

# ケーブルの高次振動モードの固有振動数測定値からの張力測定法について

島田忠幸\*

本論文は、ケーブルの高次モードの固有振動数から張力を測定することを目的として、ケーブルのサグ・傾斜・曲げ剛性を考慮したケーブル振動の特性方程式を導き、測定精度についての考察を行った。この結果、高次振動次数から推定した張力は十分なる精度を有することが判明し、この方法を用いれば常時微動法が適用できるので、長さの長いケーブルに対しても加振する必要がなくなり、迅速な測定ができることを示した。

**Key Words** : cable, tension, vibration method, measurement

## 1. 緒言

ケーブルの固有振動数を測定して張力を求めるいわゆる振動法は、測定が簡便であることから吊り形式の橋梁の施工管理に適用されることが多い。とくに、最近は長大スパンの斜張橋の建設が盛んになっており、この斜張橋ケーブルの張力測定に振動法の適用が定着しつつある。

ケーブルの振動数の測定は、自然風などの外乱によって常時微動しているケーブルの振動波形を加速度計で測定し、フーリエ解析して求める方法が簡便である。測定した振動数からの張力の算定については、曲げ剛性・ケーブルサグ・傾斜角などの諸元の影響の大きくなる領域を区分し、一次あるいは二次の振動モードを対象とした実用算定式の提案<sup>1)</sup>がなされており、現状ではこの算定式を適用して測定が行われている。

しかし、常時微動法からケーブルの振動数を測定する場合、風等の外乱によってケーブルは高次モードのスペクトルが強調されて、低次モードのスペクトルが現れないことが多い。このときは、ケーブルに強制加振を与えて低次モードの振動数を測定することが必要になる。加振機を用いてケーブルを加振することは作業上問題が多く、実際は人力で加振がなされている。しかし、長いケーブルを人力で加振しようとするとき、加振点はケーブルの下側に限定されるので、一次あるいは二次の満足な振動モードを得ることが容易でない。

さらに、振動数の低い時系列波形をフーリエ解析して振動数を求めるとき、サンプリング定理から決定されるデータの読みとり時間は振動数に反比例するので、長いケーブルではこの読みとり時間が長くなる。最近の斜張橋の架設工事では、温度が一定の夜間に張力の測定とし

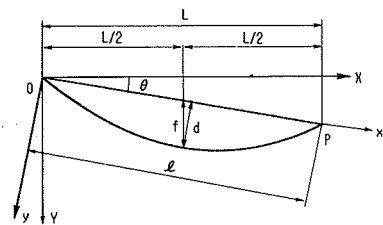


図-1 解析モデル

ム調整を行い、翌日はつぎの作業に入る工法が計画される。ケーブル本数が多い場合、データの読みとり時間が長いことは測定の迅速性に影響を与える。

このような問題に対処するため、ケーブルのサグ・傾斜・曲げ剛性を考慮したケーブルの特性方程式を導き、小型可搬式の計算機を用いて、高次振動モードの固有振動数の測定値からケーブル張力を測定する方法について考察を行った。これによって、常時微動法が完全に適用できるので、測定時間の短縮が期待できる。さらに、固有振動数は高次振動モードの方が測定精度が高いので、測定張力の精度の向上も期待できる。

本論は、振動法によるケーブル張力の測定法の改善を目的として、これらの問題について考察した結果の報告である。

## 2. 張力計算法

### (1) 特性方程式の誘導

#### a) 基礎振動方程式

図-1のようにケーブル両端の支持点をOおよびPとし、点Oを基点として重力方向をY軸、水平方向をX軸、X軸と直線OPのなす角度を $\theta$ （時計方向：正）とする。さらに、OP方向をx軸、OPに対して直角方向をy軸（下向き：正）とし、ケーブルはy方向にだけ振動するものとする。

\* 正会員 石川島検査計測（株）  
（〒135 東京都江東区豊洲1-2-40）

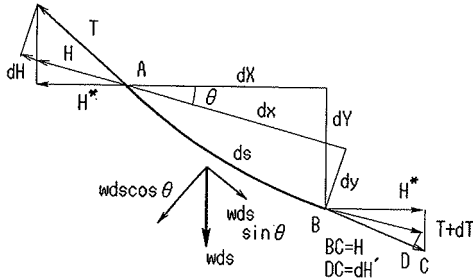


図-2 静的つり合い

最初に、 $xy$ 座標系におけるケーブル形状を求める。図-2のようにケーブルの軸線に沿った距離を  $s$  とし、微少要素 AB の点 A ( $s, y(s)$ ) でのケーブルの接線方向の張力:  $T$ 、点 B ( $s+ds, y(s+ds)$ ) での接線方向の張力:  $T+dT$  とする。ケーブルの  $X$  方向の張力を  $H^*$  とすると、 $H^*$  は位置に関係なく一定である。 $H$  を式 (1) で定義すると

$$H = H^* / \cos \theta \dots \dots \dots (1)$$

$H$  も位置に関係なく一定となる。 $T$  と  $H$  の関係は

$$T \frac{dx}{ds} = H + dH \dots \dots \dots (2)$$

$$(T + dT) \frac{dx}{ds} = H - dH' \dots \dots \dots (3)$$

となる。ここで、 $dH, dH'$  は  $w \cdot ds \cdot \sin \theta$  による  $x$  方向の変化分とする。

いま、ケーブルのサグは十分小さいとし、

$$\frac{dx}{ds} = 1 \dots \dots \dots (4)$$

と仮定する。微少要素 AB の  $y$  方向の釣合を考えると

$$(T + dT) \frac{dy(s+ds)}{ds} - T \frac{dy(s)}{ds} + w \cdot ds \cdot \cos \theta + w \cdot ds \cdot \sin \theta \frac{dy(s)}{ds} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

となる。 $w \cdot ds \cdot \sin \theta (dy/ds)$  は  $dH, dH'$  の関係項のうち消されるので、 $y$  方向のつりあいには関係しない。式 (5) から

$$H \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -w \cos \theta \dots \dots \dots (6)$$

を導く。つまり、 $dx = ds$  と仮定すると、ケーブルは  $xy$  座標系で放物線となることがわかる。 $H$  が求まると、 $dH, dH'$  はケーブル形状から求まる。

厳密には式 (5) には曲げ剛性の項が入る。しかし、振動法にて張力を算定するときに、ケーブル形状が問題となるのはケーブル径に比して長さの長い場合であり、このときは曲げ剛性がケーブル形状や静的な力のつり合いに及ぼす影響は小さいことから、その影響は考えていない。

ケーブルは  $y$  方向に振動することから、 $xy$  座標系で

動的つり合いを考える。任意時間  $t$  のケーブルの動的変位を  $v(s, t)$ 、このときの張力を  $T+r(t)$  とし、変位  $v(s, t)$  のときの動的つり合いを考えると、

$$\frac{\partial}{\partial s} \{ (T+r(t)) \frac{\partial}{\partial s} (y(t)+v(s, t)) \} - EI \frac{\partial^4 v(s, t)}{\partial s^4} = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 v(s, t)}{\partial t^2} - w \cos \theta \dots \dots \dots (7)$$

ただし、ここではケーブル径に比して長さの短いケーブルをも対象とするため、曲げ剛性 ( $EI$ ) を考慮する。

付加張力  $r(t)$  の  $x$  方向の分力を  $h(t)$  とし、式 (4) の仮定を考慮して、高次の微少項を省略すると、式 (7) は

$$H \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + h(t) \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \dots \dots \dots (8)$$

となる。ケーブル形状は式 (6) で示したように  $xy$  座標系で放物線となるので

$$y = \frac{4d}{l^2} x(l-x) \dots \dots \dots (9)$$

とおく。ここで

$$d = \frac{wl^2}{8H} \cos \theta \dots \dots \dots (10)$$

とする。式 (10) を式 (8) に代入すると

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{w}{gH} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{H} \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = \frac{8dh(t)}{l^2 H} \dots \dots \dots (11)$$

を得る。式 (11) がケーブルの  $xy$  座標系での振動方程式となる。

傾斜角が  $90^\circ$  に近づくと、 $H^*$  は  $0$  に近づくので、式 (1) で  $H$  の定義はできないが、斜張橋・ニールセン橋のケーブルでは、このように傾斜角が極端に大きくなる場合は生じない。

傾斜角が完全に  $90^\circ$  になると  $T$  と  $H$  は方向が一致し、 $d=0$  となる。このときは式 (11) の右辺は  $0$  となるので、ケーブルのサグの影響は消失する。

b) 境界条件の設定

ケーブル変位:  $v(x, t)$  および、付加張力:  $h(t)$  は、ケーブルの固有円振動数:  $\omega$  の周期関数として表すことができる。

$$v(x, t) = v^*(x) e^{i\omega t} \dots \dots \dots (12)$$

$$h(t) = h^* e^{i\omega t} \dots \dots \dots (13)$$

したがって、式 (11) は

$$\frac{\partial^2 v^*(x)}{\partial x^2} - \frac{w}{g} \frac{\omega^2}{H} v^*(x) - \frac{EI}{H} \frac{\partial^4 v^*(x)}{\partial x^4}$$

$$= \frac{8dh^*}{l^2 H} \dots\dots\dots (14)$$

となる。式 (14) の解を

$$v^*(x) = A \sinh(m_1 x) + B \cosh(m_1 x) + C \sin(m_2 x) + D \cos(m_2 x) + E^* \dots\dots\dots (15)$$

とおく。ここで

$$m_1^2 = \beta^2 + (\beta^4 + \gamma^4)^{1/2} \dots\dots\dots (16)$$

$$m_2^2 = \beta^2 - (\beta^4 + \gamma^4)^{1/2} \dots\dots\dots (17)$$

$$\beta^2 = \frac{H}{2EI} \dots\dots\dots (18)$$

$$\gamma^4 = \frac{w\omega^2}{gEI} \dots\dots\dots (19)$$

つぎに、未定定数  $A \sim D, E^*$  を決定する境界条件、適合条件について考える。まず、境界条件により  $A \sim D$  を  $E^*$  で表すことを考える。ケーブルの曲げ剛性を考慮した解析を行う場合、両端の境界条件が一つの重要なパラメータとなる。Ramberger の研究<sup>2)</sup>ではいくつかの境界条件について考察を加えている。山口ら<sup>3)</sup>は、完全可撓性ケーブルとの対比を考えて、境界条件としては両端ピン支持の場合を考えている。しかし、ケーブルの両端を剛支持と考えても、ケーブルが完全可撓性に近づく場合は曲げ剛性の影響が小さくなるので、両端ピン支持の状態に近づく。斜張橋ケーブルの端部はソケットで剛支持されており、ケーブル径に比して長さが長いので、完全可撓性に近い。したがって、端部を剛支持としても両端ピン支持の状態に近づく。

両端剛支持の場合の境界条件は

$$x=0 \text{ のとき } v^*(x) = 0 \dots\dots\dots (20)$$

$$x=l \text{ のとき } v^*(x) = 0 \dots\dots\dots (21)$$

$$x=0 \text{ のとき } \frac{dv^*(x)}{dx} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

$$x=l \text{ のとき } \frac{dv^*(x)}{dx} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

式 (20)~(23) より  $A \sim D$  を  $E^*$  で解くと

$$A = (E^*/\Phi) [m_1 m_2 \sinh(m_1 l) \{1 - \cos(m_2 l)\} + m_2^2 \sin(m_2 l) \{1 - \cosh(m_1 l)\}] \dots\dots\dots (24)$$

$$B = (E^*/\Phi) [m_1 m_2 \{-\cosh(m_1 l) + \cos(m_2 l) - 1 + \cosh(m_1 l) \cos(m_2 l)\} + m_2^2 \sinh(m_1 l) \sin(m_2 l)] \dots\dots\dots (25)$$

$$C = (E^*/\Phi) [m_1 m_2 \sin(m_2 l) \{1 - \cos(m_1 l)\} + m_2^2 \sinh(m_1 l) \{1 - \cos(m_2 l)\}] \dots\dots\dots (26)$$

$$D = (E^*/\Phi) [m_1 m_2 \{\cosh(m_1 l) - \cos(m_2 l) - 1 + \cosh(m_1 l) \cos(m_2 l)\} - m_1^2 \sinh(m_1 l) \sin(m_2 l)] \dots\dots\dots (27)$$

ここで

$$E^* = \frac{8gd}{w\omega^2 l^2} h^* \dots\dots\dots (28)$$

$$\Phi = 2m_1 m_2 \{1 - \cos(m_2 l) \cosh(m_1 l)\} - (m_2^2 - m_1^2) \sinh(m_1 l) \sin(m_2 l) \dots\dots\dots (29)$$

$\Phi=0$  は、曲げと軸張力を受ける梁の特性方程式となる。

以上、係数  $A \sim D$  を  $h^*$  を用いて表示した。 $h^*$  は未知であるので、適合条件式を用いて  $h^*$  の消去を試みる。

c) 適合条件式の適用

静的なつり合い状態にある長さ:  $ds$  の微小部分において、 $x, y$  方向の投影長さを  $dx, dy$  とし、ケーブルが  $y$  方向に  $v(x, t)$  変位したことによる長さの変化を  $\Delta s$ 、 $y$  方向の投影を  $dy + dv(x, t)$  とする。 $\Delta s$  と張力の変化:  $r(t), r(t)$  の  $x$  方向の分力:  $h(t)$  の間には

$$\frac{\Delta s}{ds} = \frac{r(t)}{EA} = \frac{h(t)}{EA} \frac{ds}{dx} \dots\dots\dots (30)$$

の関係がある。ここで、 $A$ : ケーブルの断面積

式 (30) と適合条件式<sup>4)</sup>より

$$\frac{h}{EA} \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 = \frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \dots\dots\dots (31)$$

が導ける。これより

$$\frac{h(t)}{EA} L_e = \frac{8d}{l^2} \int_0^l v(x, t) dx \dots\dots\dots (32)$$

を得る。ここで

$$L_e = l \left\{ 1 + 8 \left(\frac{d}{l}\right)^2 \right\} \dots\dots\dots (33)$$

式 (32) に式 (12) を代入すると

$$\frac{h^* e^{i\omega t}}{EA} L_e = \frac{8d}{l^2} \int_0^l \{A \sinh(m_1 x) + B \cosh(m_1 x) + C \sin(m_2 x) + D \cos(m_2 x) + E^*\} e^{i\omega t} dx \dots\dots (34)$$

式 (24)~(27) を上式に代入すると、 $h^* e^{i\omega t}$  が消去され式 (35) を得る。

$$\Phi \frac{L_e H}{EA} - \left(\frac{8d}{l}\right)^2 \frac{1}{(m_2 l)^2} (Q + R + l\Phi) = 0 \dots\dots\dots (35)$$

ここで

$$Q = 2m_2 \sinh(m_1 l) \{\cos(m_2 l) - 1\} + 2(m_2^2/m_1) \sin(m_2 l) \{\cosh(m_1 l) - 1\} \dots\dots (36)$$

$$R = m_1 \{-2 \sin(m_2 l) + 2 \cosh(m_1 l) \sin(m_2 l)\} + (m_1^2/m_2) \sinh(m_1 l) \{2 \cos(m_2 l) - \cos^2(m_2 l) - 1 - \sin^2(m_2 l)\} \dots\dots\dots (37)$$

式 (35) が求める特性方程式となる。計算は、最初に仮定した張力を基に測定振動数から張力を求めて仮定張力と比較し、その差が 0.01% 以下になるまで繰り返し計算を行うが、計算は 4 回の繰り返しで収束する。この計算は小型可搬式の計算機を用いることによって容易に計算できる。式 (35) は振動次数に無関係に測定振動数から張力が算定でき、これによって常時微動法にて張力が測定できるので、ケーブル加振の必要がなくなる。

なお、ケーブルが完全可撓に近くなると  $m_1$  は  $\infty$  となるので、式 (35) の両辺は  $m_1$  で除しておく。サグが

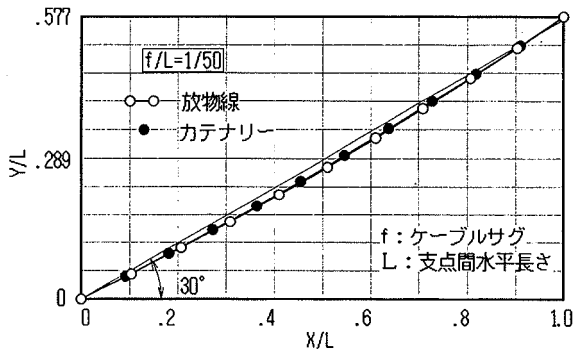


図-3 ケーブル形状の比較 (傾斜角: 30°)

ないケーブルでは、 $d=0$  であるので式 (35) は  $\Phi=0$  となる。これは曲げと軸張力を受ける梁の特性方程式と一致する。完全可撓性ケーブルでは、 $m_1=\infty$ 、 $m_2=有限$  となる。

サグのないときは  $d=0$  であるから式 (35) は

$$\sin(m_2 l) = 0 \dots\dots\dots (38)$$

となり弦の式と一致する。これは式 (22), (23) の設定を行っても、完全可撓性ケーブルの解が得られることを示している。

(2) ケーブルの形状仮定の影響

式 (35) を導く際、ケーブル形状は本来カテナリーとなるところを放物線と仮定した。しかし、サグの大きいケーブルは傾斜角が大きくなると対称性がくずれて放物線との間に形状の差が生じてくる。このようなことから、カテナリーと放物線の形状比較を行った。

図-3 は傾斜角: 30°, サグ比: 1/50 のときの形状の比較であり、このときは両者はほぼ一致している。ただし、グラフは横軸、縦軸ともに  $L$  で除して無次元で表示した。

後述する図-7 のケーブルは、設計張力は約 800 tf であり、張力: 300 tf のときのサグ比は約 1/77 である。このことより、サグ比: 1/50 は通常の斜張橋ケーブルとしては十分大きい値であることがわかる。

図-4 は傾斜角 60° のときの比較である。傾斜角が大きくなると、若干の差異がみられる。しかし、傾斜角が大きくなると両者とも直線に漸近することがわかる。

ケーブル形状の仮定としては、

$$\frac{\partial s}{\partial x} \doteq 1 \dots\dots\dots (39)$$

の仮定が基本となる。この誤差はケーブル位置にて変化するるので、誤差の平均的な値として

$$1 - \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\partial s}{\partial x} dx \dots\dots\dots (40)$$

を定義すると、この値は式 (39) の仮定による誤差の一つの目安と考えることができる。この値がサグ比と傾斜角によってどのように変化するかを計算してみる。

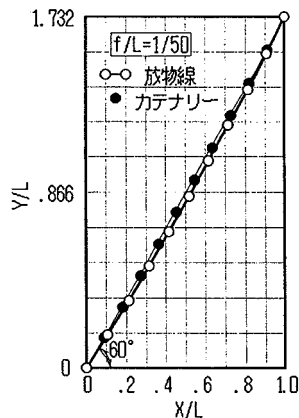


図-4 ケーブル形状の比較 (傾斜角: 60°)

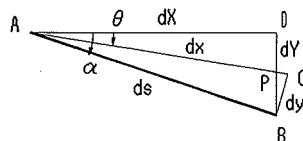


図-5 ケーブル要素

図-5 において、ケーブル微小要素の  $X, Y$  方向の成分を  $dX, dY$  とし、点  $A$  での接線角を  $\alpha$  とする。

$$dY/dX = \tan \alpha \dots\dots\dots (41)$$

$$dx = AP + PC$$

$$= dX \sec \theta - dX \sin \theta (\tan \theta - \tan \alpha) \dots\dots\dots (42)$$

となるので

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial X} \times \frac{1}{\sec \theta - \sin \theta (\tan \theta - \tan \alpha)} \dots\dots\dots (43)$$

となる。ここで、カテナリーの基本式<sup>5)</sup>より

$$\frac{\partial s}{\partial X} = \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2} \dots\dots\dots (44)$$

$$Y = \frac{H^*}{w} \cosh\left(\frac{w}{H^*} X + C_1\right) + C_2 \dots\dots\dots (45)$$

ただし、 $H^*$ : ケーブルの水平張力。  $C_1, C_2$  は

$$X=0 \text{ のとき, } Y=0$$

$$X=L \text{ のとき, } Y=L \tan \theta$$

より求まる。したがって、

$$\frac{dY}{dX} = \sinh\left(\frac{wL}{H^*} \frac{X}{L} + C_1\right) = \tan \alpha \dots\dots\dots (46)$$

が求まるので、式 (45), (46) から式 (43) が求まり、式 (40) が計算できる。

図-6 はサグ比をパラメータとして傾斜角が変化したときの計算結果を示した。傾斜角が大きくなると直線に近くなることからこの誤差は減少することがわかる。さらに、サグ比が大きくなるとこの誤差は減少する。

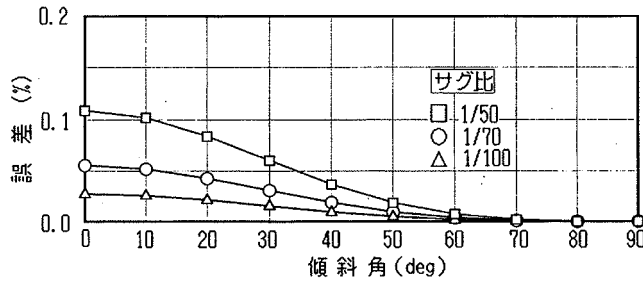


図-6  $(\partial s/\partial x)$  の平均誤差

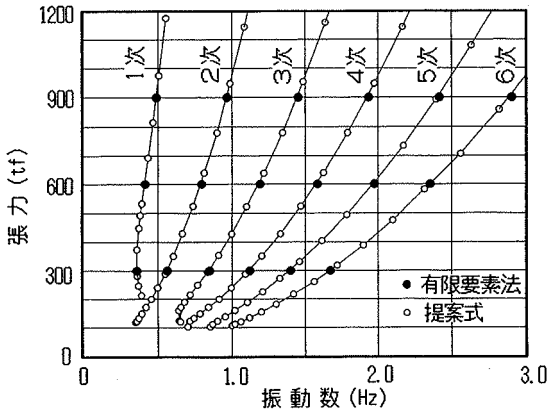


図-7 有限要素法との比較 (傾斜角: 23°)

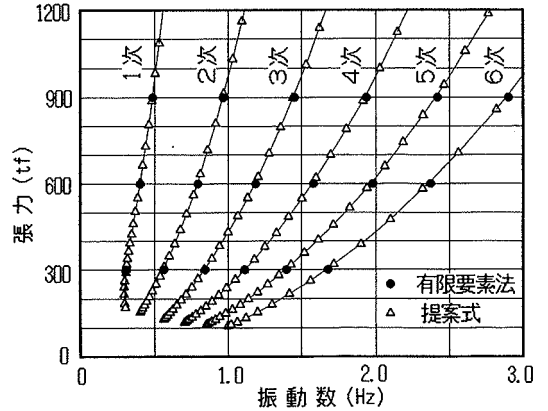


図-8 有限要素法との比較 (傾斜角: 60°)

### 3. 高次モードを用いたときの測定精度

振動法では、測定が簡便である反面、測定精度に対する考察が必要になる。ケーブルの張力測定精度に影響を与える要因としては、入力するケーブル諸元の精度、計算法、境界条件等のほかに、振動数の分解能による影響が重要となる。ここでは、本方法によってケーブル張力を測定するときの測定精度について考察を行う。

#### (1) 計算精度

本方法の計算精度を調べるために、式(35)による計算結果と有限要素法による計算結果の比較を示す。計算を行ったケーブルは、主塔間隔：約600mの斜張橋の最上段ケーブルである。具体的なケーブル諸元を以下に示す。

- 支点間距離 ( $l$ ) : 301.867m
- 単位長さ重量 ( $w$ ) : 0.1049 tf/m
- 断面積 ( $A$ ) : 0.012969 m<sup>2</sup>
- 曲げ剛性 ( $EI$ ) : 38.804 tf·m<sup>2</sup>
- 弾性係数 ( $E$ ) :  $2.0 \times 10^7$  tf/m<sup>2</sup>
- 傾斜角 ( $\theta$ ) : 23°, 60°

曲げ剛性は文献<sup>1),6)</sup>のデータを参考にした。この場合は、ケーブル径に比較して長いので曲げ剛性の設定誤差は張力に大きな影響を与えない<sup>7)</sup>。

計算は、 $H=300, 600, 900$  tfについて式(1)より

$H^*$ を求め、 $H^*$ からケーブル形状を求めて有限要素法に入力した。なお、有限要素法では分割数を40とし、節点間を直線として梁要素による計算を行った。

図-7は傾斜角: 23°の場合であり、傾斜角の影響を調べるため、傾斜角: 60°の場合を図-8に示した。計算結果は $H$ と振動数で整理した。図-7, 8より、提案式による値はいずれの場合も有限要素法の結果とよく一致していることがわかる。

計算精度のさらに詳細な比較を行うため、有限要素法との誤差比較を図-9, 10に示した。傾斜角: 23°の場合、サグ比が大きくなると誤差が大きくなっている。これは、図-6に示したように、サグ比が大きくなると $\partial s/\partial x$ の誤差が大きくなることが考えられる。

振動次数については、一次振動は誤差が大きく高次になると誤差の減少が見られる。これは、式(32)の振動モードの積分において、次数が大きくなると形状仮定による誤差が打ち消されるためであり、高次振動数から張力を求めると計算精度の向上することがわかる。

傾斜角: 23°と比較して、傾斜角: 60°では誤差減少の傾向が見られ、次数間の差異も見られない。傾斜角が大きくなるとケーブルが直線に近づくので、形状の影響が少なくなるものと考えられる。

以上の結果より、有限要素法との誤差は図-6の結果と定性的によく対応していることがわかる。高次振動数

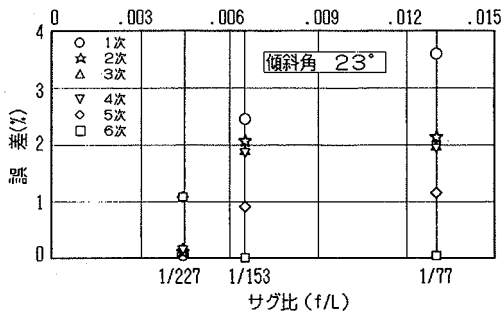


図-9 有限要素法との誤差 (傾斜角: 23°)

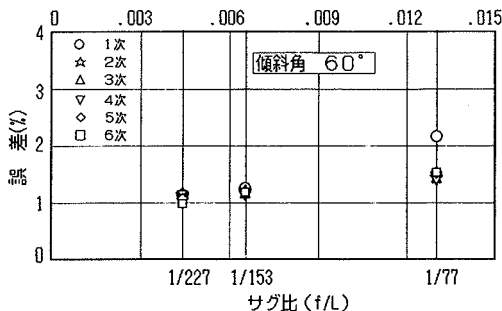


図-10 有限要素法との誤差 (傾斜角: 60°)

から張力を測定するとき、有限要素法との誤差は1.6%になる。

文献<sup>1)</sup>では、サグ、傾斜角が振動数に与える影響度がある値以内に抑えるような無次元パラメータ  $\Gamma$  が定義されており、 $\Gamma < 3$  の領域では二次振動から張力を算定することが提案されている。ここでは、サグ・傾斜角が振動数に与える影響度の範囲として実用的見地から2%とされている。振動数2%の誤差は張力に換算すると約4%に相当する。本方法では有限要素法との誤差が1.6%になることから、従来法と比較して計算精度はかなり改善されていると言える。なお、傾斜角23°で張力: 300tfのとき、 $\Gamma$ は0.77となり、斜張橋ケーブルとしては張力が非常に低い領域である。このような領域でも、高次振動数から張力を測定するときは実用上問題とならない計算誤差になることから、斜張橋ケーブルに適用するかぎり、提案式の適用範囲はとくに問題にならないと言える。

(2) 振動数の分解能の影響

図-7, 8の結果からも明らかなように、次数が大きくなるにつれて曲線の傾斜が緩やかになっている。つまり、低次モードよりも高次モードから張力を算定する方が振動数の分解能の影響による誤差が低減することがわかる。つぎに、これについて考察を加える。

通常、振動数はケーブル振動の時系列波形をフーリエ解析して求める。時系列波形をA/D変換するときの

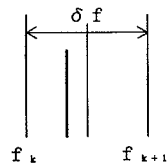


図-11 振動数の分解幅

サンプリング時間を  $\Delta t$ 、解析すべき現象の中に含まれる各成分のうちの最大周波数を  $f_{max}$  とすると、サンプリング定理<sup>8)</sup>より

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t} \dots \dots \dots (47)$$

が  $f_{max}$  より大きくなるように  $\Delta t$  を選ぶ必要がある。

ここで、 $f_N$ : ナイキスト周波数

データのサンプリング数を  $N$ 、データの読みとり時間を  $T_*$  とすると

$$T_* = N \cdot \Delta t \dots \dots \dots (48)$$

となる。つまり、一定サンプリング数のデータを読み込むとき、振動数が低くなると読みとり時間が長くなる。このことから、低次モードより高次モードで測定する方が読みとり時間が短くなるのがわかる。

フーリエ変換後の振動数は

$$\delta f = \frac{2 \cdot f_N}{N} \dots \dots \dots (49)$$

おきのとびとびの値となる。いま、図-11に示すように、振動数  $f_k$  と  $f_{k+1}$  の間にスペクトルのピークがあるとし、

$$\delta f = f_{k+1} - f_k \dots \dots \dots (50)$$

とする。スペクトルのピークが  $f_{k+1}$  と  $f_k$  の1/2より小さいときは振動数は  $f_k$  に、大きいときは  $f_{k+1}$  とみなされるので、振動数の測定誤差:  $\Delta f$  は

$$\Delta f = \frac{\delta f}{2} = \frac{f_N}{N} \dots \dots \dots (51)$$

となる。

ここで、測定張力を  $T$ 、張力の測定誤差を  $\Delta T$  とし、振動法による測定誤差を

$$\left| \frac{\Delta T}{T} \right| = C_1 \left| \frac{\Delta w}{w} \right| + C_2 \left| \frac{\Delta f}{f} \right| + C_3 \left| \frac{\Delta l}{l} \right| + C_4 \left| \frac{\Delta EI}{EI} \right| \dots \dots (52)$$

で表わす。

$$\left| \frac{\Delta T_2}{T} \right| = C_2 \left| \frac{\Delta f}{f} \right| \dots \dots \dots (53)$$

とすると、ケーブル長さが直径に比して十分長いときは、 $T$  は近似的に  $f$  の自乗に比例するので、 $C_2 \approx 2$  となる。したがって、

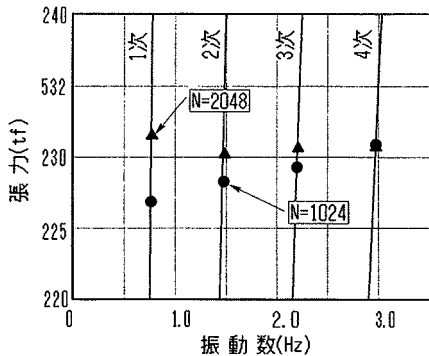
$$\left| \frac{\Delta T_2}{T} \right| \approx 2 \times \left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \frac{f_N}{f} \times \frac{1}{N} \dots \dots \dots (54)$$

となる。折り返し現象を避けるために通常、 $f_N$  を  $f_{max}$  の1.5~2倍<sup>9)</sup>大きく選び、それ以上はハイパスフィルターでカットする。いま  $f_N = 2 \times f_{max}$  とすると

表一1 Δf/fの測定張力への影響

最大周波数: f <sub>MAX</sub> の次数	測定振動数: fの次数	サンプリング数: N		
		1024	2048	4096
一 次	一 次	0.39	0.20	0.10
	二 次	0.78	0.39	0.20
二 次	一 次	0.39	0.20	0.10
	二 次	1.17	0.59	0.29
	三 次	0.59	0.29	0.15
三 次	一 次	0.39	0.20	0.10
	二 次	1.56	0.78	0.39
	三 次	0.78	0.39	0.20
四 次	一 次	0.52	0.26	0.13
	二 次	0.39	0.20	0.10
	三 次	0.39	0.20	0.10

単位 %



図一12 サンプリング数と次数の影響

$$\left| \frac{\Delta T_2}{T} \right| = 4 \times \frac{f_{\max}}{f} \times \frac{1}{N} \dots\dots\dots (55)$$

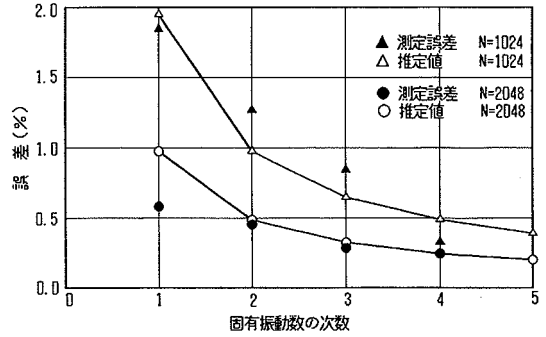
となる。f<sub>max</sub>を測定する最大次数の振動数より若干大きい値を考えると、振動数の測定精度による張力の測定精度は最大周波数と測定振動数の比率、さらにサンプリング数によって変化することがわかる。

具体的な計算例として、最大周波数の次数とサンプリング数をパラメーターとした張力の測定精度を表一1に示した。

当然ながら、サンプリング数が多いほど測定精度は高く、測定次数が最大周波数に近いほど精度は向上する。最大次数の決定には表一1の結果を参考とすることができる。

精度比較の一例として、下記諸元の斜張橋ケーブルにおいて、サンプリング数を1024と2048にしたときの測定精度の対比結果を図一12に示す。

- 支点間距離 (L) : 114.275 m
- 単位長さ重量 (w) : 0.0815 tf/m
- 断面積 (A) : 0.00974 m<sup>2</sup>
- 曲げ剛性 (EI) : 38.8 tf・m<sup>2</sup>



図一13 誤差比較

傾斜角 (θ) : 34.2°

弾性係数 (E) : 2.0 × 10<sup>7</sup> tf/m<sup>2</sup>

図中、実線は1次から4次モードについて、振動数を逐次変化させて式(35)から求める張力をプロットした。●▲印は、サンプリング数が1024と2048のときの測定振動数を基に算定される張力を示す。

図一12より、一次振動数の場合、サンプリング数:1024のときの張力は、サンプリング数2048より求められる張力との間に約2%の差異がみられるが、高次振動になるにつれてその差異は減少し4次振動ではほとんど一致すること、またサンプリング数2048のときは一次から4次振動数とも張力はほぼ一致していることがわかる。

図一13は、図一12と式(55)の対比を示す。図一12は4次までの値を示しているが、計測時のf<sub>max</sub>は5次の振動数に近い値になっている。このため、式(55)のf<sub>max</sub>は5次の振動数とした。測定誤差の算出は、真値が未知であるので、N=2048のときの4次振動の張力を基準にして誤差を求め、この値に式(55)から求まる、N=2048、f<sub>max</sub>/f=5/4とした|ΔT<sub>2</sub>/T|の値を加算した。

図一13の結果は式(55)とよく対応しており、式(55)から誤差が推定できることが分かる。サンプリング数を4096にしても、これ以上の精度の向上は得られなかった。この理由として、|ΔT<sub>2</sub>/T|はサンプリング数に反比例するので、このときの誤差の低減がサンプリング数を1024から2048にしたときの誤差の1/2になることと、この低減が入力したケーブル諸元の精度および計測精度の影響と比較して顕著な効果とならないことが考えられる。実用的にはサンプリング数は2048で十分と考えられる。

低次モードから張力を測定する従来法でも、振動次数判別の必要性から、通常は4次程度までのスペクトルを計算させて、サンプリング数:1024として一次または二次の振動数を求めている。本方法はこの場合と比較して張力の測定精度が1%程度改善されていると考えられる。

表-2 張力測定誤差

影響因子	誤差(%)	誤差算出条件
計算誤差	1.6	有限要素法と比較
$C_1   \Delta w/w  $	1.0	$\Delta w/w=0.01$
$C_2   \Delta f/f  $	0.2	$N=2048$
$C_3   \Delta l/l  $	0.2	$\Delta l/l=0.001$
$C_4   \Delta EI/EI  $	0.0	$\Delta EI/EI=0.1$
誤差の総和	3.0	

(3) 総合精度

式(52)をもとに、斜張橋ケーブルを対象として総合的な測定精度について考察を行う。

測定精度に影響を与える  $|\Delta w/w|$ 、 $|\Delta l/l|$ 、 $|\Delta EI/EI|$  を一律に想定することは難しいが、

$$|\Delta w/w|=0.01$$

$$|\Delta l/l|=0.001$$

$$|\Delta EI/EI|=0.1$$

程度とする。ケーブル長さが直径に比して長いときは、 $C_1=1.0$ 、 $C_2=2.0$ 、 $C_3=2.0$ 、 $C_4=0$ となる<sup>7)</sup>。表-2はこのような想定のもとでの誤差の推定値を示す。

誤差の総和は3%となるが、それぞれの誤差は正または負の符号をもっており、これらが互いに打ち消し合うことを考えると、実際はこの値よりも小さくなるものと思われる。

斜張橋ケーブルでは曲げ剛性の精度はそれほど重要にはならないが、ニールセン橋の端部のケーブルでは、径に比して長さが短いので  $C_4$  が大きくなり、ケーブルの曲げ剛性を正確に評価することが重要になる。

このケーブルの曲げ剛性の評価を載荷試験で行うとき、載荷点でケーブルに角折れが生じるので、正確な値を求めることが容易でない<sup>7)</sup>。さらに、ケーブルは張力によって撚りの状態が変化し、この撚りの状態が素線間の摩擦に影響を与えるので、厳密には曲げ剛性は張力によって変化する<sup>7)</sup>。このようなことから、特定ケーブルを対象として張力の直接測定とキャリブレーション測定を併用して行くと、より信頼性の高い計測が可能になる<sup>10)</sup>。

ケーブルの張力測定は完成時もあることながら、架設時のキャンパー形状の精度管理に重要になる。文献<sup>11)</sup>では、斜張橋(主塔間隔:360m)ケーブルのシム調整を実施するときの、キャンパーの収束過程の計算例が報告されている。ここでは、ケーブル張力の誤差を3%、最終的な張力の管理値を8%(ケーブルの想定設計張力の5%相当)、キャンパーの許容誤差を30mmと想定されている。

このときの張力誤差を3%より大きくすると最終的な張力の管理値が8%より大きくなるか、ケーブルの想定設計張力が5%以下になる。前者はキャンパーの

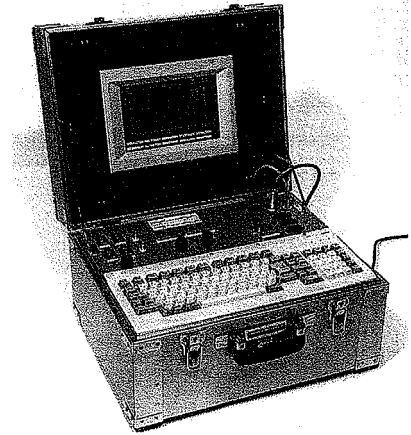


写真-1 測定器

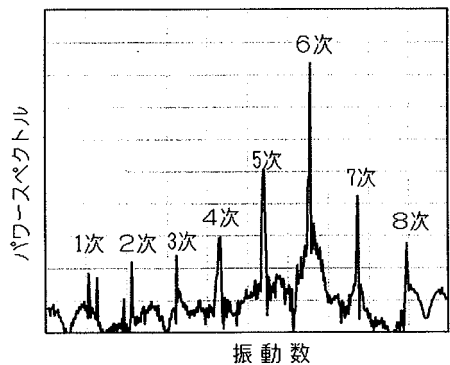


図-14 スペクトル測定例

精度に影響し、後者は作業性に影響する。このように考えると張力誤差は少なくとも3%は必要と思われる。本方法はこのような要求を満足すると考えるが、表-2からも明らかなようにこの場合、ケーブル重量の精度が重要になる。

4. 測定法

測定された振動数から式(35)を用いて張力を算定するとき、計算機の利用が必要になる。写真-1は実験的に試作した測定器を示す。

3.にて述べたごとく、振動数の測定精度は最大周波数( $f_{max}$ )に関係するが、この値は個々のケーブルで異なる。このため、本測定器ではケーブル諸元と設計張力からこの値を計算させて自動的に設定できるようにした。図-14は常時微動法から求めたスペクトルの測定例を示す。この場合、6次振動のスペクトルが大きくなっている。高次のスペクトルがさらに大きくなって、1次または2次のスペクトルが全く現れない場合もある。図-14より、常時微動法による場合高次振動の方が精度良く振動数を計測できることは明らかである。



このようなことから、加速度ではなく変位からスペクトルを求めて、低次モードから張力を算定する方法も報告されている。しかし、図-7, 8に示したように、この場合は  $\Delta T/\Delta f$  が大きいので振動数の計測誤差による張力の算定精度が大きく低下する。

図-14の場合、1次と2次モードにて二つのスペクトルがみられる。これは、隣接ケーブルのスペクトルが計測されたためであるが、低次モードから張力を算定するとき、これらの判別が困難となる。しかし、高次モードから算定した張力と比較することによって、対象とするスペクトルの判別が容易にできる。

## 5. ま と め

常時微動法を適用して高次モードの固有振動数からケーブル張力を求めるときの測定法について考察を行った。解決された実測上の問題点についてまとめを行う。

- ① ケーブルのサグ・傾斜・曲げ剛性を考慮したケーブル振動の特性方程式を導いた。これによって、高次モードの固有振動数から張力を求めることができるので、常時微動法の完全な適用が可能となり、ケーブルを加振しないで測定ができる。
- ② 計算結果を有限要素法と比較することによって、サグと傾斜角が計算誤差に及ぼす影響について考察を行った。サグの大きい領域でも高次振動数から張力を測定することで、提案式の精度は十分なことを示した。
- ③ フーリエ解析を行って固有振動数を求めるとき、サンプリング数と振動次数が張力の精度に及ぼす影響について考察を行った。サンプリング数が2048であれば異なる振動次数の振動数から求めた張力がほぼ一致することを示した。
- ④ 計測条件を想定して本方法の総合的な測定精度について示した。
- ⑤ フーリエ解析を行って固有振動数を求めるとき、

長さの長いケーブルでは振動数が低くなり、データの読みとり時間が長くなる。しかし、高次振動数より張力を求めることが可能になったことより、データの読みとり時間が短縮でき、迅速な測定ができる。

謝 辞：本研究をまとめるにあたり、摂南大学工学部・頭井 洋教授から有益な助言を頂きました。ここに厚くお礼を申し上げます。

## 参 考 文 献

- 1) 新家 徹・広中邦汎・頭井 洋・西村春久：振動法によるケーブル張力実用算定式について、土木学会論文報告集，第294号，1980年2月。
- 2) Ramberger, G. : Die Bestimmung der Normalkräfte in Zuggliedern über ihre Eigenfrequenz unter Berücksichtigung verschiedener Randbedingungen, der Biegesteifigkeit und der Dämpfung, Stahlbau 10/1978.
- 3) 山口宏樹・宮田利雄・伊藤 学：曲げ剛性を考慮したケーブルの面内線形自由振動，土木学会論文報告集，第319号，pp. 13~19, 1982年3月。
- 4) A. ハウラネック・O. シュタインハルト：鋼橋の理論と計算，pp. 371, 三海堂。
- 5) 川田忠樹：吊橋の設計と施工，p. 183, 理工図書。
- 6) 新家 徹・広中邦汎・頭井 洋・湊 理宙：ニールセン橋の斜材張力調整に関する一手法，神戸製鋼技報，Vol. 27, No. 1, 1974。
- 7) 島田忠幸・西村 昭：振動法によるケーブル張力測定値への曲げ剛性の影響，土木学会論文集，第398号/I-10, 1988年10月。
- 8) 日野幹雄：スペクトル解析，pp. 185, 朝倉書店，1992年。
- 9) J. S. ベンダット，A. G. ピアソル：ランダムデータの統計的処理，p. 226, 培風館，1990年。
- 10) 橋梁振動研究会編：橋梁振動の計測と解析，技報堂，1993年10月。
- 11) 古川浩平・井上幸一・中山弘隆・石堂一成：多目的計画法を用いた斜張橋の架設時精度管理システムに関する研究，土木学会論文集，第374号/I-6, 1966年10月。  
(1994.1.6 受付)

## ESTIMATING METHOD OF CABLE TENSION FROM NATURAL FREQUENCY OF HIGH MODE

Tadayuki SHIMADA

Measuring bridge cable tension by a so-called vibration method is very convenient. However, to estimate the tension from low frequency modes, excitation often becomes necessary. To improve the method, this paper presents a method for estimating cable tension from high frequency modes by the exact solution of the cable vibration considering the effect of flexural rigidity, cable sag and inclination of the cable. Using a personal computer, the tension can be estimated on site by micro-tremor method exactly and speedily.