

数値ラプラス変換と有限要素法を用いた弾性波動問題の一解法

岩崎英治*・林 正**

外力等が衝撃的に作用したときの局所的で短時間の応力波の挙動を、数値計算により求めるには多くの計算時間を要する。また、このような高周波成分を含んだ応答を対象としてラプラス変換・逆変換を数値的に行う方法に、FFTを用いた方法が提案されているが、その精度等に関する検討は行われていない。そこで、本論文は、数値ラプラス変換・逆変換の精度の検討を行ない、数値ラプラス変換・逆変換と有限要素法を用いて弾性体の波動伝播問題を精度良く解くための手法を提案し、その精度について考察している。

Key Words : numerical Laplace transform, Finite Element Method, elastodynamics, wave propagation, FFT

1. まえがき

波動伝播問題は、外力等が衝撃的に作用したときの波の伝播を扱うものであり、応力波伝播の局所的で短時間の挙動を、数値計算により求めるには、多くの計算量を要する。この問題を解く数値解法には多くの方法があるが、空間座標と時間座標の扱い方の違いに着目すると、代表的な解法に以下のような方法がある。

空間座標に関しては差分法、有限要素法や境界要素法があり、開領域を対象とする場合には境界要素法が優れているが、不均質で形状の複雑な問題では有限要素法の方が容易に扱える長所を有している。

また、時間座標に関しては、ニューマーク法や中央差分法などの直接時間積分法、モード解析により複数の1自由度系の問題に変換した後にデュアメル積分や前述の直接時間積分法を用いる方法などがある。直接時間積分法は、汎用性に優れ実用的な解法であるが、不連続な応力波の伝播挙動を正確に求めることは難しい。また、波動の局所的な挙動を知るためには空間座標の分割を非常に多くしなければならず、モード解析による方法では、固有値を求めるのに多くの計算を要する。

周知のように、時間に関してラプラス変換を適用すると、運動方程式から時間に関する微分項が消え、変換された像空間での解を解析的に解くことが容易になることが少なくなく、この解を逆変換することにより波動伝播問題の解が得られる。しかし、この逆変換は、一般に複雑なものになり、逆変換を行えないこともあるため、近似的に逆変換する方法も提案されている¹⁾。

ラプラス変換を用いる方法は、変換された運動方程式や境界条件式に、時間に関する微分項が無い場合、像空

間での解を有限要素法などで数値的に得ることも容易になり、Narayanan と Beskos^{2), 3)}、足立ら⁴⁾は、骨組構造の像空間での運動方程式の一般解を用いて動的応答解析を行っている。著者ら⁵⁾は、静的解析で一般的に用いられる骨組部材の変位関数を用いて、過渡応答解析を行い、良好な数値結果を得ている。また、草間ら⁶⁾は粘弾性問題、Chen ら⁷⁾は熱伝導問題に数値ラプラス逆変換を用いている。

数値ラプラス変換と逆変換には種々の方法があるが、解の時刻歴応答値が必要な場合や、ある時刻での解だけが必要な場合、また、変換または逆変換のどちらか一方か両方を数値的に行う場合などにより解法を選択する必要がある。本論文で扱う波動伝播問題では、ラプラス変換した運動方程式と境界条件式の数値解を有限要素法により求め、この解を数値的に逆変換することにより一連の時刻での解を求める。このとき、外力が時間の関数であるときには、これを像空間に数値変換しておく必要がある。このような条件を満たす数値ラプラス変換・逆変換の手法として、ラプラス変換とフーリエ変換の類似点に着目してFFTを用いた手法^{8)~11)}がある。この方法は、一連の時刻での関数値の変換と一連の変換パラメータに対する像関数値の逆変換を高速に行える。前述の Narayanan と Beskos^{2), 3)}は数値ラプラス変換・逆変換に Durbin の方法⁹⁾、足立ら⁴⁾は Krings と Waller の方法¹⁰⁾を用いている。また、熱伝導問題を扱った Chen ら⁷⁾も Durbin の方法⁹⁾を用いている。しかし、FFTを用いた数値ラプラス変換・逆変換の適用性や精度に関する検討はあまり行われておらず、また各手法の比較も行われていない。

そこで、本論文は、既往の手法を包括するようなFFTを用いた数値ラプラス変換・逆変換に関する一般的な定式化を行い、その適用性と精度に関する検討を行う。また、既に文献12)に、数値ラプラス変換・逆変換と有限要素法を用いた2次元弾性体の数値解法を示しているが、

* 正会員 工博 長岡技術科学大学助手 工学部建設系
(〒940-21 新潟県長岡市上富岡町1603-1)

** 正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部建設系

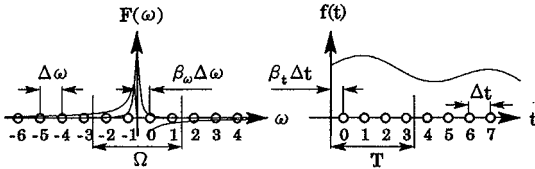


図-1 ωとtの離散点 (N=4の場合)

精度に関する検討を行っていないので、本論文は数値ラプラス変換・逆変換のパラメータや有限要素法の要素数が精度に与える影響について、数値計算例により考察し、本解法は直接時間積分法のような数値的不安定性がなく、不連続に変化する応力を精度良く計算できることを示す。

2. 数値ラプラス変換・逆変換

(1) ラプラス変換・逆変換

関数 $f(t)$ を t についてラプラス変換した関数を $F(s)$ とすると、ラプラス変換と逆変換は、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st} ds \quad (t > 0) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

上式の逆変換の積分は、複素平面上で直線 $s = \alpha$ に沿って実行され、実定数 α は、像関数 $F(s)$ の全ての特異点の右側にあるように設定しなければならない。そこで、変換パラメータ s の実部を一定値 α 、虚部を ω で表し、以後、像関数 $F(s)$ を $F(\omega)$ と表示する。また、式(1)の第1式の積分を、適当な間隔 T で区切り、第2式の積分も同様に間隔 Ω で区切って、それぞれの式をさらに変形すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} f(t+nT)e^{-(\alpha+i\omega)(t+nT)} dt \\ f(t) &= \frac{e^{\alpha t}}{2\pi} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega+n\Omega)e^{i(\omega+n\Omega)t} d\omega \end{aligned} \right\} (2)$$

(2) 離散化とFFTを用いた数値計算法

式(2)を数値的に扱うために、 ω と t を離散的な値で表す必要がある。そこで、 ω と t を、次のように間隔 Ω, T 内に N 個の等間隔な離散点を取るように配置する。

$$\left. \begin{aligned} \omega \equiv \omega_k &= (k + \beta_\omega)\Delta\omega, \quad t \equiv t_m = (m + \beta_t)\Delta t \\ (k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \infty) \end{aligned} \right\} (3)$$

ここに、 $\Delta\omega, \Delta t$ はそれぞれ、 $\Omega/N, T/N$ で与えられる。また、 β_ω, β_t は適当な定数である。

ここで、上式の Ω と T は独立に与えられるものであるが、FFTのアルゴリズムを使用するために、 $\Omega T = 2\pi N$ の関係があるものとする。この関係式より、 $\Delta\omega$ は、 $\Delta\omega = 2\pi/T$ と表される。

式(2)の第1式の ω 、第2式の t が式(3)のような離散点をとるものとする。また、上述の関係を用いて式の変形を行うと次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} F(\omega_k) &= \int_0^T \hat{f}(t)e^{-(\alpha+i\omega_k)t} dt \\ f(t_m) &= \frac{e^{\alpha t_m}}{2\pi} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \hat{F}(\omega)e^{i\omega t_m} d\omega \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

ここに、 $\hat{f}(t), \hat{F}(\omega)$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\pi i \beta_\omega} e^{-n\alpha T} f(t+nT) \\ \hat{F}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2n\pi i \beta_t} F(\omega+n\Omega) \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

式(4)の第1式の被積分関数の $t=0$ と T での値はそれぞれ、 $\hat{f}(0), \hat{f}(0) - f(0)$ となり、 $f(0) = 0$ ならば被積分関数の $t=0$ と T での値は等しくなる。また、第2式の被積分関数は $\omega = -\Omega/2$ と $\Omega/2$ で同じ値になる。そこで、式(4)の被積分関数を、積分区間内の関数が積分区間以外でも周期的に繰り返される関数の一部と考えると、 $F(\omega_k)$ と $(e^{\alpha t_m}/2\pi)^{-1} f(t_m)$ はそれぞれ $\hat{f}(t)e^{-(\alpha+i\beta_\omega\Delta\omega)t}$ と $\hat{F}(\omega)e^{i\omega\beta_t\Delta t}$ のフーリエ係数とフーリエ級数を表していることになり、式(4)の逆の関係式より、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}(t) &= \frac{e^{\alpha t}}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k)e^{i\omega_k t} \\ \hat{F}(\omega) &= \frac{T}{N} \sum_{m=0}^{\infty} f(t_m)e^{-(\alpha+i\omega)t_m} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

連続な関数をフーリエ級数で表現すると、項数を多くするほど原関数に収束していくが、不連続点を有する関数では、ギブスの現象として知られているように、不連続点近傍で関数が乱れ、一様に収束しない。 $f(0)$ がゼロでない場合には、式(4)の第1式の被積分関数の $t=0$ と T での値は、 $f(0)$ の大きさの不連続が生じるために、式(6)の第1式により求めた $\hat{f}(t)$ は、 $t=0$ と T 付近で、一様収束しない。

式(6)の第1式を t 、第2式を ω に関して離散化し、前述の関係を用いて変形を行うと次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}(t_m) &= \frac{e^{\alpha t_m}}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{F}(\omega_k)e^{i\omega_k t_m} \equiv \mathcal{L}^{-1} \hat{F}(\omega_k) \\ \hat{F}(\omega_k) &= \frac{T}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{f}(t_m)e^{-(\alpha+i\omega_k)t_m} \equiv \mathcal{L} \hat{f}(t_m) \\ (m &= 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \end{aligned} \right\} (7)$$

ここに、演算子 $\mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1}$ はそれぞれ、上式による演算操作を表わすものとする。

式(7)を、さらに変形すると離散フーリエ変換・逆変換式が得られ、FFT¹³⁾に関する既存のプログラムライブラリを利用して数値ラプラス変換・逆変換が容易に行える。

(3) 既往の方法との比較

関数 $f(t)$ は、物理的な諸量なので、実関数に限定することができる。このとき、像関数には $\bar{F}(s) = F(\bar{s})$ の関係が存在している。ここに、 \bar{s} は s の共役複素数である。Durbin⁸⁾とWilcox⁹⁾は、このような関係を用いた数値逆変換の方法を示している。この場合には共役性を考

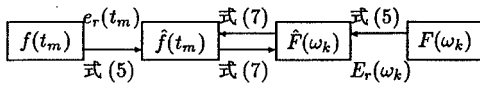


図-2 数値ラプラス変換・逆変換の手順

慮したFFTが必要なため、Wilcoxは共役性を考慮したFFTのアルゴリズムも示している。

ω と t の離散点の設定方法に着目すると、Durbin⁹⁾、KrigsとWaller¹⁰⁾による方法は、本文で新たに導入したパラメータ β_ω, β_t をそれぞれゼロとおいたものに、Wilcoxによる方法は $\beta_\omega=(1-N)/2, \beta_t=1/2$ とおいたものに、そして、 $\beta_\omega=-N/2, \beta_t=0$ とおくと井上・上林ら¹¹⁾による設定方法に一致する。また、KrigsとWaller, Wilcox, 井上・上林らによる方法では、式(5)の $\hat{f}(t), \hat{F}(\omega)$ で $n=0$ 以外の項を除いた式を用いて変換・逆変換を行っている。

共役関係を定式化に考慮しない場合には、全ての離散点 ω_k が原点に関して、対称な位置になければ、関数 $f(t)$ を数値変換により求めた $\hat{F}(s)$ に上述の関係が成り立たない。また、像関数 $F(s)$ を数値逆変換して求めた $\hat{f}(t)$ の虚数部はゼロにならない。 $\beta_\omega=-N/2$ とした井上らの手法では、対称な配置になっていない。また、 $\beta_\omega=0$ としたKrigsとWallerらの手法では、 $\omega=\Omega/2$ に関して像関数の折返しを行っているものと思われるが、やはり離散点是对称な配置になっていない。

$\beta_\omega=(1-N)/2$ 、また、 $\omega=\Omega/2$ を境に像関数の折返しを行う場合には $\beta_\omega=1/2$ と置くこと上述の共役関係が満足され、逆変換により求めた関数の虚数部はゼロになる。本論文ではWilcoxによる配置と同じように $\beta_\omega=(1-N)/2$ とし、FFTを効率良く使用するために $N=2^q$ (q : 正の整数)の場合だけを対象にする。なお、 β_t による影響については、3.(1)での精度に関する検討結果より、 $\beta_t=0$ とおいた方がよい。

(4) 精度について

数値ラプラス変換・逆変換の実手順を図-2に示す。変換は原関数 $f(t_m)$ から、式(5)により $\hat{f}(t_m)$ を求め、式(7)により関数 $\hat{F}(\omega_k)$ が求められる。逆変換も像関数 $F(\omega_k)$ から、式(5)により $\hat{F}(\omega_k)$ を求め、式(7)により関数 $\hat{f}(t_m)$ が求められる。しかし、 $\hat{F}(\omega_k)$ と $\hat{f}(t_m)$ から $F(\omega_k)$ と $f(t_m)$ は求められず、 $\hat{F}(\omega_k), \hat{f}(t_m)$ で $F(\omega_k), f(t_m)$ を近似的に扱うことになり、この場合、数値変換・逆変換により求めた $F(\omega_k)$ と $f(t_m)$ にはそれぞれ $E_r(\omega_k)$ と $e_r(t_m)$ の誤差を含むことになる。

逆変換の誤差 $e_r(t_m)$ と変換の誤差 $E_r(\omega_k)$ は、それぞれ式(5)の右辺から $n=0$ に相当する項を除いた式として、次式のように得られる。

表-1 数値ラプラス逆変換の誤差 ($F(s)=1/s$)

パラメータ			誤差($\times 10^{-2}$)	
N	N_Ω	$\alpha/\Delta\omega$	\bar{e}_r	\bar{E}_r
128 (2^7)	0	0.4	7.493	4.218
128 (2^7)	0	0.5	4.142	7.152
128 (2^7)	1	0.4	7.493	1.451
512 (2^9)	0	0.4	7.493	1.419

$$\left. \begin{aligned} e_r(t_m) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\alpha T} f(t_m + nT) \\ E_r(\omega_k) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{2n\pi i \beta_t} F(\omega_k + n\Omega) \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

これより、誤差 $e_r(t_m)$ を小さくするには、原関数 $f(t)$ の指数位数より大きな α を用い、 T も大きくすればよい。また、 $|F(\omega_k)|$ は一般に $|\omega_k|$ を大きくすると小さくなることから、誤差 $E_r(\omega_k)$ を小さくするには、 Ω を大きくとる必要がある。

ところで、 $f(t), F(\omega)$ から $\hat{f}(t), \hat{F}(\omega)$ を求める式(5)は無級数になっているが、これらの関数値を求める場合には級数を有限な項で打切ることになる。また、関数値の計算に多くの時間を要する場合には、項数あるいは離散点数 N をできるだけ少なくとる必要がある。そこで、 $\hat{f}(t_m), \hat{F}(\omega_k)$ の代りに、それぞれ有限項 N_T, N_Ω で打切った次式を用いた場合を考える。

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}(t_m) &= \sum_{n=0}^{N_T} (-1)^n e^{-n\alpha T} f(t_m + nT) \\ \hat{F}(\omega_k) &= \sum_{n=-N_\Omega}^{N_\Omega} e^{2n\pi i \beta_t} F(\omega_k + n\Omega) \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

式(5)の第1式の代わりに上式の第1式を数値変換した場合には、 $\hat{f}(t_m)$ と $\tilde{f}(t_m)$ の差 $\hat{e}_r(t_m)$ による誤差 $L\hat{e}_r(t_m)$ を含み、第2式を数値逆変換した場合には、 $\hat{F}(\omega_k)$ と $\tilde{F}(\omega_k)$ の差 $\hat{E}_r(\omega_k)$ による誤差 $L^{-1}\hat{E}_r(\omega_k)$ を含むことになる。差 $\hat{e}_r(t_m)$ を小さくするには、 N_T, α または T を大きくとる必要があり、差 $\hat{E}_r(\omega_k)$ を小さくするには、 N_Ω または Ω を大きくとる必要がある。

3. 数値計算による検討

(1) 数値ラプラス逆変換

上述のように、数値逆変換により生じる誤差 $e_r(t_m)$ は、 α を大きくすると減少し、誤差 $L^{-1}\hat{E}_r(\omega_k)$ は、 N_Ω と Ω を大きくすると減少することが予想される。このことを、像関数 $F(s)=1/s$ の数値逆変換により示す。この像関数の原関数は、単位ステップ関数 $H(t)$ で与えられる。なお、 $H(t)$ は、 $t < 0$ で0、 $t > 0$ で1の値をとる。

表-1は、 $T=1.0, \beta_t=0.0$ とし、離散点数 N 、打切り項数 N_Ω とパラメータ α を変えたときの逆変換の誤差を表している。なお、数値ラプラス変換・逆変換の式の誘導にお

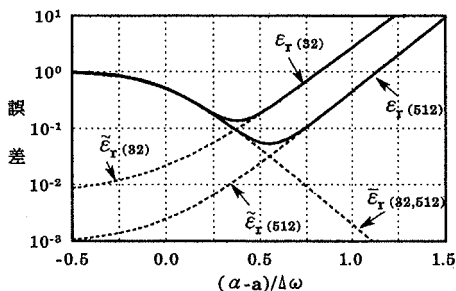


図-3 パラメータ α と誤差の関係 ($F(s)=1/(s-a)$)

いて、 $\Omega T=2\pi N$ の関係を用いているので、 N を多くすることは、 Ω を大きくすることに相当する。表中の誤差 $\bar{\epsilon}_r$ と $\bar{\epsilon}_r$ は、それぞれ各時刻 t_m での誤差 $e_r(t_m)$ と $\mathcal{L}^{-1}\hat{E}_r(\omega_k)$ から、次式により求めた時刻全体の平均誤差を表している。

$$\bar{\epsilon}_r = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left| \frac{e_r(t_m)}{f(t_m)} \right|, \quad \bar{\epsilon}_r = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left| \frac{\mathcal{L}^{-1}\hat{E}_r(\omega_k)}{f(t_m)} \right| \quad (10)$$

表より、 N_Ω と N を大きくすると、誤差 $\bar{\epsilon}_r$ が減少することが分かる。しかし、 α を大きくすると、誤差 $\bar{\epsilon}_r$ は減少するが、 $\bar{\epsilon}_r$ は増大することが分かる。なお、 N, N_Ω と α を変えたときの、このような傾向は他の像関数を逆変換したときにも見られる。

a) パラメータ α について

表-1より、パラメータ α は数値逆変換の二つの誤差に影響を与えることが分かる。原関数と数値逆変換により求めた値の各時刻での差は、二つの誤差 $e_r(t_m)$ と $\mathcal{L}^{-1}\hat{E}_r(\omega_k)$ で表されることから、 α を種々変えたときのこれらの誤差について調べる。

ところで、パラメータ α は複素平面上で像関数 $F(s)$ のすべての特異点の右側の値とする必要があるが、像関数が陽な形式で明らかになっていない場合にはこの条件を満足しない値を誤って設定してしまうこともあり得る。そこで、これらについても検討するために、像関数 $F(s)=1/(s-a)$ の数値逆変換を行う。この像関数は、 $\alpha > a$ を満足する範囲で定義される。また、この像関数の原関数は、 $H(t)e^{at}$ と与えられる。

図-3は、 $T=1.0, \beta_t=0.0, N_\Omega=0$ とし、 N が $32 (2^5)$ と $512 (2^9)$ について、 α を種々変えたときの逆変換の誤差を示している。この図では、横軸には複素平面上での像関数の特異点の座標値 a と α の差を $\Delta\omega$ で除した値をとっている。この図より、誤差 $\bar{\epsilon}_r$ は、 $(\alpha-a)$ を大きくすると減少し、誤差 $\bar{\epsilon}_r$ は、 N を増やし、 $(\alpha-a)$ を小さくすると減少することが分かる。また、図中の実線は、各時刻 t_m での $\mathcal{L}^{-1}\hat{F}(\omega_k)-f(t_m)$ を、式(10)のように基準化した数値逆変換の誤差 $\bar{\epsilon}_r$ を表している。これより、数値逆変

換の誤差 $\bar{\epsilon}_r$ は、 α に関して最少値を有することが分かる¹。この最小値に対応する $\alpha(\alpha_{opt}$ とする)より小さな α では N を増やしても誤差 $\bar{\epsilon}_r$ は減少せず、 N を増やして誤差 $\bar{\epsilon}_r$ を減少させるには α_{opt} 以上の α を設定する必要がある。

α を特異点の座標値 a より小さくしても何らかの数値が求められるので、信頼できる結果を得るためには、 α には像関数の特異点の座標値²よりも大きな値を設定し、誤差 $\bar{\epsilon}_r$ を小さくするために、 N または N_Ω を増やす必要がある。なお、 $\alpha < a$ となるようなパラメータの誤設定を避けることは、逆変換した関数が t の増加と共に指数関数的に増加するような場合に重要になり、応答値が時間の経過とともに発散するような物理的に不安定な現象を扱う場合に問題になる。

b) 平滑化とパラメータ β_t について

図-4は、像関数 $F(s)=1/s$ と $e^{-0.2s}/s$ の数値逆変換を行った結果を示している。この計算では、 $N=32 (2^5), T=1.0, N_\Omega=0, \alpha/\Delta\omega=0.6, \beta_t=0.0$ としている。

この図の(a),(c)より、数値逆変換を行うと正解に対して交互に正負の誤差が生じ、各値の時間間隔は Δt なので、ほぼ周期 $2\Delta t$ の誤差³が生じていることになる。そこで、この誤差を除去するために、次のような平滑化を行った結果の図(b),(d)も示している。

関数 $f(t)$ の代りに、次のような平滑化の操作を施した関数 $\bar{f}(t)$ のラプラス変換を考える。

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{2\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} f(\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (11)$$

上式の $f(t)$ にラプラス変換の定義式(式(1)の第2式)を代入すると、次式が得られる。

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)W(s)e^{st} ds \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $W(s)$ は次式で与えられる。

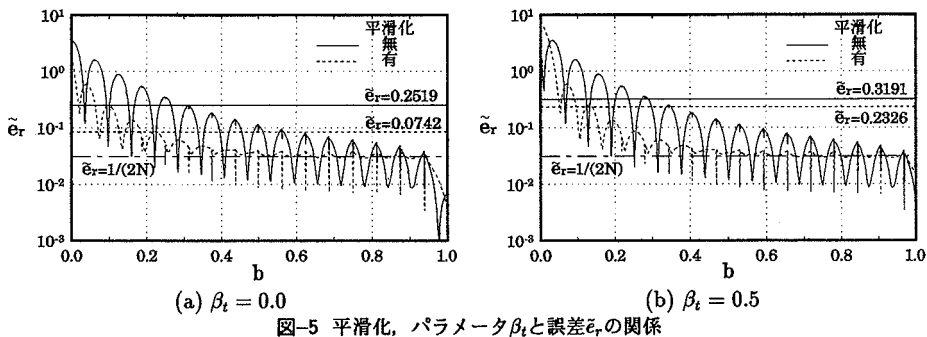
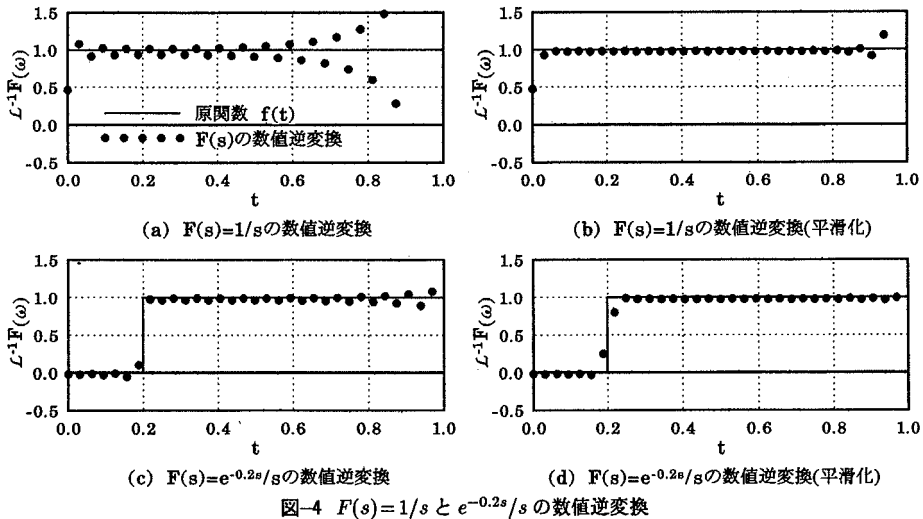
$$W(s) = \frac{e^{s\Delta t} - e^{-s\Delta t}}{2s\Delta t} \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(12)より、逆変換する像関数 $F(s)$ の代わりに、 $W(s)$ を乗じた像関数 $F(s)W(s)$ を逆変換することにより、平滑化の操作が行われる。なお、平滑化の操作を用いると真の関数 $f(t)$ の代わりに式(11)のような関数 $\bar{f}(t)$ を求めていることになるので、時間間隔 $2\Delta t$ 程度の時間内で変化する応答には留意しなければならない。

¹ ある種の像関数では、 α を大きくすると $\bar{\epsilon}_r$ が減少する場合もあり、このような場合には α を大きくすることにより誤差 $\bar{\epsilon}_r$ を単調に減少させられる。このような像関数として、 $e^{-bs}F(s)$ ($b > T$)がある。この関数の原関数は $H(t-b)f(t-b)$ と与えられ、逆変換対象時間域 ($0 < t < T$)の範囲ではこの関数値はゼロである。

² 特異点の座標値が不明な場合にも、数値逆変換により得られた関数の図から読みとった指数位数により、特異点の実軸上の座標値 a の概略値は推定できる。

³ この誤差は ω の区間を $\pm\Omega/2$ で打ち切ったことによるものである。 Ω には $\Omega T=2\pi N$ の関係があることから、 $\Omega/2=\pi N/T=\pi/\Delta t$ となり、この値より高次の振動数成分が誤差として現れている。これを周期で表現すると誤差は $2\Delta t$ より短い周期成分の総和として現れる。



次に、像関数 $F(s)=e^{-sb}/s$ を、 $b=0 \sim T$ の範囲で種々変えたときの平滑化や β_t による逆変換の誤差を図-5に示す。この図は、 $N=16$ (2^4), $N_\Omega=0$, $\alpha/\Delta\omega=1.0$, $T=1.0$ とし、平滑化を行った場合とそうでない場合、パラメータ $\beta_t=0.0$ と 0.5 の場合について、誤差 $\bar{\epsilon}_r$ とパラメータ b の関係を示している。

ここに、この像関数の原関数は $f(t)=H(t-b)$ で与えられ、時刻 $t=b$ までは、 $f(t)$ の値はゼロとなるので、誤差 $\bar{\epsilon}_r$ の代わりに、各時刻での誤差 $L^{-1}\hat{E}_r(\omega_k)$ から、次式により求められる時刻全体の平均誤差 $\bar{\epsilon}_r$ を用いている。

$$\bar{\epsilon}_r = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |L^{-1}\hat{E}_r(\omega_k)| \dots\dots\dots (14)$$

図-4(a),(c)より、関数の不連続に変化する時刻が遅い方が誤差は少なく、図-5より、変化する時刻 b が遅くなると誤差は振動しながら減少していくことが分かる。このような振動は、関数値が不連続に変化する時刻 b と離散点 t_m が最も離れる $b=t_0+\Delta t/2, t_1+\Delta t/2, t_2+\Delta t/2, \dots$ のときに誤差が極小になり、時刻 b と離散点 t_m が接近するときには誤差が増大することを表している。

平滑化を行った場合にも同様に振動しながら減少するが、 $\bar{\epsilon}_r = 1/(2N)$ の値に漸近している(一点鎖線)。これ

は平滑化の操作を行うと、元の関数 $f(t)$ とは異なった関数 $\bar{f}(t)$ になるために、平滑化による違いが生じ、図-5のように関数の上がり時刻 b が遅くなると、逆変換の誤差が小さくなり、代りに平滑化による誤差が顕在化するためである。

誤差 $\bar{\epsilon}_r$ は、打ち切り項数 N_Ω を増やしても減少させることができる。しかし、上述のように平滑化による誤差は離散点数 N により決まることから、平滑化によって精度を改善させる場合には、 $N_\Omega=0$ とし、離散点数 N を増やす方がよい。

図-5(a),(b)より、これらの図は一方の図を b に関して $\beta_t\Delta t$ だけずらしたものに相当していることが分かる。また、図中の横実線は平滑化を行わず、横破線は平滑化を行った $b=0 \sim T$ の範囲の誤差 $\bar{\epsilon}_r$ の平均を表わしているが、図(a)の方が(b)よりこの誤差は小さいことから、全体的には、 β_t を大きくするよりも $\beta_t=0$ とした方がよい。

(2) 数値ラプラス変換

次に、数値ラプラス変換の精度について数値計算により検討する。

まず、関数 $f(t)=H(t)e^{at}$ の数値変換を行う。この関数の像関数は、 $1/(s-a)$ で与えられ、 s の実部 α は a より

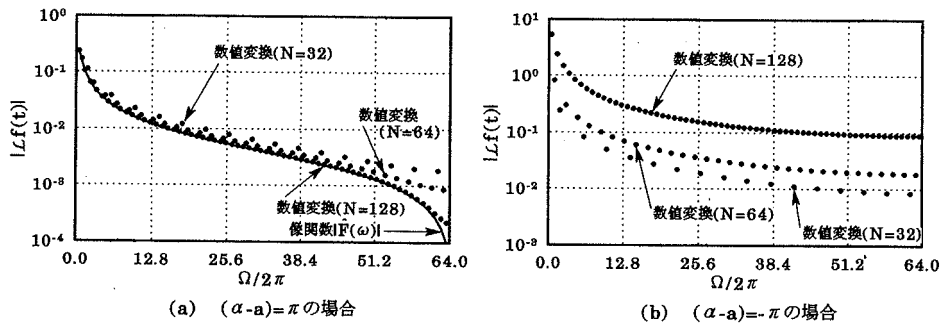


図-6 関数 $f(t) = H(t)e^{at}$ の数値ラプラス変換

大きくなればこの像関数は定義されない。この問題を $N=32$ (2^5), 64 (2^6), 128 (2^7) の場合について、数値変換した結果の絶対値を図-6(a),(b)に示している。なお、この計算では、 $\Omega/2\pi=128, N_T=0, \beta_1=0.0$ としている。

図(a)は、 $(\alpha-a)=\pi$ のときの結果であり、 N を増やすと像関数 $\hat{F}(\omega)$ に収束することが分かる。図(b)は、像関数が存在しない場合の例として、 $(\alpha-a)=-\pi$ のときの結果を示しており、 N の増加とともに発散してゆくことが分かる。さらに、種々の α について検討した結果、 N を一定としたとき、 α を a より大きくするほど $\hat{F}(\omega)$ との差は減少し、 α を a より小さくするほど発散していくことが分かった。

時間に関してラプラス変換された弾性波動問題を有限要素法により解く場合に、時間とともに複雑に変化する荷重や強制変位をラプラス変換する手段として数値ラプラス変換が必要になる。数値ラプラス変換の精度は、 T, Ω や N_T の影響を受けるが、荷重や強制変位として既に観測されたデータを用いる場合には、観測時間 $(1+N_T)T$ は変えられないため、 T や N_T の選択は制限されることがある。また、最終的に必要な変位や応力を得るためには、像空間での解を数値逆変換しなければならず、荷重や強制変位の数値変換を行うときの N や Ω などのパラメータは、変位や応力の数値逆変換を行うときのパラメータと適合するようにならなければならない。

そこで、関数 $f(t) = H(t)e^{at}$ の数値変換を、 $(1+N_T)T = 1.0$ の場合について、 N と N_T を変えて行ったときの誤差を表-2に示し、表-3は $\Omega/2\pi$ を一定値 128 とした場合について示している。これらの計算では、 $(\alpha-a)=\pi, \beta_1=0.0$ としている。また、表中の誤差 \bar{E}_r と \hat{E}_r は、 $-64 < \omega_k/2\pi < 64$ の範囲の各 ω_k での誤差 $E_r(\omega_k)$ と $\mathcal{L}\hat{e}_r(t_m)$ から次式により求めた平均誤差を表している。

$$\bar{E}_r = \frac{1}{N_e} \sum_k \left| \frac{E_r(\omega_k)}{F(\omega_k)} \right|, \quad \hat{E}_r = \frac{1}{N_e} \sum_k \left| \frac{\mathcal{L}\hat{e}_r(t_m)}{F(\omega_k)} \right| \quad (15)$$

ここに、 N_e は、 -128π から 128π の範囲の離散点 ω_k の数を表している。

表-2中の $\Omega/2\pi$ は、 $\Omega T = 2\pi N$ の関係により、 N と T が

ら決まる値であり、表-3中の T は、 N と $\Omega/2\pi$ から決まる値である。表-2より、 N と N_T の組合せには関係せず、 Ω を大きくすると誤差 \bar{E}_r は減少し、 \hat{E}_r はあまり変化しないことが分かる。また、表-3より、 $\Omega/2\pi$ を一定とした場合には、誤差 \bar{E}_r は変化せず、 $(1+N_T)T$ を大きくすると、 \hat{E}_r は減少することが分かる。

これらより、既に得られている観測データを用いて数値変換の精度を上げるには、観測時間 $(1+N_T)T$ は変えられないので、(内挿) 補間等により観測時刻以外での値を求めて、関数値の数 $(1+N_T)N$ を多くする必要のあることが分かる。しかし、 \hat{E}_r はあまり減少しないので、数値変換の誤差はこの値より小さくできない。この誤差よりも小さくする必要のある場合には観測時間 $(1+N_T)T$ を長くして再度データを準備する必要がある。

4. 有限要素法の定式化

弾性問題の運動方程式と境界条件式を時間に関してラプラス変換した運動方程式と境界条件式に有限要素法の定式化を施すと次の節点 i に関する要素剛性方程式が得られる¹²⁾。

$$\sum_{j=1}^p (k_{ij} + s^2 m_{ij}) d_j = p_i + \sum_{j=1}^p n_{ij} (v_j^0 + s d_j^0) \quad \dots (16)$$

ここに、 k_{ij}, m_{ij}, n_{ij} は、それぞれ、節点 i, j に関する剛性行列、質量行列と初期条件に対する質量行列である。また、 d_i, p_i, v_i^0, d_i^0 は、それぞれ、節点 i に関する変位ベクトル、等価節点荷重ベクトル、初期速度ベクトルと初期変位ベクトルである。

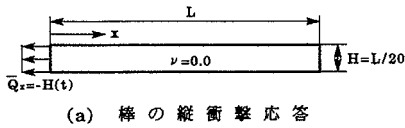
有限要素法を変換後の像空間に使用しているため、荷重データをラプラス変換する必要があるが、数値的に変換することにより複雑な経時変化を有する荷重にも対応することができる。構造全体の剛性方程式を一連の s について解いて像空間での数値解を求める必要があるが、個々の s に関する剛性方程式は独立になっているので、別々の CPU により同時に構造解析を行え、並列計算機に容易に適用できる特徴を有している。このようにして得られた変位や応力を、個々の節点や要素ごとに、数値

表-2 数値ラプラス変換の誤差 ((1+N_T)T=1.0)

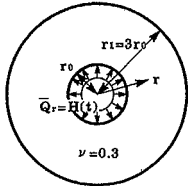
パラメータ			誤差 (×10 ⁻²)	
N	N _T	(Ω/2π)	\bar{E}_r	\bar{E}_r
128 (2 ⁷)	0	(128)	30.28	4.982
256 (2 ⁸)	0	(256)	6.838	4.350
128 (2 ⁷)	1	(256)	6.836	4.663

表-3 数値ラプラス変換の誤差 (Ω/2π=128)

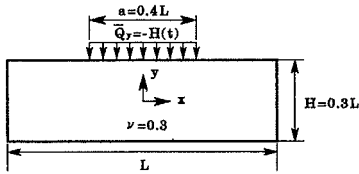
パラメータ			誤差 (×10 ⁻²)	
N	N _T	((1+N _T)T)	\bar{E}_r	\bar{E}_r
128 (2 ⁷)	0	(1.0)	30.28	4.982
256 (2 ⁸)	0	(2.0)	30.28	0.417
128 (2 ⁷)	1	(2.0)	30.28	0.561



(a) 棒の縦衝撃応答



(b) 内圧を受けるリングの衝撃応答



(c) 高さ方向の波動伝播を考慮した梁の衝撃応答

図-7 数値計算例

逆変換することにより、物理的な変位や応力が得られる。

5. 計算例と考察

(1) 棒の縦衝撃応答

本方法により得られる解には、数値ラプラス変換・逆変換の時間分割数による誤差と有限要素法の要素分割数による誤差が影響しているものと考えられる。

そこで、解析解が容易に得られる棒の縦衝撃問題を用いて、有限要素分割数と時間分割数による精度への影響について調べる。

長さ L の棒の一端 (x=0) に単位ステップ荷重 Q = H(t) が作用したときの荷重作用点から x だけ離れた点での応力 σ_x とラプラス変換された応力 σ_x^{*} は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ H \left(t - \frac{2nL+x}{c} \right) - H \left(t - \frac{2(n+1)L-x}{c} \right) \right\} \\ \sigma_x^* &= Q^s \operatorname{sh} \left\{ \frac{s}{c} (L-x) \right\} / \operatorname{sh} \left(\frac{s}{c} L \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに、c は縦波の伝播速度、sh は双曲線正弦関数を表わす。

図-7(a) のように静止状態にある長さ L の棒の一端に単位ステップ荷重 H(t) が作用した場合の荷重作用点から

x = L/2 だけ離れた点での応力を、有限要素分割数 8×1, 16×1 と 32×1, 時間分割数 64, 128 と 256 について求める。なお、この棒のポアソン比は ν = 0.0 である。また、有限要素は、x 軸方向に 5 節点、これに直交する方向に 2 節点からなる一要素 10 節点要素を用いる。数値ラプラス変換・逆変換では、α = Δω とし、逆変換では波形の平滑化を行なう。解析時間は T = 5L/c とし、その他のパラメータは N_T = N_Ω = 0, β₁ = 0 としている。

数値ラプラス変換・逆変換と有限要素法を用いた本手法では汎用性を考慮して、荷重の変換は数値的にやっている。このため、式 (17) 第 2 式の右辺に含まれる Q^s には、1/s の代わりに荷重 H(t) を数値変換した値を用いる。このようにして、式 (17) の第 2 式を数値逆変換した応力 σ_x は、数値ラプラス変換・逆変換による誤差が含まれている。

これらの応力と式 (17) 第 1 式から求めた応力の時刻歴の値から、次式のような時刻全体の平均誤差を求めた結果を、表-4 に示す。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_L &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\hat{\sigma}_x(t_m) - \sigma_x(t_m)| \\ \varepsilon_F &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\tilde{\sigma}_x(t_m) - \hat{\sigma}_x(t_m)| \\ \varepsilon_T &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\tilde{\sigma}_x(t_m) - \sigma_x(t_m)| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

誤差 ε_L は、数値ラプラス変換・逆変換による誤差だけを表し、表-4 から、この誤差は時間分割数を増やすと減少することが分かる。有限要素法により求めた像空間での応力 σ_x^{*} と式 (17) 第 2 式の応力 σ_x^{*} の差は有限要素法による誤差だけを含み、誤差 ε_F はこの差を逆変換したものである。有限要素法による誤差を表しているものと考えられる。また、ε_T は、数値ラプラス変換・逆変換による誤差と有限要素法による誤差を合わせたものを表している。表より、有限要素数を一定にして、時間分割数だけを増やすと、誤差は大きくなること分かる。これについて次に考察する。

図-8 に、有限要素分割数と時間分割数を変えたときの x = L/2 の点での応力 σ_x の応答を示している。これより、要素分割数を 8 にし、時間分割数を 128 (2⁷) から 256 (2⁸) に増やすと、波形の乱れが大きくなっていることが分かる。数値ラプラス変換・逆変換を行なう場合に、時間分割数を多くするとそれだけ短時間に変化する波形を表現

表-4 数値ラプラス変換・逆変換と有限要素法による誤差 ($\times 10^{-2}$)

時間分割数	誤差 ϵ_L	誤差 ϵ_F			誤差 ϵ_T		
		有限要素分割数			有限要素分割数		
		8	16	32	8	16	32
64	4.163	0.148	0.012	0.001	4.205	4.166	4.163
128	2.138	1.799	0.057	0.003	3.688	2.155	2.139
256	1.152	6.305	1.439	0.039	7.195	2.395	1.162

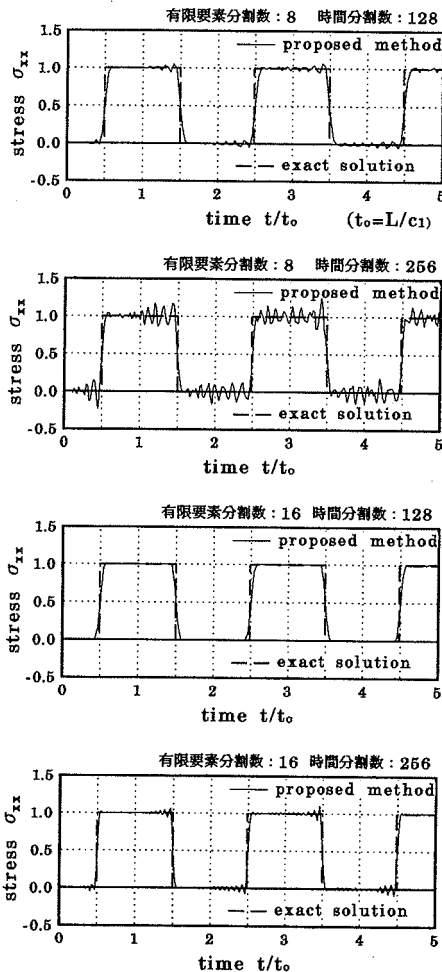


図-8 棒の縦衝撃応答

でき、少なくすると短時間に变化する高周波成分を表現できず、原波形を一種のフィルターに通したことになる。このことから、時間分割数を増やすと誤差が大きくなること、言い換えると、時間分割数を少なくすると精度がよくなるのは、有限要素解析による誤差を含んだ像空間での解を、ある程度少ない時間分割数で数値逆変換することにより、有限要素法による誤差をフィルターにより遮断していることを表しているものと考えられる。

(2) 内圧を受けるリングの衝撃応答

図-7(b)のような内径 r_0 、外径 $r_1 = 3r_0$ のリングにステップ状の内圧 $\bar{Q}_r = H(t)$ が作用したときの応力を求める。なお、ポアソン比は $\nu = 0.3$ とし平面応力状態を仮定する。この問題は軸対称性を有しているので、25 節点要素を用いてリングの一部 (開角 4 度) を半径方向に 16 要素分割し、時間分割数は 128 とする。また、解析時間 T は、縦波が内縁から外縁まで伝播する時間 t_0 の 5 倍とし、数値ラプラス変換・逆変換を行う上でのパラメータは、5.(1) の計算例と同じである。半径 $r = r_0$ と $2r_0$ での半径方向応力 σ_r と円周方向応力 σ_θ の時刻歴応答を図-9 に実線で示す。軸対称問題であるので、ラプラス変換した運動方程式の解は、第 1 種と 2 種変形 Bessel 関数により容易に表され、この解の数値ラプラス逆変換 ($N=1024$) により得た値を正解として図中に破線で示している。

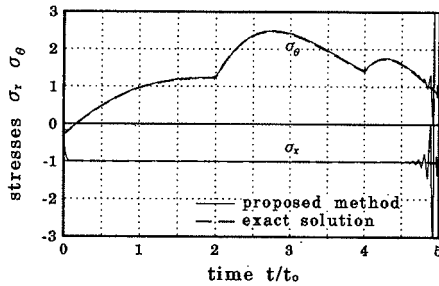
これらの図より、応力が不連続に変化する部分と $t/t_0 = 5$ 付近を除いて良く一致していることが分かる。応力が不連続に変化する部分の精度を上げるためには、要素分割数と時間分割数を増やす必要がある。 $t/t_0 = 5$ 付近の乱れは、数値逆変換によるものであり、一般に図-9(a)や図-4(a),(b)のように解析開始直後に、不連続に変化する応答を生じるような問題に発生する。この乱れは、時間分割数を増やしたり、パラメータ α の値を小さくすると減少する。また、解析時間を多少長くすることにより、必要な時間内での乱れを少なくすることもできる。

図-9(c)に解析時間 T を $5.5t_0$ としたときの $r=r_0$ での応答を示す。この計算では解析時間以外のパラメータは図-9(a)のときのものと同じである。このように解析時間を長くすると、応答に乱れの生じる時刻も遅くなり、応答結果の必要な時間内での乱れを少なくすることができる。

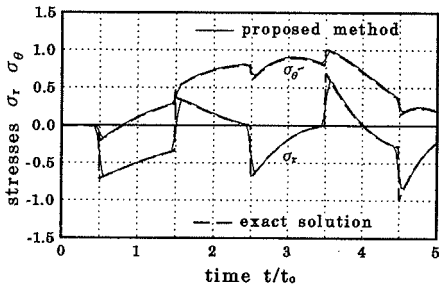
(3) 高さ方向の波動伝播を考慮した梁の衝撃応答

図-7(c)のような両端で鉛直方向の変位が拘束された長さ L 、高さ $H = 0.3L$ の梁の上縁に幅 $a = 0.4L$ の等分布荷重 $\bar{Q}_v = H(t)$ が作用したときの応力応答を求める。ポアソン比は、 $\nu = 0.3$ とし平面応力状態を仮定する。なお、この問題は小林ら¹⁴⁾が 2次元動弾性論に基づいた固有関数展開法により解を得ている。

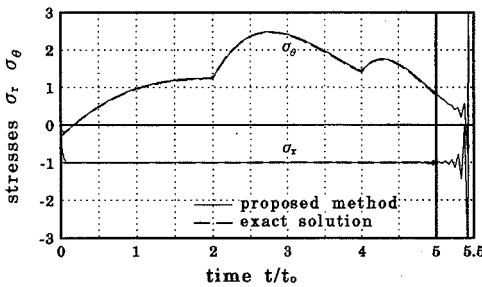
25 節点要素を用いて、有限要素分割は構造の片側を高さ方向に 12 分割、長さ方向に 20 分割する。また、時間



(a) $r=r_0$ での応力応答



(b) $r=2r_0$ での応力応答



(c) $r=r_0$ での応力応答($T=5.5t_0$)

図-9 内圧を受けるリングの衝撃応答

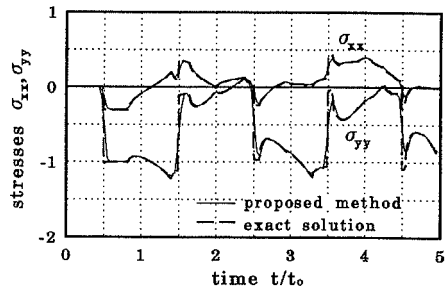
分割数は128とし、ラプラス変換・逆変換を行う上での他のパラメータは、5.(2)の計算例と同じである。

図-10は、梁の中心($x=0, y=0$)と($x=0.2L, y=0$)点での応力を示している。これらの図の横軸は、時間を縦波が上縁から下縁まで伝播する時間 t_0 で正規化している。図より、応力が不連続に変化する部分を除いてほぼ正解に一致している。なお、文献14)には、 $x=0.2L, y=0.0$ での値が示されていないので、ラプラス変換した運動方程式を解析的に解き、数値逆変換($N=1024$)により求めた値¹⁵⁾を正解としている。

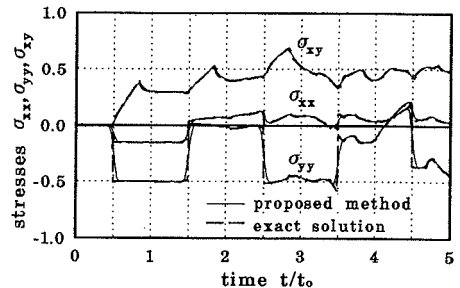
6. あとがき

本論文は、FFTを用いた数値ラプラス変換・逆変換に関する一般的な定式化を行い、数値ラプラス変換・逆変換と有限要素法を用いた弾性波動問題の解法を示した。

数値ラプラス変換・逆変換について得られた結果をま



(a) 梁中央($x=0, y=0$)での応力応答



(b) ($x=0.2L, y=0$)での応力応答

図-10 高さ方向の波動伝播を考慮した梁の衝撃応答

とめると、以下ようになる。

(1) FFTを用いた数値ラプラス変換・逆変換に関する既往の方法を包括するような一般的な定式化を行った。

(2) 数値変換と逆変換の精度への各種パラメータの影響について調べた。また、数値ラプラス変換・逆変換を高速に精度良く行うためには、前述のパラメータ β_ω を $(1-N)/2$ 、 $\omega=\Omega/2$ に関して像関数の折り返しを行う場合には $1/2$ とする必要があることを示した。

(3) 変換パラメータ s の実部 α は、数値変換・逆変換の精度を左右する重要なパラメータであるが、時間の経過と共に変位や応力などの応答値が発散するような力学的に不安定な問題の場合には、 α の設定に注意する必要があることを示した。

数値ラプラス変換・逆変換と有限要素法を用いた解法について得られた結果をまとめると、以下ようになる。

(1) ラプラス変換された運動方程式の有限要素解析は、個々の変換パラメータ s に関して独立に行え、並列計算機に適している。

(2) 有限要素の分割数に依存して精度が最も良くなる時間分割数のあることを示した。なお、本方法は直接時間積分法のような時間間隔 Δt による数値的な不安定性はない。

(3) 本方法は不連続に変化する応力を精度良く求められる。また、解析開始直後に応答が急激に変化する場合、解析終了時刻付近の応答に乱れが生じるが、分割数等は変えず、解析時間 T を長くすることにより応答

の必要な時間内の乱れを少なくできる。

最後に、有益なご意見を頂いた査読者に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Davies, B. and Martin, B.: Numerical inversion of the Laplace transform: A survey and comparison of methods, *J. Comp. Phys.*, Vol.33, pp.1-32, 1979.
- 2) Narayanan, G.V. and Beskos, D.E.: Dynamic soil-structure interaction by numerical Laplace transform, *Eng. Struct.*, Vol.4, pp.53-62, 1982.
- 3) Beskos, D.E. and Narayanan, G.V.: Dynamic response of frameworks by numerical Laplace transform, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.37, pp.289-307, 1983.
- 4) 足立忠晴・波多野啓二・宇治橋貞幸・松本浩之: 数値ラプラス変換を利用したマトリックス法による骨組構造の衝撃応答解析 (第1報, 真直棒要素で構成される構造の衝撃応答), 日本機械学会論文集 (A編), 56巻, 524号, pp.917-923, 1990.
- 5) 岩崎英治・林 正: ラプラス変換法を用いた骨組構造の過渡応答解析, 構造工学論文集, Vol.38A, pp.1445-1454, 1992.
- 6) 草間孝志・三井康司・吉田俊彌: 数値ラプラス逆変換法による線形粘弾性解析, 土木学会論文報告集, 第292号, pp.41-52, 1979.
- 7) Chen, H.-T., Chen, T.-M. and Chen, C.-K.: Hybrid Laplace transform / Finite element method for one-dimensional transient heat conduction problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.63, pp.83-95, 1987.

- 8) Durbin, F.: Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method, *Comp. J.*, Vol.17, No.4, pp.371-376, 1974.
- 9) Wilcox, D.J.: Numerical Laplace transformation and inversion, *Int. J. Elect. Engng. Educ.*, Vol.15, pp.247-265, 1978.
- 10) Krings, W. and Waller, H.: Contribution to the numerical treatment of partial differential equations with the Laplace transformation - an application of the algorithm of the fast Fourier transformation, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.14, pp.1183-1196, 1979.
- 11) 井上裕嗣・上林 稔・岸本喜久雄・渋谷寿一・小泉 堯: 高速フーリエ変換を利用した数値ラプラス変換・逆変換, 日本機械学会論文集 (A編), 57巻, 542号, pp.245-250, 1991.
- 12) 岩崎英治・林 正: 数値ラプラス変換を用いた衝撃問題の数値解法, 土木学会, 第2回落石等による衝撃問題に関するシンポジウム講演論文集, pp.33-38, 1993.
- 13) 例えば, 大崎順彦: 地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, 1976., Brigham, E.O.: *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, 1974 (宮川 洋・今井秀樹訳: 高速フーリエ変換, 科学技術出版社, 1978) など.
- 14) 小林治俊・奥田東吾・園田恵一郎: 衝撃荷重を受ける単純支持ばりの応力波伝播解析, 構造工学論文集, Vol.38A, pp.1505-1514, 1992.
- 15) 岩崎英治・林 正: ラプラス変換を用いた線形動弾性問題の変分原理, 土木学会第47回年次学術講演会講演概要集, I-460, pp.1094-1095, 1992.

(1994.3.28 受付)

A METHOD OF SOLUTION FOR ELASTIC WAVE PROPAGATION PROBLEM USING A NUMERICAL LAPLACE TRANSFORM AND FINITE ELEMENT METHOD

Eiji IWASAKI and Masa HAYASHI

Numerical solutions of elastodynamics problems are usually obtained by Newmark's method or modal analysis using eigenfunction expansions. However, Newmark's method is inaccurate for the stresses varying with discontinuity, and the modal analysis is hardly applied to complex problems. While wave propagation problems are generally solved with analytical method using a Laplace transform, the Laplace inversion is hard to do. There are many studies on numerical approach for that reason, but numerical accuracy of these methods has not been well evaluation and discussion. In this paper, the normal and inverse of numerical Laplace transform using the fast Fourier transform are studied, numerical solutions for elastodynamics problems are presented by the Finite Element Method and a numerical Laplace transforms. A few examples are presented to show the accuracy of the proposed method.