

# 亀裂先端で有限な応力集中を構成する 応力関数に関する研究

栖原秀郎\*・中川建治\*\*

本文では、クラックを有する等方等質無限板が引張りあるいはせん断外力等を受ける問題に対する Westergaard の解を平滑化することにより、プロセスゾーン相当部分を構成する応力関数を導いている。基本解 12 組を導き、これらを組み合わせたり、プロセスゾーンの長さを変えることにより、有限で滑らかな応力集中を構成し、開口変位についてもいろいろな形状を表現し得ることを示す。この関数は、コンクリートや岩盤中のクラックの解析あるいは破壊シミュレーションに対して活用可能である。

**Key Words** : crack, finite stress concentration, stress function, process zone

## 1. はじめに

中心に直線状の亀裂 1 本を持つ無限板が無限遠点で一様引張りを受ける問題の応力関数として最も簡単なものは Westergaard<sup>1)</sup> によって与えられたもので、線形破壊力学の解析的な基礎となっている。これは簡潔な応力関数であるがクラックの先端で無限大の応力集中を与える点が不都合である。これに対して応力集中が有限な降伏応力で打ち切られるように改良されたものが Dugdale<sup>2)</sup> の解である。何れも多くの研究の理論解の根幹として広く活用されている。

構造物の主要材料であるコンクリートや構造物の基礎に関連する岩盤のクラックに関する研究では、クラック（あるいは空隙）周辺の応力集中解析は必要不可欠の研究課題である。これらの混成材料に関する実験的研究では、上記の関数解が与える様な直線状の一本のクラックの先端で無限大あるいは降伏応力で一定分布と言う応力状態は不自然である。たとえば、Cho<sup>3)</sup>、Wium<sup>4)</sup>、Visalvanich<sup>5)</sup> の研究によると、図-1 に略記するような応力集中が実験結果を説明するには望ましいものであると報告されている。したがって図-1 のような応力分布を与える応力関数を導くことは実験結果を理論的に検討したりシミュレーションしたりするには有意義なことであろう。既に著者等<sup>6)~8)</sup> はクラック先端で有限な応力集中を構成する応力関数の導き方について提案をしている。その 1 つは、Westergaard の解を開口の大きさを表すパラメータで重み積分して応力関数を導く方法であった。このような応力関数構成法は簡便であるから、著者等はコンクリートの梁の曲げ破壊のシミュレーションに適

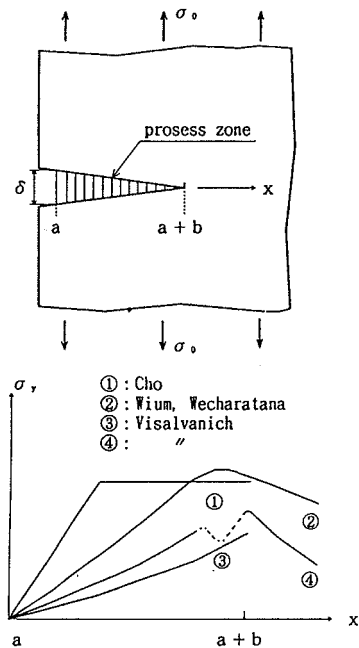


図-1 コンクリート、繊維補強コンクリートにおける開口部の応力分布の例

用<sup>9)</sup>してその有用性を示した。しかし本文中で、クラック先端で有限な応力集中を与えてプロセスゾーン相当の領域も構成する応力関数を全く異なる手法で導き提示するのは次のような理由によるものである。

弾性特性の異なる 2 種類の材料の接合面上のクラック（インターフェイスクラック）の解析的研究によるとクラック先端の応力集中は、集積特異点の様相を呈することになる (Erdgan<sup>10)</sup>, England<sup>11)</sup>)。この物理的に不自然な点を解消する為に Comninou<sup>12)</sup> は Contact Zone という領域を想定した応力関数を提案しているが、引張りの場合にせん断応力が無限大となる特性は解消されてい

\* 正会員 工修 日本国土開発(株)名古屋支店土木部課長  
(岐阜大学 博士後期課程在学中)

(〒461 愛知県名古屋白壁 1-45 白壁ビル)

\*\* 正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科

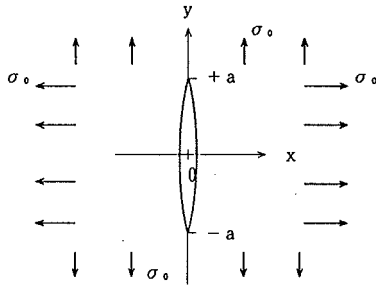


図-2 クラックを持つ無限板と一様応力

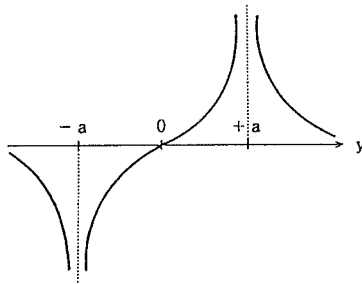


図-3 y軸上での  $R_\theta[h(z, a)]$

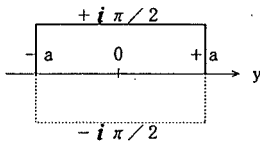


図-4 y軸上での  $lm[h(z, a)]$

ない。異なる材質の板の接合面の亀裂では応力と変位の連続性を保つ条件として bi-elastic constant という定数が定義されるがこれは指数関数で定義される。著者等はフーリエ変換で境界面亀裂の問題を解析する方法を、報告<sup>13), 14)</sup>しているが、これらは bi-elastic constant を含まない解となっている。他方、有限な応力集中を生じる境界面亀裂の問題を指数関数で解析する著者等の方法<sup>15), 16)</sup>ではこの定数を伴う解となっている。したがって一様な弾性板中のクラックでも 2 種類の弾性板の境界面亀裂の先端でも有限な応力集中とプロセスゾーンを構成し得る関数を統一して指数関数で定義できることが望ましい。さらに従来活用されている引張り（モード1）やせん断（モード2）状態の解に加えて、解析例の少ないクラック近傍における温度勾配による応力分布相当の x 軸が面内に曲げられるものと y 軸が面内に曲げられるものまでも含めて総合的に表現し得る関数群を導く事が可能になれば有意義であろう。本文はこのような問題の一群の解を導き得たので報告する次第である。

## 2. Westergaard の解

本研究においてはこの解を基礎とするので簡単に述べる。図-2 に示すように、Y 軸上に長さ 2a のクラック

を持ち無限遠方で  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$ ,  $\tau_{xy} = 0$  という一様応力を受ける等方等質の無限板の解は、Westergaard によって与えられていて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W &= 0 \\ W &= \bar{z}\phi + \phi \\ \phi &= \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{z^2 + a^2} \\ \phi' &= -\frac{\sigma_0 \cdot a^2}{2\sqrt{z^2 + a^2}} \\ (\phi &= -\frac{\sigma_0}{2} \cdot a^2 \cdot \log(z + \sqrt{z^2 + a^2})) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_0}{2} \cdot R_\theta \left\{ -\frac{a^2(z + \bar{z})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{2z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right\} \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_0}{2} \cdot R_\theta \left\{ \frac{a^2(z + \bar{z})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{2z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right\} \\ \tau_{xy} &= -R_\theta \left\{ i \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2(z + \bar{z})}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

式(2)に示した Westergaard の基本解における解の特異性すなわち、 $y = \pm a$  において応力が無限大となることは、 $z/\sqrt{z^2 + a^2}$  に起因しているので、この項のみに注目して次のような変形を行う。

$$\begin{aligned} \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{z+ia}{z-ia}} + \sqrt{\frac{z-ia}{z+ia}} \right) \\ &= \cosh \left\{ \frac{1}{2} \log \left( \frac{z+ia}{z-ia} \right) \right\} \end{aligned}$$

ここで、 $h(z, a) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{z+ia}{z-ia} \right)$

とおくと、 $R_\theta[h(z, a)]$  および  $lm[h(z, a)]$  の y 軸上の値は、それぞれ図-3、図-4 のようになる。ただし、 $lm[h(z, a)]$  の実線は  $x = +\epsilon$ 、点線は  $x = -\epsilon$  に対する値とする。図示のように、関数  $h(z, a)$  は、 $y = \pm a$  において実数部分は  $\pm \infty$  に発散し、虚数部分は 0 から  $\pi/2$  または  $\pi/2$  から 0 へ急激に変化する性質を持っていて、これがクラック先端において応力が無限大に発散する原因に他ならない。さらに y 軸上  $|y| < a$  で応力の条件  $\sigma_x = 0$  が満足されるのは  $lm[h(z, a)]|_{z=0} = \pm i\pi/2$  によるものである。したがって、応力を区間  $a < |y| < a + b$  で平滑化するについて完全開口部  $|y| < a$  においては、 $lm[h(z, a)]|_{z=0} = \pm i\pi/2$  の特性は保持しなければならない。次にこれらの問題を解消して有限で滑らかに立ち上がる関数を求める手法について述べる。

## 3. Westergaard の解の平滑化

### (1) 平滑化の考え方

クラック先端において応力が無限大に発散する原因は関数  $h(z, a)$  の特異性によるものであるから、調和関数の範囲内でこの関数  $h(z, a)$  の特異性を緩和して平滑

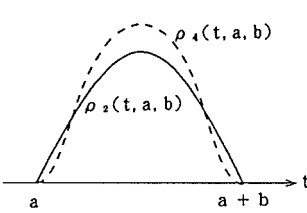


図-5 重み関数の形状

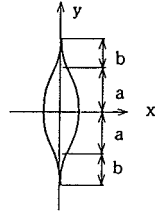


図-6 クラック幅 2a とプロセスゾーンの関係

化できれば、応力が有限で滑らかに立ち上がる関数を表現できることになる。

すなわち

$$h(z, a) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{z+ia}{z-ia} \right) \dots \dots \dots (3)$$

の代わりに、新たに下記の条件を満足する関数  $H_j(z, a, b)$  を定義する。

1.  $\lim_{z \rightarrow \infty} H_j(z, a, b) = h(z, a)$
2.  $R_0[H_j(z, a, b)] < \infty$
3.  $lm[H_j(z, a, b)]|_{x=0}$  (y 軸上の値) は、  
 $|y| > a+b$  のとき 0

$a+b \geq |y| > a$  のとき  $y = \pm(a+b)$  で 0 から緩やかに立ち上がり  $y = \pm a$  で  $i\pi/2$

$a \geq |y|$  のとき  $i\pi/2$

具体的には、 $h(z, a)$  に対して  $a=t$  として  $t$  に関する 2 次式あるいは 4 次式の重み  $\rho_k(t, a, b)$  を乗じて重み積分を行うことによってこの問題は解決される。すなわち次のようにするのである。

$$H_k(z, a, b) = \int_a^{a+b} \rho_k(t, a, b) \cdot h(z, t) dt \dots \dots \dots (4)$$

$k=2, 4$

ここでは解析例に用いる、 $\rho_2(t, a, b)$  および  $\rho_4(t, a, b)$  は、図-5 に示す形状を持ち、定義域を  $(a, a+b)$  として総面積が 1 になるように基準化された重み関数であり下記のように表されるものとする。

$$\rho_2(t, a, b) = -\frac{6}{b^3} (t-a)(t-(a+b)) \dots \dots \dots (5)$$

$$\rho_4(t, a, b) = \frac{30}{b^5} (t-a)^2 \{t-(a+b)\}^2 \dots \dots \dots (6)$$

基本的には、図-6 に示すクラック線上の開口部の両端  $a < |y| < a+b$  の部分 (プロセスゾーン相当) を構成するために、図-5 に定義する重み関数  $\rho_k$  を開口関数  $h(z, a)$  乗じて区間  $(a < |d| < a+b)$  にわたって積分して、 $|d| < a, a+b < |d|$  区間では  $\rho_k = 0$  であって重み積分は行わないことになる。

式 (5) または式 (6) を、式 (4) へ代入して重み積分すると次のような  $h_2(z, a, b)$ ,  $h_4(z, a, b)$  の関数が得られる。

$$h_2(z, a, b) = -\frac{i}{b^3} \left[ (z+i(a+b))^2 \left\{ z+i\left(a-\frac{b}{2}\right) \right\} \right.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \log \{z+i(a+b)\} \\ & - (z+ia)^2 \left\{ z+i\left(a+\frac{3}{2}b\right) \right\} \log \{z+ia\} \\ & - \frac{ib}{3} \left\{ 3 \left( z+ia+\frac{b}{2} \right)^2 + 2b^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_4(z, a, b) = & \frac{i}{2b^5} \left[ -\{(z+ia+ib)^5 - 5(z+ia) \right. \\ & \cdot (z+ia+ib)^4 \\ & + 10(z+ia)^2(z+ia+ib)^3 \\ & \cdot \log \{z+ia+ib\} \\ & + \{(z+ia)^5 - 5(z+ia)^4\} (z+ia+ib) \\ & + 10(z+ia)^3(z+ia+ib)^2 \cdot \log \{z+ia\} \\ & + \frac{47}{60} \{(z+ia+ib)^5 - (z+ia)^5\} \\ & - \frac{15}{12} (z+ia)(z+ia+ib) \\ & \cdot \{(z+ia+ib)^3 - (z+ia)^3\} \\ & \left. - \frac{55}{3} ib(z+ia)^2(z+ia+ib)^2 \right] \end{aligned}$$

求める関数  $H_2(z, a, b)$  及び  $H_4(z, a, b)$  は次のように表される。(y 軸上の  $|y| < a$  は応力 0 の開口部で、 $a < |y| < a+b$  は平滑化区間である)。

$$H_2(z, a, b) = h_2(z, a, b) - h_2(z, -a, -b) \dots \dots \dots (7)$$

$$H_4(z, a, b) = h_4(z, a, b) - h_4(z, -a, -b) \dots \dots \dots (8)$$

ここで上記の関数  $H_j(z, a, b)$  の詳細な誘導式は割愛するが、 $H_2(z, a, b)$  の実数曲面および虚数曲面の形状を図-7~10 に示すことによってその有用性を確認しよう。図-7 と図-8 は開口部周辺 ( $|x| < 1.5, |y| < 2$ ) の概略図であり、図-9 と図-10 は特異点  $y=a$  における詳細図 ( $|x| < 0.3, 0.8 < y < 1.4$ ) である。これらの図より平滑化の状態が納得されよう。

つまり、Westergaard の解における  $z/\sqrt{z^2+a^2}$  および  $1/\sqrt{z^2+a^2}$  項について注目すると、

$$\begin{aligned} \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} &= \cosh \left\{ \frac{1}{2} \log \left( \frac{z+ia}{z-ia} \right) \right\} \\ &= \cosh \{h(z, a)\} \\ \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} &= -\frac{i}{a} \sinh \left\{ \frac{1}{2} \log \left( \frac{z+ia}{z-ia} \right) \right\} \\ &= -\frac{i}{a} \sinh \{h(z, a)\} \end{aligned}$$

となるので、Westergaard の応力関数の  $\cosh \{h(z, a)\}$  を  $\cosh \{H_j(z, a, b)\}$  で置換し、 $\sinh \{h(z, a)\}$  を  $\sinh \{H_j(z, a, b)\}$  で置換すれば、応力関数の重調和条件はそのまま保持されつつ有限で滑らかな応力集中を与える関数が得られる。

すなわち、Westergaard の解の応力集中を平滑化するには、Westergaard の基本式の形をそのまま活用して、

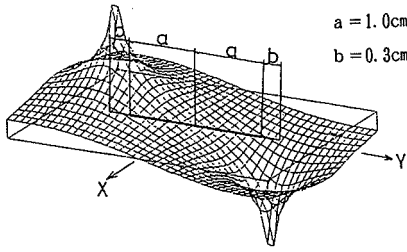


図-7 実数曲面 (4次式重み) 概略図

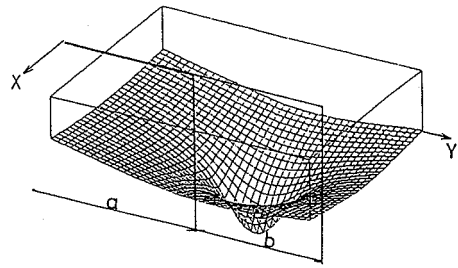


図-9 実数曲面 (4次式重み) 詳細図

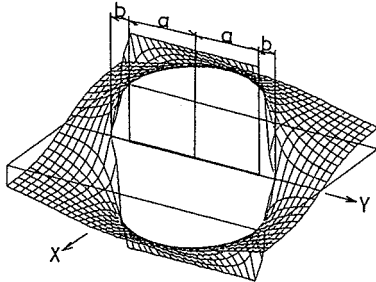


図-8 虚数曲面 (4次式重み) 概略図

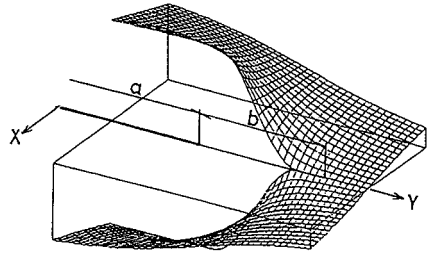


図-10 虚数曲面 (4次式重み) 詳細図

$h(z, a)$  の代わりに  $H_j(z, a, b)$  を用いればよいことになる。

よって、一様引張りを受けるクラックの Westergaard の解は次のように変換されることになる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W &= 0 \\ W &= \bar{z}\phi + \phi \\ \phi &= \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{z^2 + a^2} \\ &= -\frac{i\sigma_0}{2a} (z^2 + a^2) \sinh\{h(z, a)\} \\ \phi' &= \frac{\sigma_0}{2} \frac{a^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} \\ &= -\frac{i\sigma_0}{2a} [(z^2 - a^2) \sinh\{h(z, a)\} \\ &\quad + z(z^2 + a^2) h'(z, a) \cosh\{h(z, a)\}] \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

ここで、 $h(z, a)$  の代わりに  $H_j(z, a, b)$  と置き換えると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{i\sigma_0}{2a} (z^2 + a^2) \sinh\{H_j(z, a, b)\} \\ \phi' &= -\frac{i\sigma_0}{2a} [(z^2 - a^2) \sinh\{H_j(z, a, b)\} \\ &\quad + z(z^2 + a^2) H_j'(z, a, b) \cosh\{H_j(z, a, b)\}] \dots\dots (10) \\ &= -\frac{i\sigma_0}{2a} [(z^2 - a^2) \sinh\{H_j(z, a, b)\} \\ &\quad + z(z^2 + a^2) \sinh\{H_j(z, a, b)\}] \end{aligned} \right\}$$

(2) 関数  $H_j(z, a, b)$  の特性と基本解 12 組

関数  $H_2(z, a, b)$  も  $H_4(z, a, b)$  も、ほとんど等しい特性を具えているので  $H = H_4(z, a, b)$  と略記して、応力関数を構成するについてこの  $H$  が望ましい特性を持

つことを簡単に述べる。

$R_\theta[H]$  は有限で滑らかであるから  $e^{R_\theta[H]}$  は滑らかである。 $lm[H]$  は無限の複素曲面であって  $y$  軸上の区間  $a < y < a+b$  (あるいは  $-a-b < y < -a$ ) を中心にして曲面上を周回するならばラセン階段状 (対数分岐) に 1 周につき  $\pm i\pi$  ずつ関数値が平行移動して  $\pm\infty$  へ発散する。しかし応力関数としては図-8 のように主要面一葉のみに着目すればよいので、 $H$  は、

- $y$  軸上  $|y| > a+b$  では虚数部 = 0  
すなわち  $e^H$  : 実数
- $y$  軸上  $|y| < a$  では虚数部  $\pm i\pi/2$   
すなわち  $e^H = \pm i e^{R_\theta[H]}$  : 純虚数
- $y$  軸上  $a < |y| < a+b$  では  $e^H$  は純虚数より実数へ滑らかに変化する。

という特性を持っている。

複素応力関数表示された  $\sigma_x$  (あるいは  $\tau_{xy}$ ) が  $|y| > a+b$  では 0 でなく  $y$  軸上の  $|y| < a$  では 0 になるということは  $\sigma_x$  (あるいは  $\tau_{xy}$ ) が実数あるいは複素数から純虚数になればよいことで、例えば  $\sigma_x = e^H$  (あるいは  $\sinh H, \cosh H$ ) という形で表されるならばこの条件が完全に満足される。

詳細は割愛するが、 $e^H$  は上述のように  $y$  軸上  $|y| < a+b$  で不連続の開口を構成して、 $y$  軸上  $|y| < a$  で純虚数になるという条件を満足する。したがって、 $z$  と  $f_c = \cosh H, f_s = \sinh H$  をもって表-1 に掲げるような  $\phi$  と  $\phi$  あるいは  $\phi'$  を定義すると、これより構成される応力関数  $W = \bar{z}\phi + \phi$  12 組はすべてクラックの応力関数の条件 [  $y$  軸上の  $|y| < a+b$  以外で変位が連続して、 $y$  軸上の  $|y| < a$  で変位は開口を構成し  $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0$  という条

件]を満足する。

また、 $y$ 軸上の  $a < |y| < a+b$  では応力は連続して変位は滑らかな開口となるがこれがプロセスゾーン相当部分を構成することになる。紙面の関係上代表例として4組の応力関数の変位図および応力図を図-11~14に示す。変位や応力分布の状況が納得できればよいのでサイズの詳細は省いている。変位  $U, V$  の図より  $y$  軸上の開口形状が把握され、 $\sigma_x, \tau_{xy}$  の図より開口部で応力が0となる状況が納得されよう。

さらに、これらの12組の応力関数がどのような面内力を受けている2次元問題の解であるかを変位図と応力図によって確かめた結果を表-2に示す。 $y$  軸の正負領域で  $\sigma_x$  が反転して逆対称になるのは、同領域での温度差による伸縮あるいは  $x$  軸が面内に曲げられるものに相当し、 $x$  軸の正負領域で  $\sigma_y$  の符号が逆転して逆対称になるのは  $y$  軸が面内に曲げられるものに相当する。

Westergaardの解やDugdaleの解は、それぞれ1つの形しか存在しないにもかかわらず、ここではそれぞれのモードに対して3組づつ(たとえば、引張りでは基本解その4, その7, その12)の解が導かれた。

これはつぎのような事情によるものである。

$y$  軸上の  $a < |y| < a+b$  は、開口変位も応力も生じている緩和区間(プロセスゾーン相当区間)であり、開口形状と応力分布形状は一義的に拘束されないだけ自由度を含んでいる。Westergaardの解はこの区間を持たないし、Dugdaleの解ではこの区間の応力は、 $\sigma_{yd}$  と完全に拘束されている。本基本解12組ではこの区間に作用反作用力(打ち消して0となって外力相当にならない力)がそれぞれ特定の形(他の形状にも変更可能)となって作用して開口していることになる。したがって、各々のクラックモードに対する3組の基本解に特定の係数を乗じつつ重ね合わせ、さらに  $a, b$  を変化させた基本解も重ね合わせると、プロセスゾーン相当部分の応力や開口の形状を相当大きな自由度をもって変化させることができることになる。これによって特性の異なる材料(たとえば鋼材、コンクリート、岩石、ガラス等)のクラックの先端部分の状態を特定の形状に予め規定しても未定係数法によって近似的に表現し得ることになる。表-1に定義した基本解以外に、 $z$  に関してさらに高次のものも定義できるが無限遠方で応力が発散する解となるので割愛する。

なお、無限遠点における応力の発散を検討するについて必要となる基本関数  $f_c, f_s$  と表-1に示す基本解の  $z \rightarrow \infty$  の特性はつぎようになる。

ここで、 $f_c = \cosh H, f_s = \sinh H$  である。  
 $H$  および  $H'$  の  $z \rightarrow \infty$  の特性は、  
 $H_\infty = i(a+b/2)/z, H'_\infty = -i(a+b/2)/z^2$  である。  
 また、 $\sinh \varepsilon \doteq \varepsilon, \cosh \varepsilon \doteq 1$  であるので、

表-1 開口条件を満足する基本解

基本解	$f_c = \cosh H \quad f_s = \sinh H$	
	$\phi$	$\phi$ or $\phi'$
その1	$\phi_1 = f_c$	$\phi_1 = z f_c$
その2	$\phi_2 = f_s$	$\phi_2 = z f_s$
その3	$\phi_3 = i f_c$	$\phi_3' = i(z f_c' - f_c)$
その4	$\phi_4 = i f_s$	$\phi_4' = i(z f_s' - f_s)$
その5	$\phi_5 = i z f_c$	$\phi_5 = i z^2 f_c$
その6	$\phi_6 = i z f_s$	$\phi_6 = i z^2 f_s$
その7	$\phi_7 = z f_c$	$\phi_7' = z^2 f_c'$
その8	$\phi_8 = z f_s$	$\phi_8' = z^2 f_s'$
その9	$\phi_9 = z^2 f_c$	$\phi_9 = z^3 f_c$
その10	$\phi_{10} = z^2 f_s$	$\phi_{10} = z^3 f_s$
その11	$\phi_{11} = i z^2 f_c$	$\phi_{11}' = i(z^2 f_c' + z^3 f_c')$
その12	$\phi_{12} = i z^2 f_s$	$\phi_{12}' = i(z^2 f_s' + z^3 f_s')$

表-2 面内力分布による基本解の分類

面内力の種類	対応する基本解		
$y$ 軸曲げ	(その1)	(その6)	(その9)
せん断	(その2)	(その5)	(その10)
$x$ 軸曲げ	(その3)	(その8)	(その11)
引張り	(その4)	(その7)	(その12)

$f_c$  および  $f_s$  の  $z \rightarrow \infty$  の特性は、  
 $f_{c\infty} = 1, f_{s\infty} = i(a+b/2)/z$  となる。  
 同様に、 $f_c' = df_c/dH \cdot dH/dz = -f_s \cdot H'$   
 $f_s' = df_s/dH \cdot dH/dz = f_c \cdot H'$  となる。  
 よって、 $f_c'$  および  $f_s'$  の  $z \rightarrow \infty$  の特性は  
 $f_c' = -(a+b/2)^2/z^3$   
 $f_s' = -i(a+b/2)/z^2$  となる。

以上の結果を表-1 開口条件を満足する基本解に代入することにより  $z$  に関する次数が決定され無限遠点での状況が決定される。

#### 4. 計算例

ここでは、3. で求めた平滑化された基本解(その1)~(その12)を重ね合わせて滑らかな開口形状を与える応力関数を導いてみる。

##### (1) 引張クラックの場合

Westergaardの引張りクラックの解において、 $h(z, a)$  を  $H_f(z, a, b)$  によって置換して平滑化した応力関数を導くと次のように変形される。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W &= 0 \\ W &= z\phi + \phi \\ \phi &= D_{12}\phi_{12} + D_4\phi_4 \\ \phi' &= D_{12}\phi'_{12} + D_4\phi'_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

よって、平滑化された Westergaard の解は次のよう

$$\begin{aligned}
 W &= \bar{z}\phi_1 + \phi_1 \\
 \phi_1 &= f_c \\
 \phi_1 &= zf_c \\
 E &= 2.1 \times 10^5 \text{MPa} \\
 \nu &= 0.3 \\
 a &= 1 \text{ cm} \\
 b &= 0.3 \text{ cm} \\
 \text{領域 } |x| &< 1.5 \text{ cm} \\
 |y| &< 2 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

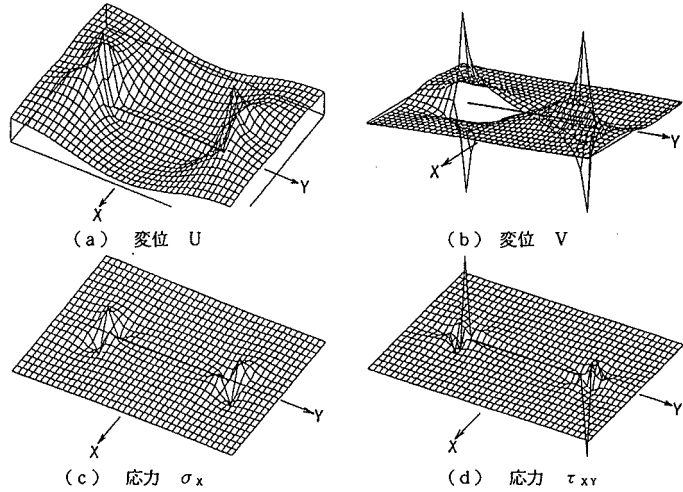


図-11 平滑化された基本解 (その1)

$$\begin{aligned}
 W &= \bar{z}\phi_2 + \phi_2 \\
 \phi_2 &= f_s \\
 \phi_2 &= zf_s \\
 E &= 2.1 \times 10^5 \text{MPa} \\
 \nu &= 0.3 \\
 a &= 1 \text{ cm} \\
 b &= 0.3 \text{ cm} \\
 \text{領域 } |x| &< 1.5 \text{ cm} \\
 |y| &< 2 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

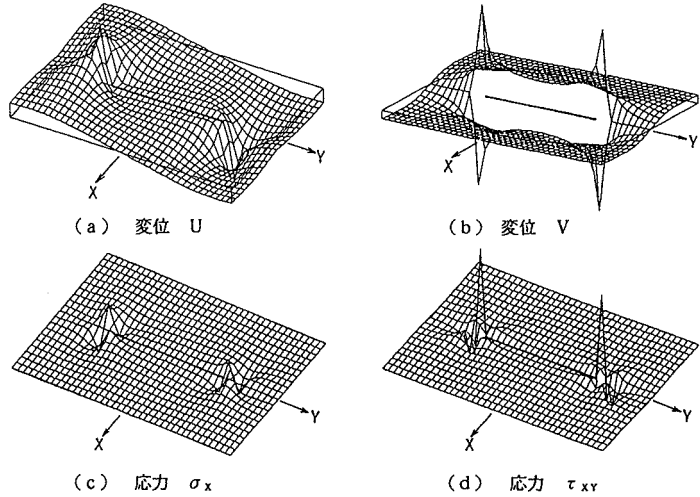


図-12 平滑化された基本解 (その2)

$$\begin{aligned}
 W &= \bar{z}\phi_3 + \phi_3 \\
 \phi_3 &= i f_c \\
 \phi_3 &= i (zf_c - f_c) \\
 E &= 2.1 \times 10^5 \text{MPa} \\
 \nu &= 0.3 \\
 a &= 1 \text{ cm} \\
 b &= 0.3 \text{ cm} \\
 \text{領域 } |x| &< 1.5 \text{ cm} \\
 |y| &< 2 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

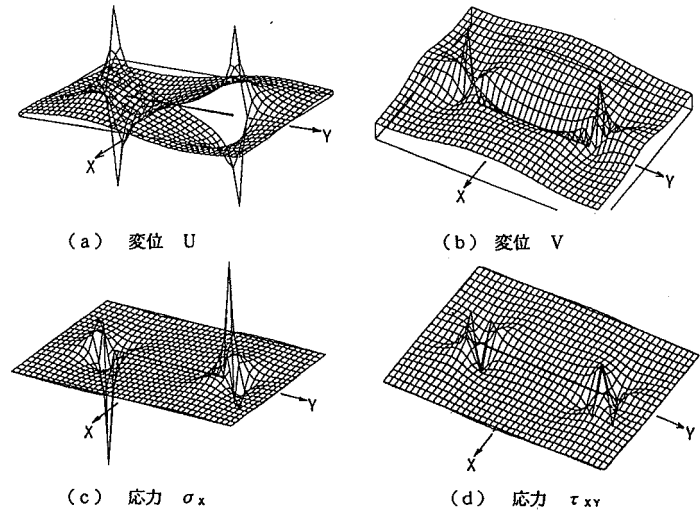
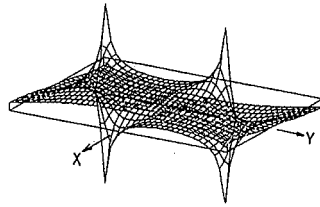
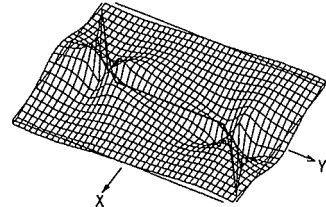


図-13 平滑化された基本解 (その3)

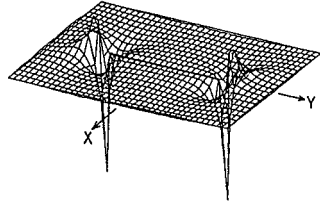
$$\begin{aligned}
 W &= \bar{z}\phi_4 + \phi_4 \\
 \phi_4 &= if, \\
 \phi_4' &= i(zf_1' - f_1) \\
 E &= 2.1 \times 10^5 \text{MPa} \\
 \nu &= 0.3 \\
 a &= 1 \text{cm} \\
 b &= 0.3 \text{cm} \\
 \text{領域 } |x| &< 1.5 \text{cm} \\
 |y| &< 2 \text{cm}
 \end{aligned}$$



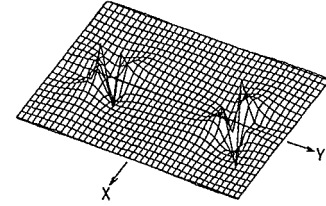
(a) 変位 U



(b) 変位 V

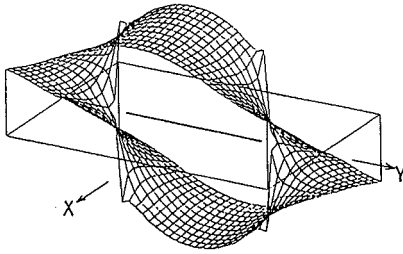


(c) 応力  $\sigma_x$

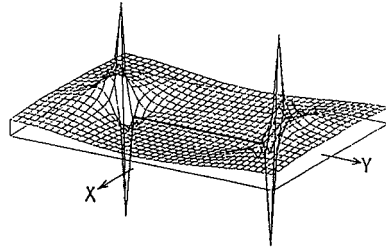


(d) 応力  $\tau_{xy}$

図-14 平滑化された基本解 (その4)

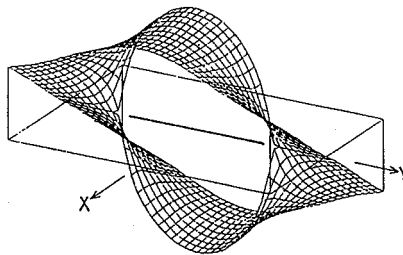


(a) 変位 U

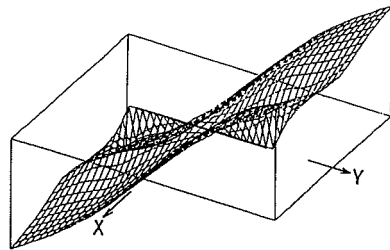


(b) 応力  $\sigma_x$

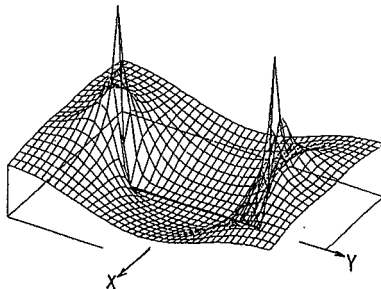
図-15 平滑化された Westergaard の解 ( $|x| < 1.5 \text{cm}$ ,  $|y| < 2 \text{cm}$ )



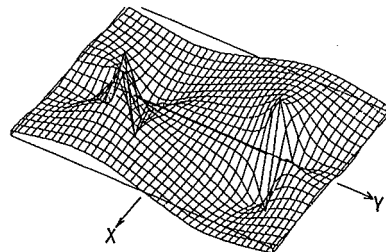
(a) 変位 U



(b) 変位 V



(c) 応力  $\sigma_x$



(d) 応力  $\tau_{xy}$

図-16 引張りクラックの解 ( $|x| < 1.5 \text{cm}$ ,  $|y| < 2 \text{cm}$ )

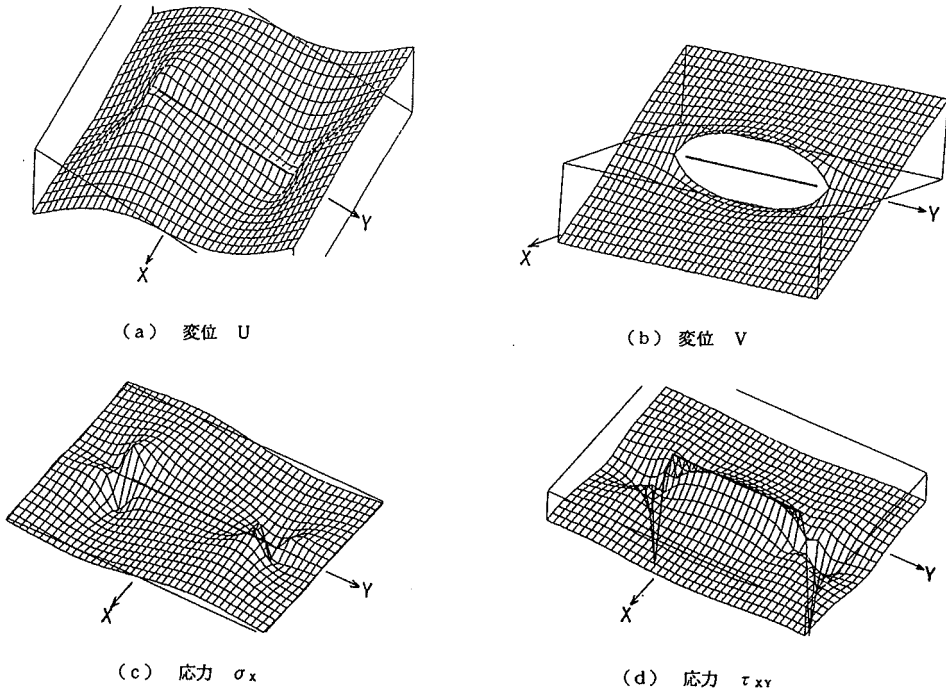


図-17 せん断クラックの解 ( $|x| < 1.5 \text{ cm}$ ,  $|y| < 2 \text{ cm}$ )

に変形される。

$$W = D_4(\bar{z}\phi_4 + \phi_4) + D_{12}(\bar{z}\phi_{12} + \phi_{12}) \dots (12)$$

ここで、 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 0.3 \text{ cm}$  未定係数を  $D_4 = 1.0$ ,  $D_{12} = 0.65$  とすると、変位および応力は図-15 のような形状となる。この例では、プロセスゾーンに負の部分が出て不自然であるが、これは Westergaard の解の  $ia/\sqrt{z^2+a^2}$  を  $\sinh\{H_4(z, a, b)\}$  で単純に置換したためである。この不自然さを改良するために、(その7)の解も活用して、式(12)に重ね合わせると次のようになる。

$$W = D_4(\bar{z}\phi_4 + \phi_4) + D_7(\bar{z}\phi_7 + \phi_7) + D_{12}(\bar{z}\phi_{12} + \phi_{12}) \dots (13)$$

ここで、 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 0.3 \text{ cm}$  未定係数を  $D_4 = 1.0$ ,  $D_7 = 1.1$ ,  $D_{12} = -0.2$  とすると、応力と変位は図-16 のような形状となる。これらは引張りを受ける基本解3個より成るモード1の解として有限な応力と開口を示すものである。

(2) せん断クラックの場合

表-2のせん断の組合わせをとり

$$W = D_2(\bar{z}\phi_2 + \phi_2) + D_5(\bar{z}\phi_5 + \phi_5) + D_{10}(\bar{z}\phi_{10} + \phi_{10}) \dots (14)$$

と定義する。

ここで、 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 0.3 \text{ cm}$  未定係数を  $D_2 = 1.0$ ,  $D_5 = -1.1$ ,  $D_{10} = -0.2$  とすると、図-17 に示すような変位と応力分布が得ら

れる。これは、モード2の状態であることが納得されよう。

5. その他の例

著者等の導いた応力関数は、プロセスゾーンを変えたり、基本解の組み合わせを変えることにより応力が有限で開口変位に関してはいろいろな形状を表現することが可能になる。

図-18は、引張りを受けるクラックの解である式(13)において未定係数を3通り変化させた場合のそれぞれの開口形状の相違を示す。応力分布の図は割愛するが開口変位の形状がこのように変化し得ることは適用範囲の広さを意味するものであろう。

図-19は、引張りクラックにおいて主にプロセスゾーンの長さを変化させた場合の開口形状の変化を示している。特にクラック先端部の形状の相違が表現されている。

図-20は、引張りクラックにおいて両端のプロセスゾーンの長さが違う場合の開口変位と応力集中の変化を示している。

以上の結果より有限で滑らかな応力集中を持ちしかも開口変位について種々の形状を表現できることが納得されよう。

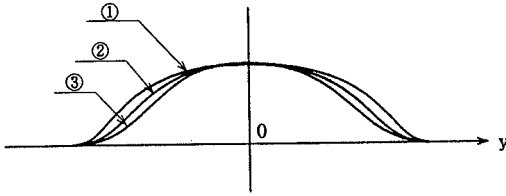
6. 拡張性

本文で示した応力関数の形は、クラックの応力集中を表す応力関数の1つの系の代表例であって、解析目的に



$a = 1.0 \text{ cm}$   
 $b = 0.3 \text{ cm}$

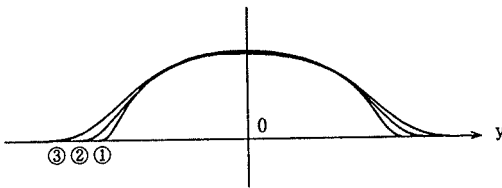
	$D_4$	$D_7$	$D_{12}$
①	1	1.610	-0.650
②	1	1.100	-0.200
③	1	0.975	-0.905



図一18 基本解の組み合わせの違いによる開口変位の変化 (引張りクラック, その4, その7, その12)

	$a_{\text{cm}}$	$b_{\text{cm}}$
①	1.0	0.2
②	1.0	0.3
③	1.0	0.4

	$D_4$	$D_7$	$D_{12}$
①	1	1.100	-0.220
②	1	1.100	-0.197
③	1	1.100	-0.170



図一19 主にプロセスゾーンの長さの違いによる開口変位の変化 (引張りクラック, その4, その7, その12)

合わせて広く拡張し得るものである。

(1) 重み関数：計算例では2次式と4次式で図-5に示すものとしたがこれは、プロセスゾーン先端  $|y|=a$ ,  $|y|=a+b$  で応力集中が極端に滑らかになるように、かつ積分結果が極力簡単になるように配慮したものである。重み  $\rho(t)$  を変えることによって関数  $H(z)$  が変わるので、応力集中の形状を大幅に変更することは可能でありこれによって多くの応力集中形状を構成し得る。

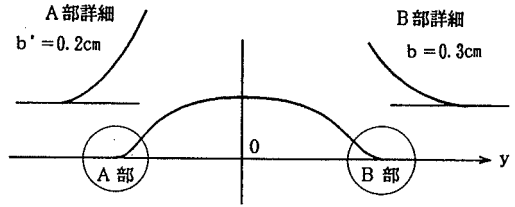
(2) 基本解 (表-1)：無限遠方で発散する解でも複数個重ね合わせて発散項を0にすることは可能である。有限領域のみを対象にする場合は高次の発散項を増設することは構わない。すなわち、表-1の  $z^k$  を  $k \geq 4$  とする項も活用し得る。

(3) 境界値問題への関連：基本解は  $y$  軸 (クラック線) 上の  $|y| > a+b$ ,  $|y| < a$  の領域の境界条件を完全に満足している。計算例ではプロセスゾーンの応力分布を極力平滑化するという目的で未定係数を決定したものである。境界値問題としてたとえば、ある材料中のクラック先端のプロセスゾーン相当部分 ( $a < |y| < a+b$ ) の応力分布の形状 (あるいは開口変位) を指定するというような問題の場合には、次のようにすることが望ましい。重み関数  $\rho_k(t)$  を2, 3変化させてそれらに対応する表-1の基本関数群を用意して、せん断・引張り・曲げ等の外力条件に合う基本関数を選び未定係数法でプロセス

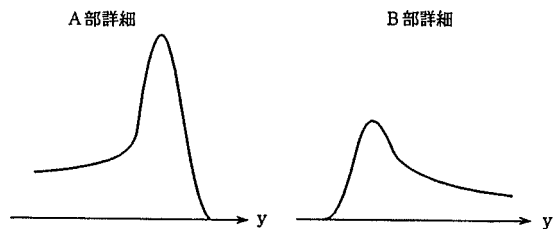
$$W = D_4(\bar{z}\phi_4 + \phi_4) + D_7(\bar{z}\phi_7 + \phi_7) + D_{12}(\bar{z}\phi_{12} + \phi_{12})$$

$$E = 2.1 \times 10^9 \text{ MPa}, \nu = 0.3, a = 1 \text{ cm}, b = 0.3 \text{ cm}, b' = 0.20 \text{ cm}$$

$$D_4 = 1.0, D_7 = 1.1, D_{12} = -0.185$$



(a) 変位  $U$



(b) 応力  $\sigma_x$

図-20 クラック両端のプロセスゾーンの長さの違いによる開口変位および応力集中の変化 (引張りクラックの場合)

ゾーン部分のみで選点法を試みる。

## 7. むすび

本研究の特色を要約すると次のとおりである。

クラックを有する等方等質無限板の引張りあるいはせん断外力に対する問題に対し Westergaard の解を、平滑化することにより複数の基本解(その1)~(その12)を導き、これらを複数組み合わせたり、プロセスゾーンの長さを変えることにより、有限で滑らかな応力集中を持ち、しかも開口変位 (特にクラック先端部) についてもいろいろな形状を表現しうる応力関数を導いた。

たとえば、岩盤やコンクリート等の材料では、クラック先端における無限大の応力集中は不適當である。また Dugdale の解は塑性域を解析するには好都合であるが、応力が緩やかに立ち上がる部分が無く、かつ平均応力がいかに小さくなくても  $\sigma_{yd}$  が生じるという点は不自然であろう。たとえばコンクリートや岩盤に適用する場合には、著者等が導いた応力集中が緩やかに立ち上がる関数の方が合理的であろう。この関数は、境界面亀裂の解にも活用し得る<sup>15), 16)</sup>。すなわち土木工学の分野で対象とする材料のクラック解析用としては望ましい関数を導き得たと思われる。

また、著者等の導いたこの関数は、コンクリートのクラック進展についての数値シミュレーション<sup>9)</sup>や無発破工法の割岩機構の解析あるいは、粘土地盤における薬液注入機構の解析等に活用できる。

なお、本研究の手法をさらに拡張して  $y$  軸上の有限部分  $|y| < a$  で連続で、 $|y| > a + b$  がクラック（自由辺）という有限連続板の問題に対してもそれぞれの応力状態における応力関数を求めることが可能である。これに関しては、次の機会に譲りたい。

#### 参考文献

- 1) Westergaard, H.M. : Bearing Pressures and Cracks, J. of Appl. Mech., Tran. of the ASME, Vol.33, A-49~53, 1939.
- 2) Dugdale, D.S. : Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. Mech. Phys. Solids, Vol.8, pp.100~104, 1960.
- 3) Cho, K.Z. et al. : Fracture Process Zone of Concrete Cracks, J. of Eng. Mech., Vol.110, No.8, pp.1174~1184, 1984.
- 4) Wium, D.J.W. et al. : Hybrid Model for Discrete Crack in Concrete, J. of Eng. Mech., Vol.110, No.8, pp.1211~1227, 1984.
- 5) Visalvanich, K. and Naaman, A. : Fracture Model for Fiber Reinforced Concrete, ACI J. Title No.80-14, pp.128~138, 1983.
- 6) 段樹金・児嶋弘行・中川建治：亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数，土木学会論文集，No. 374/I-6, pp. 399~407, 1986.
- 7) 段樹金・中川建治：せん断を受ける円盤状亀裂の周辺で有限な応力集中を与える応力関数，土質工学会論文集，

Vol. 28, No.1, pp.153~160, 1988.

- 8) 段樹金・堀 晃芳・中川建治：亀裂を持つ板の2次元問題を解析するための特異関数に関する研究，土木学会論文集，No.396/V-9, pp. 21~28, 1988.
- 9) Fujii, K., Duan, S. and Nakagawa, K. : A Mathematical Model for Fracture Process of Four Point Bending Concrete Beam, Eng. Fract. Mech., Vol.40, No.1, pp.37~44, 1991.
- 10) Erdgan, F. : Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Crack, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 32, pp.403~410, 1965.
- 11) England, A.H. : A Crack between Dissimilar Media, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 32, pp.400~402, 1965.
- 12) Comninou, M. : The interface crack, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 44, pp.631~636, 1977.
- 13) Duan, S., Yazaki, H. and Nakagawa, K. : A crack at the interface of an elastic half plane and a rigid body, Eng. Fract. Mech., Vol.32, No.4 pp.573~580, 1989.
- 14) Duan, S., Yazaki, H., Fujii, K. and Nakagawa, K. : A Mathematical approach of the interface crack with the fracture process zone, Research Report of the Factory of Eng., Gifu., No.41, pp.1~10, 1991.
- 15) 村瀬安彦・中川建治：円形境界面で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析，土木学会論文集，No. 483/I-26, pp. 41~49, 1994.
- 16) Fujii, K., Nakagawa, K., Duan, S. and Kato, Y. : Stress function with finite magnitude of stress concentration around an interface crack, Eng. Fract. Mech., Vol.47, No.6, pp.881~891, 1994.

(1993. 11. 16 受付)

## STUDY ON THE STRESS FUNCTION WITH FINITE STRESS CONCENTRATION AT CRACK TIP

Hideo SUHARA and Kenji NAKAGAWA

This paper is to propose a method of deriving stress functions with finite stress concentration at crack tips in an isotropic and homogenous plate which is applied uniform tensile or shearing stresses, etc. at infinity. By smoothing Westergaard's solution, stress functions constructing corresponding parts of process zone are derived. In this way, 12 sets of fundamental solutions are derived, it is shown that by combining the solutions adequately or adjusting the length of process zone, finite and smooth stress concentrations are constructed and the various forms of opening displacements are expressed. Proposed functions are usefully applied for the analysis of numerical simulations for fracture or development of cracks in concrete or rock.