-c)$$

$$N_{\phi x} = K \frac{1-\nu}{2} \epsilon_{xp} - \frac{D}{a} \frac{1-\nu}{2} \left(\kappa_{xp} - \frac{\epsilon_{xp}}{2a} + \frac{\omega}{a} \right)$$

$$= \frac{K}{a} \frac{1-\nu}{2} [u' + v' + k(u' - w'')] \dots\dots\dots(4-d)$$

$$M_x = -D \left(\kappa_x + \nu\kappa_\phi + \frac{\epsilon_x + \nu\epsilon_\phi}{a} \right)$$

$$= -\frac{D}{a^2} [u' + w'' + \nu(v' + w'')] \dots\dots\dots(4-e)$$

$$M_\phi = -D(\kappa_\phi + \nu\kappa_x) = -\frac{D}{a^2} (w + w'' + \nu w') \dots\dots\dots(4-f)$$

$$M_{xp} = -D(1-\nu) \left(\kappa_{xp} + \frac{\epsilon_{xp}}{2a} + \frac{\omega}{a} \right)$$

$$= -\frac{D}{a^2} (1-\nu)(w' + v') \dots\dots\dots(4-g)$$

$$M_{\phi x} = -D(1-\nu) \left(\kappa_{xp} + \frac{\omega}{a} \right)$$

$$= -\frac{D}{a^2} (1-\nu) \left(w' - \frac{u'}{2} + \frac{v'}{2} \right) \dots\dots\dots(4-h)$$

ここに、 E をヤング率、 t を壁厚とすれば

$$K = \text{軸剛性} = \frac{Et}{1-\nu^2}$$

$$D = \text{曲げ剛性} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$k = \frac{D}{Ka^2} = \frac{1}{12} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \dots\dots\dots(4-i)$$

である。

いま、式(4-i)の k の値が最も大きくなるような例として、次のような実規模のPCタンクを考える。容量は $V=100\text{m}^3$ 、水深は $H_0=2.0\text{m}$ とする。したがって、タンクの半径は $a=4.0\text{m}$ となる。この場合、PCタンクの側壁厚は $t=0.25\text{m}$ 程度が必要であるから、式(4-i)の k の値は 3.25×10^{-4} となる。上記の例から判るように、実規模PCタンクの場合、 k の値は1に比べて非常に小さいといえる。したがって以後、本論では k を1に対して省略することにする。

(3) 逆対称荷重が作用した場合の基礎方程式

一般のPCタンクに作用する地震時の荷重として、躯体慣性力と側壁に作用する地震時動液圧を想定すれば、これらはいずれもタンクに対して逆対称荷重であるから、地震作用方向を基準軸とした円周方向の角度を ϕ として、タンクの側壁要素断面 (Fig. 1 (b) 参照) における変位、断面力、外荷重は、その ϕ に関する最大値に対して、次式のように表される。ここに、 N_{x0} 等、 M_{x0} 等、 u_0 等および p_0 は x (円筒タンクの母線方向の座標変数)のみの関数で、下付添字0は ϕ に関する最大値を意味する。

$$\{N_x, N_\phi, N_{xp}, N_{\phi x}, M_x, M_\phi, M_{xp}, M_{\phi x}\}$$

$$= \{N_{x0}\cos\phi, N_{\phi0}\cos\phi, N_{xp0}\sin\phi, N_{\phi x0}\sin\phi,$$

$$M_{x0}\cos\phi, M_{\phi0}\cos\phi, M_{xp0}\sin\phi, M_{\phi x0}\sin\phi\} \dots\dots(5-a)$$

$$\{u, v, w\} = \{u_0\cos\phi, v_0\sin\phi, w_0\cos\phi\} \dots\dots(5-b)$$

$$p = p_0\cos\phi \dots\dots\dots(5-c)$$

つづいて、式(2)に式(5)を代入して、変数 ϕ を分離する。いま、 f を x の関数として、 x に関する n 回微分を肩付添字記号⁽ⁿ⁾を用いて $f^{(n)} = d^n f / dx^n$ のように表すと約束すれば、式(2)の力の釣合式は以下のごとくとなる。

$$N_{x0}^{(0)} + \frac{1}{a} N_{\phi x0} = 0 \dots\dots\dots(6-a)$$

$$N_{xp0}^{(0)} - \frac{1}{a} N_{\phi0} - \frac{1}{a} M_{xp0}^{(1)} + \frac{1}{a^2} M_{\phi0} = 0 \dots\dots\dots(6-b)$$

$$M_{x0}^{(2)} + \frac{1}{a} M_{xp0}^{(1)} + \frac{1}{a} M_{\phi x0}^{(1)} + \frac{1}{a} N_{\phi0} - \frac{1}{a^2} M_{\phi0} = -p_0$$

$$\dots\dots\dots(6-c)$$

また、式(4)に式(5)を代入すると、

$$N_{x0} = K \left[u_0^{(1)} + \frac{\nu}{a} (v_0 - w_0) \right] + \frac{D}{a} w_0^{(2)} \dots\dots\dots(7-a)$$

$$N_{\phi0} = K \left[\frac{1}{a} (v_0 - w_0) + \nu u_0^{(1)} \right] \dots\dots\dots(7-b)$$

$$N_{x\varphi 0} = \frac{1-\nu}{2} K \left(v_0^{(1)} - \frac{1}{a} u_0 - k w_0^{(1)} \right) \dots\dots\dots(7-c)$$

$$N_{\varphi x 0} = \frac{1-\nu}{2} K \left(v_0^{(1)} - \frac{1}{a} u_0 + k w_0^{(1)} \right) \dots\dots\dots(7-d)$$

$$M_{x0} = -D \left[w_0^{(2)} + \frac{1}{a} u_0^{(1)} + \frac{\nu}{a^2} (v_0 - w_0) \right] \dots\dots\dots(7-e)$$

$$M_{\varphi 0} = -D \nu w_0^{(2)} \dots\dots\dots(7-f)$$

$$M_{x\varphi 0} = -D \frac{1-\nu}{a} (v_0^{(1)} - w_0^{(1)}) \dots\dots\dots(7-g)$$

$$M_{\varphi x 0} = -D \frac{1-\nu}{a} \left(-w_0^{(1)} + \frac{1}{2} v_0^{(1)} + \frac{1}{2a} u_0 \right) \dots\dots\dots(7-h)$$

さて、式(6)、(7)に示した基礎式と次節(4)に示す大域的なモーメントの釣合式とを用いて、変位関数 u_0 、 v_0 および断面力 M_{x0} 、 N_{x0} などを消去して、変位関数 w_0 に関する微分方程式を導くことを考える。

式(7-a)、(7-c)より

$$u_0^{(1)} = \frac{1}{K} N_{x0} - \frac{\nu}{a} (v_0 - w_0) - \frac{D}{Ka} w_0^{(2)} \dots\dots\dots(8)$$

$$v_0^{(1)} = \frac{2}{K(1-\nu)} N_{x\varphi 0} + \frac{1}{a} u_0 + k w_0^{(1)} \dots\dots\dots(9)$$

式(7-b)に式(8)を代入して

$$N_{\varphi 0} = K \left[\frac{1-\nu^2}{a} (v_0 - w_0) + \frac{\nu}{K} N_{x0} - \frac{D\nu}{Ka} w_0^{(2)} \right] \dots\dots\dots(10-a)$$

式(7-e)に式(8)を代入し

$$M_{x0} = -D \left(w_0^{(2)} + \frac{1}{Ka} N_{x0} \right) \dots\dots\dots(10-b)$$

上式を2回微分すると

$$M_{x0}^{(2)} = -D \left(w_0^{(4)} + \frac{1}{Ka} N_{x0}^{(2)} \right) \dots\dots\dots(10-c)$$

式(7-g)に式(9)を代入し

$$M_{x\varphi 0} = -D(1-\nu) \left[\frac{2}{K(1-\nu)a} N_{x\varphi 0} + \frac{u_0}{a^2} - \frac{w_0^{(1)}}{a} \right] \dots\dots\dots(10-d)$$

上式を微分した後、これに式(8)を代入すると

$$M_{x\varphi 0}^{(1)} = -D(1-\nu) \left[\frac{2}{K(1-\nu)a} N_{x\varphi 0}^{(1)} + \frac{1}{Ka^2} N_{x0} - \frac{\nu}{a^2} (v_0 - w_0) - \frac{w_0^{(2)}}{a} \right] \dots\dots\dots(10-e)$$

また、 $M_{\varphi x 0}$ 、 $M_{\varphi 0}^{(1)}$ についても同様にして

$$M_{\varphi x 0} = -D(1-\nu) \left[\frac{1}{K(1-\nu)a} N_{x\varphi 0} + \frac{u_0}{a^2} - \frac{w_0^{(1)}}{a} \right] \dots\dots\dots(10-f)$$

$$M_{\varphi 0}^{(1)} = -D(1-\nu) \left[\frac{1}{K(1-\nu)a} N_{\varphi 0}^{(1)} + \frac{1}{Ka^2} N_{x0} - \frac{\nu}{a^2} (v_0 - w_0) - \frac{w_0^{(2)}}{a} \right] \dots\dots\dots(10-g)$$

式(7-f)および式(10)を式(6-b)に代入し、 k を1に対して省略すると

$$-\frac{K}{a^2} (1-\nu^2) (v_0 - w_0) + N_{x\varphi 0}^{(1)} - \frac{\nu}{a} N_{x0} - \frac{D(1-\nu)}{a^2} w_0^{(2)} = 0 \dots\dots\dots(11)$$

(4) 大域的モーメントの釣合式の導入

Fig. 1 (a) の円筒シェルを、 x = 一定の面で切断したとき、切断面より上部のシェルにおいて、外荷重と断面力との間には力の釣合いが成立していることが必要である。いま、円筒シェル断面の中心を通り、外荷重の方向に直角な軸に関する外荷重と断面力とのモーメントの釣合式を書けば、それは次式のように表される。断面力にもとづくモーメントは

$$\int_{-x}^{+x} a^2 N_{x0} \cos^2 \varphi d\varphi - \int_{-x}^{+x} a M_{x0} \cos^2 \varphi d\varphi \dots\dots\dots(12-a)$$

また、外荷重によるモーメントは、 H_0 を水深、 ξ を円筒シェルの側壁上端からの距離とすると

$$\int_0^{H_0-x} \int_{-x}^{+x} a (H_0 - x - \xi) p_0(\xi) \cos^2 \varphi d\varphi d\xi \dots\dots\dots(12-b)$$

であるから、両者を等置することによって

$$a N_{x0} - M_{x0} = \int_0^{H_0-x} (H_0 - x - \xi) p_0(\xi) d\xi \dots\dots\dots(13)$$

いま

$$p_0(x) = \int_0^{H_0-x} (H_0 - x - \xi) p_0(\xi) d\xi \dots\dots\dots(14)$$

とおき、式(13)に式(10-b)を代入すれば次式が得られる。

$$N_{x0} = -\frac{1}{a} [D w_0^{(2)} - P_0(x)] \dots\dots\dots(15)$$

式(15)を微分して式(6-a)に代入すると

$$N_{\varphi x 0} = D w_0^{(3)} - P_0^{(1)}(x) \dots\dots\dots(16-a)$$

式(7-c)から式(7-d)を引いて変形すると

$$N_{\varphi x 0} = N_{x\varphi 0} - \frac{D(1-\nu)}{a^2} w_0^{(1)} \dots\dots\dots(16-b)$$

上記の2式をそれぞれ微分して

$$N_{\varphi x 0}^{(1)} = D w_0^{(4)} - P_0^{(2)}(x) \dots\dots\dots(16-c)$$

$$N_{x\varphi 0}^{(1)} = N_{x\varphi 0}^{(1)} - \frac{D(1-\nu)}{a^2} w_0^{(2)} \dots\dots\dots(16-d)$$

式(9)を微分して、 $u_0^{(1)}$ を求め、その結果を式(8)に代入し、さらに式(15)、(16)を用いれば

$$v_0^{(2)} = \frac{2D}{K(1-\nu)} w_0^{(4)} - 3k w_0^{(2)} - \frac{\nu}{a^2} (v_0 - w_0) - \frac{2}{K(1-\nu)} P_0^{(2)}(x) + \frac{1}{Ka^2} P_0(x) \dots\dots\dots(17)$$

次に、式(11)に式(15)、(16)を代入すると

$$-\frac{K(1-\nu^2)}{a^2}(v_0-w_0)+Dw_0^{(4)}-\frac{D(2-3\nu)}{a^2}w_0^{(2)}-P_0^{(2)}(x)-\frac{\nu}{a^2}P_0(x)=0 \quad \dots\dots\dots(18)$$

式(18)を2回微分して $v_0^{(2)}$ を求めると

$$v_0^{(2)}=\frac{Da^2}{K(1-\nu^2)}w_0^{(6)}-\frac{D(2-3\nu)}{K(1-\nu^2)}w_0^{(4)}+w_0^{(2)}-\frac{a^2}{K(1-\nu^2)}P_0^{(4)}(x)-\frac{\nu}{K(1-\nu^2)}P_0^{(2)}(x) \quad \dots\dots(19)$$

式(18)と式(19)を式(17)に代入し、その結果を2回積分し、 D で除すと

$$w_0^{(4)}-\frac{2(2-\nu)}{a^2}w_0^{(2)}+\frac{12(1-\nu^2)}{(at)^2}w_0=\frac{1}{D}\left[P_0^{(2)}(x)-\frac{2}{a^2}P_0(x)+\frac{1}{a^4}\int_0^x\int_0^x P_0(x)dx dx+ax+\beta\right] \quad \dots\dots(20)$$

ここに、 α, β =積分定数

式(20)が、逆対称荷重が作用する場合の直立円筒シェルに対する支配方程式であり、それはシェルの母線上における半径方向変位の最大値 $w_0(x)$ に関する4階の常微分方程式で表されることとなる。

外力 $p_0(x)$ が与えられれば、上記の微分方程式(20)を解くことにより、円筒シェルの半径方向変位 w_0 を得ることができる。しかし、既に2章で述べたように、同式の右辺には積分定数の α, β が含まれており、それらの値は後述の式(25-a)、(25-b)に示す通り、 $x=0$ における $w_0^{(4)}, w_0^{(2)}$ および $w_0^{(6)}$ の値が与えられて始めて定まる値であるので、式(20)を解くためには、本質的に繰返し計算が必要になる。

ところで、式(20)を導出するのに、大域的モーメントの釣合式(13)を用いたので、釣合式(6-c)は用いる必要がなかった。ここで、式(6-b)の代わりに式(6-c)を用いることも可能で、その場合にも、付録に示した式(付-1)、(付-2)の関係を用いれば、式(20)とまったく同じ微分方程式が得られる。

(5) 積分定数の決定

直立円筒シェルが逆対称荷重を受けたとき、それが剛体運動を起こさないためには、少なくとも側壁下端において、鉛直および円周方向の変位が拘束されていない。すなわち、

$$x=0 \text{ において、 } u_0=0, v_0=0 \quad \dots\dots\dots(22)$$

が成立する。

さて、式(7-c)を変形し、 $[u_0]_{x=0}=0$ であることを考慮すると

$$[v_0^{(4)}]_{x=0}=\frac{2}{K(1-\nu)}[N_{x=0}]_{x=0}+k[w_0^{(4)}]_{x=0} \quad \dots\dots(23)$$

式(20)より $Dw_0^{(4)}$ を求め、式(18)に代入すると

$$\frac{K(1-\nu^2)}{a^2}v_0=\frac{D(2+\nu)}{a^2}w_0^{(2)}-\frac{2+\nu}{a^2}P_0(x)+\frac{1}{a^4}\int_0^x\int_0^x P_0(x)dx dx+ax+\beta \quad \dots\dots(24)$$

式(24)に式(22)を適用すれば

$$\beta=\frac{2+\nu}{a^2}\{P_0(0)-D[W_0^{(2)}]_{x=0}\} \quad \dots\dots\dots(25-a)$$

が得られる。

式(24)を微分して、 $x=0$ とし、さらにこれに式(23)および式(16-a)、(16-b)の関係を用いると

$$\alpha=\frac{\nu}{a^2}\{D[w_0^{(6)}]_{x=0}-P_0^{(4)}(0)\}-\frac{D(1-\nu^2)}{a^4}[w_0^{(4)}]_{x=0} \quad \dots\dots\dots(25-b)$$

が得られる。

4. 等価はりモデル

(1) 等価はりモデル

式(20)を解析的に解くことは、右辺の荷重項が地震時動液圧などを含む複雑な関数形をしていることを考えると、それは困難である。式(20)は、軸力が作用する弾性床上のはりの微分方程式と同型の式であるから、これを弾性床上のはりの問題に置換して考えることができる。

円筒シェルから2本の母線で挟まれる等幅の要素を取り出し、これを1本のはりと考える。円筒シェルは軸(鉛直)方向の剛性を持つと同時に、円周方向の剛性も持っているので、円筒シェルから切り出したはりを、円筒シェルと等価な力学的性質を有するはりに置換する(このようにして置換したはりを、等価はりモデルと呼ぶ)ためには、このはりに円筒シェルが持っている円周方向の剛性を付与しなくてはならない。そのためには、次のようにすればよい^{9),10)}。

式(20)の左辺第2項に D を乗じた後、以下のごとく変形する。

$$\left[\frac{2D(2-\nu)}{a^2}(-w_0)^{(4)}\right]^{(1)} \quad \dots\dots\dots(26)$$

$\phi=(-w_0)^{(4)}$ とおけば、 ϕ は等価はりの軸方向のたわみ角を表すので、上式の [] 内を

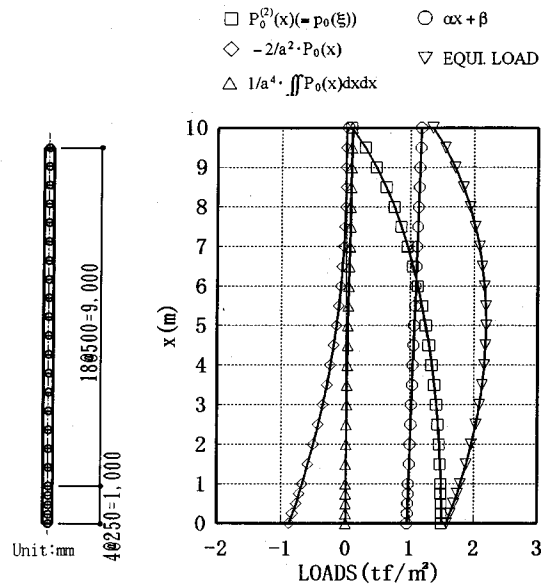
$$M_0=k_0 \cdot \phi \quad \dots\dots\dots(27)$$

と表示すれば、 k_0 は

$$k_0=\frac{2D(2-\nu)}{a^2} \quad \dots\dots\dots(28)$$

と書くことができ、これは等価はりモデルに対する単位面積当たりの回転ばね定数を表すと考えることができる。

式(20)左辺第3項の係数は、等価はりモデルの面に垂直なばねを表していると考えられるので、これに D を乗ずれば垂直ばね定数 k_0 が得られる。



(a) FEM Model (b) Equivalent Loads (right hand of Eq. (20))
Fig. 2 FEM Model and Equivalent Loads

$$k_v = \frac{Et}{a^2} \dots\dots\dots(29)$$

以上のことから、円筒から切り取った等価はりモデルに、式(28)で表される回転ばねおよび式(29)で表される垂直ばねを付与することによって、逆対称荷重が作用する円筒シェルに対する解析モデルとしての等価はりモデルを構成することができることになる。

この等価はりモデルは平面骨組解析プログラムを用いて、容易に数値解析することができるので、FEMによる面倒な円筒シェルの解析を行う必要が無く、実用上非常に便利である。

(2) 断面力の換算

単位幅の等価はりモデルの解析によって得られる変位を w_0 、たわみ角を ϕ 、さらに曲げモーメントを \bar{M}_x 、せん断力を \bar{Q}_x とすれば、これらの値を用いて、円筒シェルの断面力を求めることができる。

式(15)より

$$N_{x0} = -\frac{1}{a} [Dw_0^{(2)} - P_0(x)] = \frac{1}{a} [\bar{M}_x + P_0(x)] \dots\dots\dots(30-a)$$

式(20)より $Dw_0^{(2)}$ を求め、これを式(18)に代入して v_0 を算出し、式(30-a)の N_{x0} とともに式(10-a)に代入すると

$$N_{x0} = -\frac{K(1-\nu^2)}{a} w_0 - \frac{2-\nu}{a} \bar{M}_x - \frac{2}{a} P_0(x) + \frac{1}{a^3} \int_0^x \int_0^x P_0(x) dx dx + a(\alpha x + \beta) \dots\dots(30-b)$$

式(16-a)より

$$N_{x0} = Dw_0^{(3)} - P_0^{(1)}(x) = -\bar{Q}_x - P_0^{(1)}(x) \dots\dots\dots(30-c)$$

上式とたわみ角 ϕ の定義を用いれば、式(16-b)より

$$N_{x0} = -\bar{Q}_x - P_0^{(1)}(x) + \frac{D(1-\nu)}{a^2} \phi \dots\dots\dots(30-d)$$

が得られる。

式(10-b)に式(30-a)を代入し、 k を 1 に対して省略すれば

$$M_{x0} = -D(w_0^{(2)} + \frac{1}{Ka} N_{x0}) = \bar{M}_x - k \cdot P_0(x) \dots\dots\dots(30-e)$$

式(7-f)より

$$M_{x0} = -D\nu w_0^{(2)} = \nu M_x \dots\dots\dots(30-f)$$

式(8)を式(7-b)に代入して u_0 を消去した後、 $v_0 - w_0$ を求め、これを微分して式(7-g)に代入すると

$$M_{x0} = -\frac{D}{K(1+\nu)} \left(N_{x0}^{(1)} - \nu N_{x0}^{(1)} + \frac{D\nu}{a} w_0^{(3)} \right)$$

上式に式(30-a)を微分して代入すれば

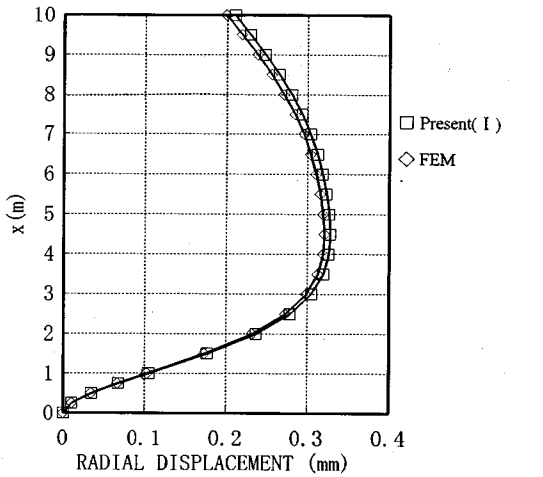
$$M_{x0} = -\frac{D}{K(1+\nu)} \left[\frac{K(1-\nu^2)}{a} \phi - \frac{2+\nu}{a} \bar{Q}_x - \frac{2+\nu}{a} P_0^{(1)}(x) + \frac{1}{a^2} \int_0^x P_0(x) dx + \alpha a \right] \dots\dots(30-g)$$

式(9)を用いて式(7-h)より u_0 を求め、 M_{x0} の場合と同様の方法に従えば

$$M_{x0} = M_{x0} + k \cdot a \cdot N_{x0} \dots\dots\dots(30-h)$$

5. 数値解析結果および考察

3 および 4 章で述べた計算法の妥当性を検証するために、一例として半径 $a=10\text{m}$ 、水深 $H_s=10\text{m}$ 、壁厚 $t=0.25\text{m}$ (等厚)、上端自由の実規模 PC タンクを対象として、I)本論で提案した計算法と、II)1章で述べたようにフーリエ級数展開を利用した軸対称要素による FEM 解析法 (タンクの応力解析用プログラムとして FINAL/TANK—日本電子計算機—を用いた) とを用いて、タンク側壁の変位および断面力を計算し、両者の結果を比較した。II)の方法では、側壁を Fig. 2 (a) に示すように分割した。分割数をさらに多くした場合に対して得られたタンク側壁断面力を、Fig. 2 (a) の分割数によって得られたそれと比較した結果、両者には高々 0.1% の差しか認められなかったので、本論では後者の結果を FEM 解と呼ぶことにして、これを著者らの提案した I) の方法によって求めた解の妥当性を検証するのに用いた。なお、計算例として、上記のようなスケールを有する実規模 PC タンクを選んだ理由は、次の通りである。すなわち、前論⁹⁾で提案した近似解析法による計算誤差は、タンクの半径 a と水深 H_s との比 a/H_s が小さいほど大きくなる傾向があることを考慮した結果、本論では、 a/H_s が $a/H_s=1$ という非常に小さい場合のみについて、計算誤差の検討を行えば十分であると判断したためであ



(a) Radial Displacements w_0

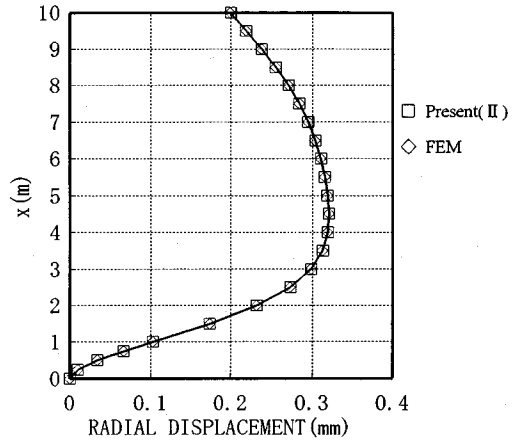
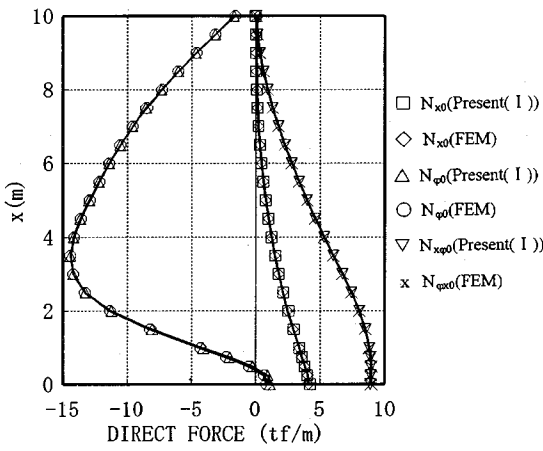
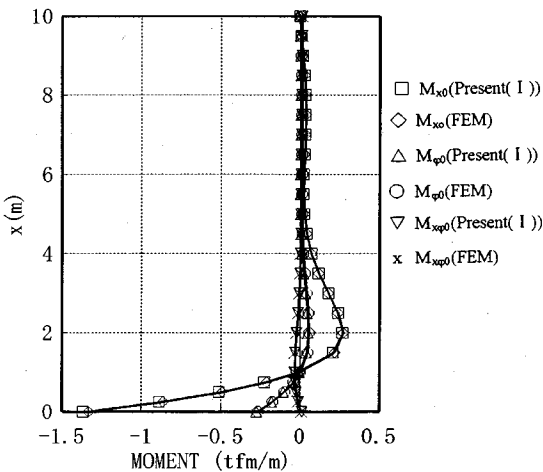


Fig. 4 Radial Displacement w_0 for CASE II with Results by FEM



(b) Direct Forces



(c) Moments

Fig. 3 Numerical Results for CASE I with Those by FEM

る。

円筒タンクに対する外荷重としては、地震時に作用する動液圧のみを考えることにした。動液圧は速度ポテンシャル理論によって求めた衝撃圧（付録の式(付-4)参照）を採用することにして、Fig. 2 (a) の分割における各節点位置での衝撃圧を算出し、節点間ではそれは直線的に変化するとして取扱った。Fig. 2 (b) に式(20)右辺の荷重項を示す。図中、 $ax + \beta$ と EQUI. LOAD については、後述の Case II の場合のそれを示している。液体の単位体積重量は $\gamma = 1.0 \text{ tf/m}^3 (0.01 \text{ MN/m}^3)$ 、水平震度は $k_H = 0.2$ とした。また、コンクリートのヤング係数は $E = 2.8 \times 10^6 \text{ tf/m}^2 (2.8 \times 10^4 \text{ MPa})$ 、ポアソン比は $\nu = 0.2$ とした。なお、本論の数値解析における等価はりモデルの分割は、FEM 解析の場合のそれと同じとした。また、式(28)に示した回転ばねは各節点に対する集中ばねとして、式(29)に示した垂直ばねは分布ばねとして等価はりモデルに付与した。

数値計算は以下の 3 Case について行った。

Case I : 側壁下端の変形がすべての方向において拘束されている構造（固定）で、 $x=0$ において $w_0^{(1)} = w_0^{(2)} = w_0^{(3)} = 0$ として積分定数 a, β を定めた場合。このときの解を、図中においては PRESENT (I) と表す。

Case II : 上記 Case I で得られた $x=0$ における $w_0^{(1)}$, $w_0^{(2)}$ および $w_0^{(3)}$ の値を用いて積分定数を修正し、以後同様にして繰返し計算を行うことにより積分定数 a, β を定めた場合。このときの解を、図中においては PRESENT (II) と表す。

Case III : 式(20)左辺第 2 項の 2 回微分の項を無視し、軸対称荷重問題の形にして解析した場合。このと

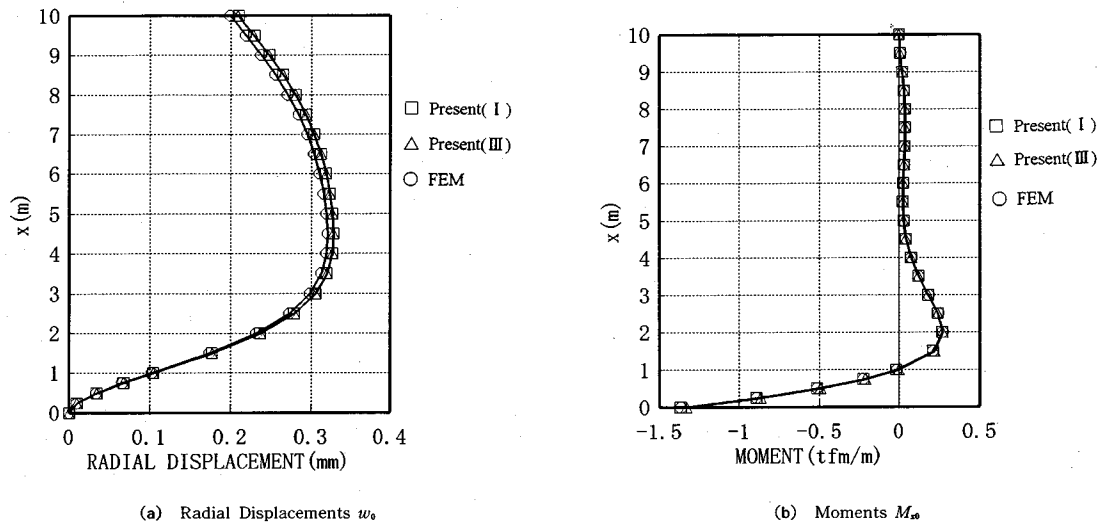


Fig. 5 Radial Displacements and Vertical Moments for CASE I and III with Those by FEM

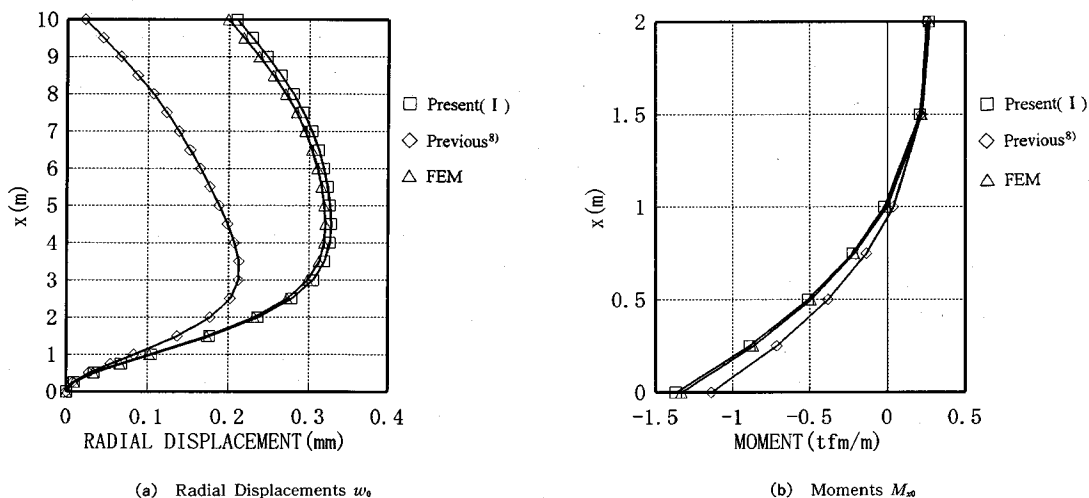


Fig. 6 Comparison of Results for CASE I between Present and Previous Theories with Results by FEM

きの解を、図中においては PRESENT (III) と表す。

Case I : わが国で一般的な、側壁下端のすべての方向の変形が底版により拘束されている固定構造を有する PC タンクについての計算を行うのに際し、側壁下端における w_0 の 1 階～3 階の微分項は小さいとしてこれを無視した。すなわち、 $x=0$ において $w_0^{(1)}=w_0^{(2)}=w_0^{(3)}=0$ として計算を行った。

Case II : Case II では、Case I の計算で得られた $w_0(x)$ を用いて、新たに算出した $x=0$ における $w_0^{(1)}$ 、 $w_0^{(2)}$ および $w_0^{(3)}$ の値を初期値として採用し、積分定数 α 、 β を定めるための繰返し計算を行って得た結果を、FEM 解および Case I の結果と比較することにより、Case I の精

度について検討する。

Case III : 式 (20) の左辺第 2 項が数値計算結果に与える影響は小さいと考えられるので、これを無視することによって、軸対称荷重問題の形にして取扱ったときの精度について検討する。

Fig. 3 (a), (b), (c) に Case I の結果と FEM 解の結果とを対比して示す。いずれの断面力についてもそれぞれ対応する FEM 解によく一致していることが判る。同図 (a) の w_0 については、壁の上部にゆくにつれて両者の結果に僅かな差を生じているが、これは積分定数 α 、 β の決定において、側壁下端 ($x=0$) における $w_0^{(1)}$ 、 $w_0^{(2)}$ および $w_0^{(3)}$ を無視したことがその原因である。この場合の w_0 の相対誤差 ((本論の解 - FEM 解) / FEM 解) の最大

値は、2.3%であった。

Fig. 4にCase IIの場合の変位 w_0 の結果を、FEM 解の結果と対比して示す。本論の解とFEM 解とは非常によく一致しており、この場合の w_0 の相対誤差は0.03%である。また、このときの積分定数 α, β を定めるための繰返し計算回数は1回であった。本章のPCタンクとはスケールの異なるいくつかのPCタンクに対する計算結果から、一般に、積分定数 α, β を定めるための繰返し計算は、高々1回実行するだけで、実用上十分な精度の解が得られるといってもよい。

Fig. 5 (a) は w_0 について、Fig. 5 (b) は M_{x0} について、それぞれ Case I, Case III, FEM 解の結果を対比して示したものである。Case III の結果を Case I および FEM 解の結果と比べることにより、 w_0 の2回微分の項(式(20)左辺第2項)、すなわち、回転ばねの項の影響は非常に小さいといえる。したがって、実規模のPCタンクが非軸対称な地震荷重をうける場合については、これを軸対称荷重問題として取扱っても良いといえる。

Fig. 6 (a), (b) は、前論⁹⁾の近似算法を用いて求めた結果のうち、特にその精度が比較的良くなかった w_0 と M_{x0} の値について、これらを Case I および FEM 解析の結果と対比して示したものである。Fig. 6 (a) から判るように、 w_0 については Case I と FEM 解とは非常によく一致しており、本論の理論解は前論⁹⁾の近似解に比べて格段に精度が高いといえる。Fig. 6 (b) はその計算誤差が大きく表われるPCタンク側壁下端部付近の M_{x0} を示したものであるが、 M_{x0} についても、Fig. 6 (a) の w_0 と全く同様なことがいえる。因みに、 M_{x0} に対する相対誤差の最大値は、前論の場合-14.5%、Case I の場合2.7%、Case II の場合0.7%である。

6. 結論

本論で得られた結果をまとめると以下のとおりである。

(1) 地震時動液圧などの軸に逆対称な荷重を受ける円筒形PCタンクの断面力を、容易に求めることができる理論式(側壁の法線方向変位に関する4階の常微分方程式)を導いた。

(2) 上述の微分方程式を数値解析する方法として、等価はりモデルを利用する方法を提案した。このモデルを用いると、今日ではパーソナルコンピュータで誰でもが利用することのできる平面骨組解析プログラムを用いた数値解析法を適用することができて、実用上非常に便利である。

(3) 高い精度で行ったFEM解析によって得られた値と本論で導いた理論式を用いて求めた値はよく一致することを示した。さらには、本論の理論式を数値計算するときに必要な繰返し計算は、高々1回の繰返し計算で非

常に高い精度で解が収束することを示した。

(4) 逆対称荷重が作用する円筒形PCタンク側壁断面力を求めるのに、本論で導いた理論式(20)において、その左辺第2項(等価はりモデルに付与する回転ばねに相当する)の影響は小さいので、これを無視し、式(20)を軸対称荷重問題の形で解析しても、実務的な耐震設計上、十分な精度が得られることを示した。

付 録

外荷重については

$$P_0(x) = \int_0^{H_0-x} (H_0-x-\xi) p_0(\xi) d\xi \dots\dots\dots(14)$$

であるから

$$P_0^{(1)}(x) = - \int_0^{H_0-x} p_0(\xi) d\xi \dots\dots\dots(付-1)$$

$$P_0^{(2)}(x) = p_0(H_0-x) \dots\dots\dots(付-2)$$

となる。

また、外荷重が速度ポテンシャル理論に従う衝撃圧の場合には、その具体的な形は、以下のように表される。

$$P_0(x) = \gamma \cdot k_H \cdot a \left[\frac{(H_0-x)^2}{2} - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{k_s^2-1} \cdot \frac{1}{\cosh\left(k_s \frac{H_0}{a}\right)} \cdot \left\{ \frac{a}{k_s} (H_0-x) \sinh\left(k_s \frac{H_0}{a}\right) + \left(\frac{a}{k_s}\right)^2 \left[\cosh\left(k_s \frac{x}{a}\right) - \cosh\left(k_s \frac{H_0}{a}\right) \right] \right\} \right] \dots\dots\dots(付-3)$$

$$P_0^{(2)}(x) = \gamma \cdot k_H \cdot a \left[1 - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{k_s^2-1} \frac{\cosh\left(k_s \frac{x}{a}\right)}{\cosh\left(k_s \frac{H_0}{a}\right)} \right] \dots\dots\dots(付-4)$$

$$\int_0^x \int_0^x P_0(x) dx dx = \gamma \cdot k_H \cdot a \left[\frac{(H_0-x)^4}{24} + \frac{H_0^3}{6} x - \frac{H_0^4}{24} - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{k_s^2-1} \left\{ \frac{a}{k_s} \tanh\left(k_s \frac{H_0}{a}\right) \left[\frac{(H_0-x)^3}{6} + \frac{H_0^2}{2} x - \frac{H_0^3}{6} \right] + \left(\frac{a}{k_s}\right)^2 \left[\frac{1}{\cosh\left(k_s \frac{H_0}{a}\right)} \cdot \left(\cosh\left(k_s \frac{x}{a}\right) - 1 \right) - \frac{x^2}{2} \right] \right\} \right] \dots\dots\dots(付-5)$$

ここに γ : 液体の単位体積重量

k_H : 円筒シェルに対する水平震度

k_s : $J_0^{(1)}(k_s) = 0$ を満足する正根。 $J_1(\quad)$ は第 1 種第 1 次のベッセル関数。肩付添字記号⁽¹⁾ は微分を表す。

参 考 文 献

- 1) 鈴木素彦・吉岡民夫：上水用 PC タンクの現状と問題点，プレストレストコンクリート，Vol.20, No. 5, pp. 5~13, 1978 年 10 月。
- 2) 池田尚治：PC 円形建造物の現況，最近のプレストレストコンクリート建造物と 30 年の歩み，プレストレストコンクリート技術協会，pp. 31~40, 1980 年 6 月。
- 3) 北村八朗ほか：わが国初の 14 万 kℓ PCLNG タンクの建設，コンクリート工学，Vol. 31, No. 4, pp. 42~56, 1993 年 4 月。
- 4) 日本水道協会：水道用プレストレストコンクリートタンク標準仕様書，1980 年 3 月。
- 5) 中国四国農政局土地改良技術事務所：PC タンクの設計，1991 年 3 月。
- 6) Creasy, L. R.: Prestressed Concrete Cylindrical Tanks, John Wiley & Sons Inc.
- 7) 吉岡民夫・久松光世・出光隆：ハンテを有する壁下端固定 PC タンクの断面力簡易計算法，土木学会論文集，No. 433/V-15, pp. 81~90, 1991. 8.
- 8) 吉岡民夫・大谷悟司・高西照彦：PC タンクの地震時応力の近似計算法，構造工学論文集，Vol. 37A, pp. 1297~1307, 1992 年 3 月。
- 9) 吉岡民夫・大谷悟司・高西照彦：直接基礎 PC タンク底版の断面力計算法，構造工学論文集，Vol. 38A, pp. 1287~1296, 1992 年 3 月。
- 10) 吉岡民夫・大谷悟司・高西照彦：逆対称荷重を受ける直接基礎 PC タンク底版の断面力計算法，構造工学論文集，Vol. 38A, pp. 1211~1220, 1992 年 3 月。
- 11) 倉西正嗣：弾性学，国際理工研究社，pp. 482~505.
- 12) 坪井善勝：曲面構造—シェルの理論とその応用，丸善，pp. 271~277.
- 13) チモシェンコ他：板とシェルの理論（下），ブレイン図書出版，pp. 404~pp. 490.

(1994. 2. 25 受付)

THEORETICAL METHOD OF STRESS ANALYSIS IN PRESTRESSED CONCRETE CYLINDRICAL TANKS SUBJECTED TO ANTI-SYMMETRIC LOADINGS

Tamio YOSHIOKA, Satoshi OHTANI and Teruhiko TAKANISHI

An analytical method of stresses in prestressed concrete cylindrical tanks is proposed, in case that they are subjected to anti-symmetric loadings such as hydrodynamic pressures and inertia forces. Ordinary differential equation of 4th order with respect to the radial displacement of cylindrical tanks is deduced from replacing one of the fundamental equilibrium equations on circular cylindrical shell by a global equilibrium equation of bending moment of the tank wall. It is shown that this ordinary differential equation is equivalent to the differential equation which governs deformation of a beam supported by vertical and rotational springs. The differential equation on the beam deduced above is easily analyzed by using general computer program for frame works. It is clarified that the stress in cylindrical tank walls subjected to anti-symmetric loadings can be approximately treated as that of axi-symmetric loadings by neglecting minor terms in the differential equation on the beam supported by springs.