

研究展望 構造物の形態解析

SHAPE ANALYSES OF STRUCTURE

半谷裕彦

Yasuhiko HANGAI

工博 東京大学生産技術研究所 教授
(〒106 東京都港区六本木 7-22-1)

Key Words: shape analysis, structural design, unstable structure, generalized inverse matrix, homology design, shape control

1. はじめに

構造物の形態は、(a) 自重はもとより、地震や風などの外部環境に対する抵抗能力を確保すること、(b) 機能上の要求を満足すること、(c) 人工構造物として環境に同化すること(美しいこと等)、など、種々の条件によって決定される。

アイデアが「かたち」をなしてきた、というとき、この「かたち」は幾何学的あるいは図的な意味での「形状」と内部に存在するシステムとしての「構造」を包含していると考えられる。ここで、形状+構造を「形態」と呼ぶことにする。この意味において、構造力学は構造物の有しているシステムに関する力学とすることができる。これに対し、形状+構造に関する力学を形態力学と名付けることにする。

構造物の形態を設計する過程(形態設計過程)と設計した形態が外乱等によって変化していく過程(形態変化過程)を考えてみる(図-1)。設計する、あるいは目標とする形態を「価値のある形態」、外乱等により変化した後の形態を「無価値な形態」と呼ぶことにする。通常の意味での構造解析は与えられた形状に対し、形態変化過程における情報を得ることを目的としている。一方、形態設計過程における解析を「形態解析」と名付ける。形態解析は「形態=形状+構造」に対応して、形状解析と構造解析の両者を含むことになる。

ここで、形態力学の必要性を簡単な例で示してみる。図-2は球形シェルと円筒シェルを接続した压力容器である。厚さを t_1, t_2 とすると、 $t_1=t_2$ として設計すると、球形シェルの剛性は円筒シェルの剛性より大きく、接続点で変位のギャップをなくすために大きな曲げモーメントが発生する。この压力容器の設計に際し、技術者として次の二つの立場がある。① $t_1=t_2$ として、面内力と

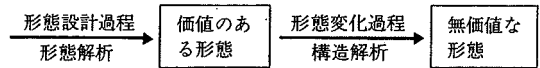


図-1 形態設計と形態変化

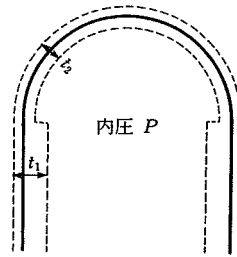


図-2 压力容器

曲げモーメントを計算し、許容応力以下とする(応力解析による設計)。② t_1 に対する t_2 の比を変化させ、曲げモーメントが生じないようにする(形状解析による設計、 $t_1/t_2=(2-\nu)/(1-\nu)$ 、 ν :ポアソン比、とすると実現する)。有限要素法等の解析法、および、コンピュータの発達によって、構造解析、特に、応力解析は、ブラックボックス化されるとともに、容易になっている。そのため、①の立場にたつ構造設計が多くなっている。しかし、本来の意味における構造設計、つまり、力学に立脚した設計とは②の立場にたつものをいうのであろう。

次に、異なる例をあげる。図-3は精密機器を支持する平板A-Aを床B-Bから H の距離に設計する機能構造の設計問題を示している。平板A-Aに精密機器を載せると平板A-Aは変位するが、変位後も平面を保つようにしたい。この構造を、経験によって決めることはほぼ不可能である。そこで、形態解析を用い、トラスでこの機能を満足する形態を求めると図-4となる。このなかで、どれを採用するかは、デザイナーや他の要因によ

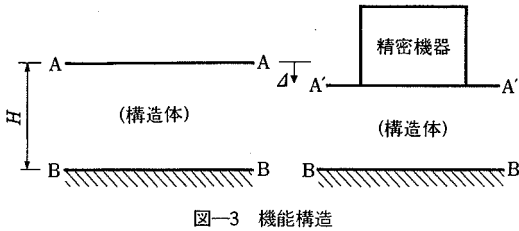


図-3 機能構造

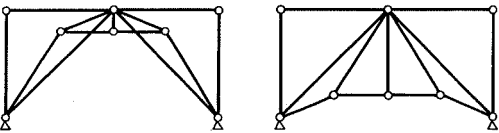
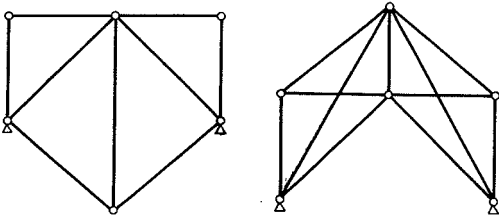
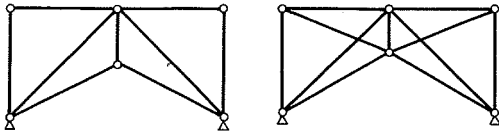


図-4 機能を満足する形態

て決まってくるであろう。しかし、与えられた機能を満足する形態については、あらかじめ技術者が提示する必要がある。

本論文では、弾性論の基礎方程式に立脚する形態解析を既往の研究をもとに紹介する。

2. 基礎方程式

構造物を表現する3個の基礎概念は、力、形、材料、である。これらの概念を定式化したものが構造解析の基礎方程式であり、離散的に表すと次の3個となっている。

力：釣合方程式 $f = B(x)\sigma$ (1)

形：適合方程式 $\epsilon = A(x)d$ (2)

材料：構成方程式 $\sigma = D(x)\epsilon$ (3)

ここに、 f : n 次荷重ベクトル

σ : m 次応力ベクトル

ϵ : m 次歪ベクトル

d : n 次変位ベクトル

B : (n, m) 型釣合マトリクス

A : (m, n) 型適合マトリクス

D : (m, m) 型構成マトリクス

x : 構造形態を表すパラメータ

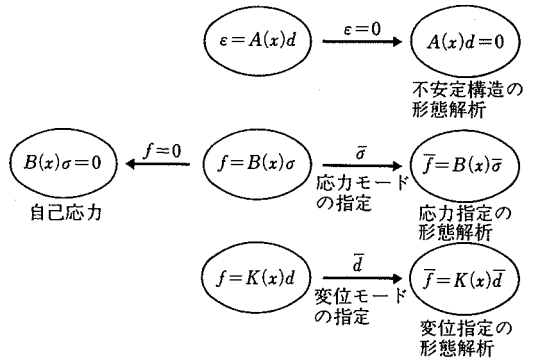


図-5 形態解析の種類

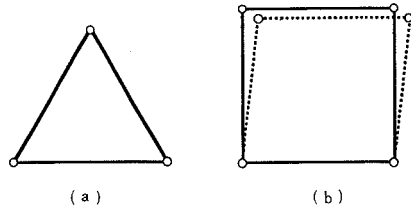


図-6 形態安定 (a) と形態不安定 (b)

m : 適合条件数

n : 自由度数, である。

式(1)~(3)において、 σ と ϵ を消去すると荷重と変位の関係式が得られる。つまり、

$$f = K(x)d, \quad K(x) = B(x)D(x)A(x) \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 K : (n, n) 型剛性マトリクス, である。

図-5は式(1)~(3)の基礎方程式に立脚する形態解析の種類を示したものであり、具体的内容を以下に述べる。

3. 不安定構造の形態解析

直線材を回転自由な接合部で連結した構造を立体トラスという。この立体トラスが剛であるかどうかを最初に調査したのはJ. C. Maxwell (1831-1879) である¹⁾。ここでいう剛とは、部材に伸び縮みがない場合において、構成した形態が変化しないことを意味しており、形態安定と呼ぶことができる。一方、立体トラスが剛でないとき形態不安定という(図-6)。形態不安定なトラスには剛体変位(歪が零で生じる変位で不伸張変形ともいう)によってメカニズムが形成される(図-6(b)の点線)。形態不安定である構造を不安定構造という。図-7はケーブルを示したもので、 C_0 で示す初期形状に自重を作用すると、無歪状態で変位が生じ、 C_1 の形状に落ちつく。このように、ケーブルや膜、あるいは、塑性ヒンジが形成され不安定状態にあるフレーム等、不安定構造に属する構造は多い。

形態不安定は2種類に分類することができる。図-8

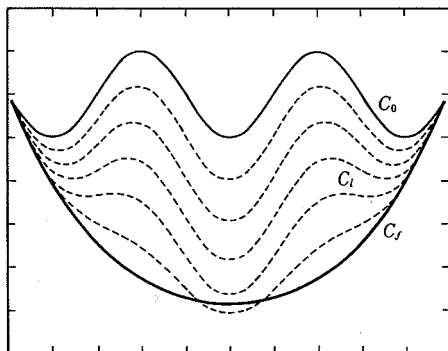
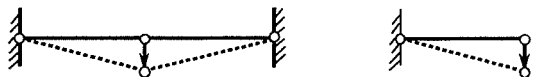


図-7 ケーブルの形態変化



(a) 微小変位の範囲の形態不安定 (b) 有限変位の範囲の形態不安定

図-8 不安定トラス

のトラスで説明すると、(a) の場合には変位することにより剛性が付与され、安定な構造になる。しかし、(b) の場合には与えられた形態の近傍で変位が生じても剛性が付与されない。(a) を微小変位の範囲の形態不安定、(b) を有限変位の範囲の形態不安定、という²⁾。図-7 に示す例のように、有限変位の範囲で形態不安定な構造に荷重を作用すると、形態を変化させながら、最終的には運動の生じない安定な形態にたどりつく。この過程を不安定構造の「安定化移行過程」と呼び、安定化移行過程の形態を求める問題を「不安定構造の形態決定問題」という。

不安定構造の形態を x_0 とする。不安定構造では歪が零で生じるから、式 (2) において $\epsilon=0$ とおく。つまり、

$$A(x_0)d=0 \dots\dots\dots (5)$$

上式を解くと、

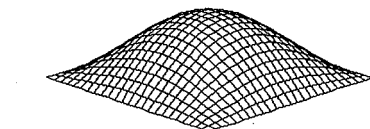
$$d=[I_n-A^+A]\alpha \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 I_n は n 次単位行列、 A^+ は A のムーア・ペンローズ型一般逆行列で、 α は任意のベクトルである³⁾。 A のランクを r とすると、式 (6) の係数マトリクス $[I_n-A^+A]$ のランクは $p=n-r$ となり、 p 個の独立な列ベクトルを持つことになる。 p 個の独立な列ベクトルを h_1, \dots, h_p とすると、式 (6) は次式となる。

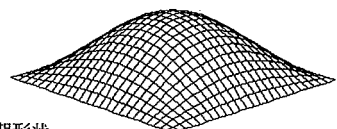
$$d=\alpha_1h_1+\dots+\alpha_ph_p \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 h_1, \dots, h_p の力学的意味は無歪で生じる剛体変位モードである。上式より、 $p=0$ の場合、形態安定、 $p \geq 1$ の場合、形態不安定であることがわかる。

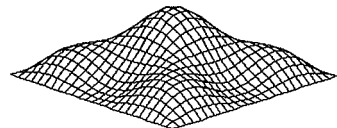
不安定構造は荷重の作用下において、荷重モードに応じた安定形態へ移行していく。不安定形態から安定形態



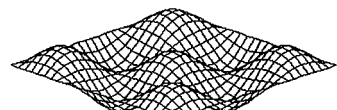
外力形状



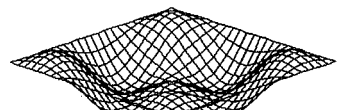
初期形状 STEP 1



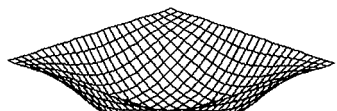
STEP 20



STEP 60



STEP 80



最終形状 STEP 120

図-9 矩形膜の安定化移行過程

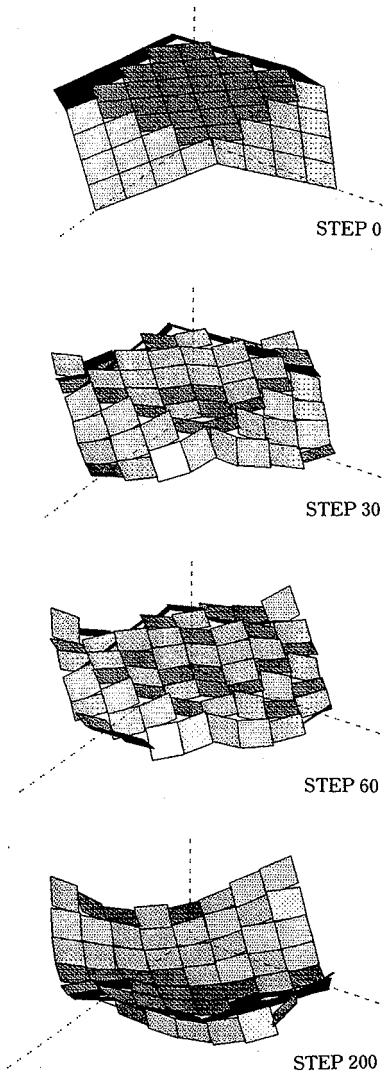
への移行過程を追跡するには、式 (7) において $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ を決定すればよい。つまり、 $x=x_0$ の状態で d が決定されると $x_1=x_0+d$ の新しい形態へ移行することになる。今、 C_0, C_i, C_f の状態におけるポテンシャルエネルギー関数 Π を考えると次式が成立している (図-7 を参照)。

$$\Pi(C_0) > \dots > \Pi(C_i) > \dots > \Pi(C_f) \dots\dots\dots (8)$$

C_f の状態でポテンシャルエネルギーは最小となる。そこで、ポテンシャルエネルギーを安定化移行過程における計量として採用し、減少する方向へ変位を進行させていく。 C_i から C_{i+1} の区間におけるポテンシャルエネルギーの変化を $\Delta\Pi$ とすると

$$\Delta\Pi = -d^T f \dots\dots\dots (9)$$

上式に式 (7) を代入すると



図—10 複合平板の安定化移行過程

$$\Delta\Pi(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = -[\alpha_1 \dots \alpha_p] \begin{bmatrix} h_1^T f \\ \vdots \\ h_p^T f \end{bmatrix} \dots\dots\dots(10)$$

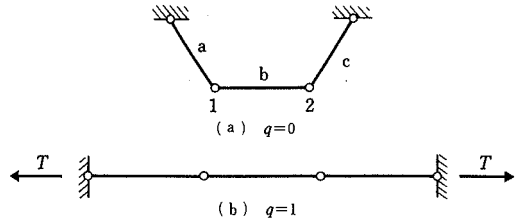
$h_1^T f, \dots, h_p^T f$ の比は各々の剛体変位モードの方向への仕事の比となる。そこで、係数 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ の値として仕事の大きさに比例する値を採用する。

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} h_1^T f \\ \vdots \\ h_p^T f \end{bmatrix} \dots\dots\dots(11)$$

上式は C_i 時点において、ポテンシャルエネルギー曲面上の最大傾斜方向へ移行することを示している³⁾。式(11)を式(9)に代入すると

$$\Delta\Pi = -\{(h_1^T f)^2 + \dots + (h_p^T f)^2\} \alpha \dots\dots\dots(12)$$

上式において、中括弧内の値は非負であり、増分量 α



図—11 不安定トラスと自己応力

の値を正に与えれば $\Delta\Pi < 0$ は自動的に満足される。

安定状態 C_f に至るとポテンシャルエネルギーは停留状態になるので $\Delta\Pi = 0$ となる。式(12)を用いると

$$h_1^T f = 0, \dots, h_p^T f = 0 \dots\dots\dots(13)$$

上式は安定形態では無歪で生じる独立な剛体変位モードはすべて荷重ベクトル f と直交していることを意味している。

具体的な数値解析例として、図—9に矩形膜、図—10に複合平板構造、の安定化移行過程を示す⁴⁾。

4. 自己応力と安定形態

ケーブルネット構造、膜構造、tensegrity 構造（発展形としてアトランタのジョージアドーム等）、などは無歪状態で形態が変化する不安定構造である。しかし、実際において、安定構造として採用される理由は、自己応力（初期張力等）の導入により正の剛性を付与し得ることにある。本節では式(1)を利用して、自己応力の存在と自己応力の導入による安定化を述べる。

自己応力は荷重 f が零に対応する応力である。 $f=0$ の場合、式(1)は次式となる。

$$B(x)\sigma = 0 \dots\dots\dots(14)$$

ここに、 B は (n, m) 型長方マトリクスで、 $B^T = A$ の関係が成立している。式(14)の解は β を任意のベクトルとして

$$\sigma = [I_m - B^+ B] \beta \dots\dots\dots(15)$$

右辺の係数マトリクスのランクは $\text{rank}(B) = \text{rank}(A^T) = r$ であるから、 $q = m - r$ となる。 q は自己応力の独立なモードの数である。 $[I_m - B^+ B]$ の独立な列ベクトルを g_1, \dots, g_q とすると式(15)は次式となる。

$$\sigma = \beta_1 g_1 + \dots + \beta_q g_q \dots\dots\dots(16)$$

ここに、 β_1, \dots, β_q は任意のスカラーであり、 g_1, \dots, g_q は自己応力のモードを表している。

図—11 (a) に示すトラスは不安定トラスであるが、この形状においては自己応力を導入することは不可能である ($q=0$ に対応)。しかし、このトラスの結合関係を変えず、図—11 (b) のように形状を変化すると $q=1$ となり自己応力の存在が可能となる。このように、自己応力の存在する形態 x を求める問題が考えられ、この問題を「自己応力の存在可能な形態決定問題」という。

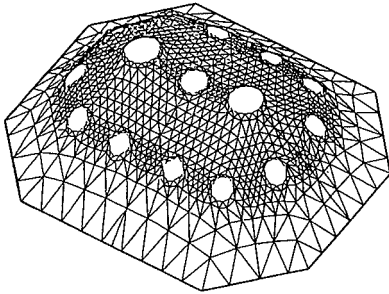


図-12 サスペンション膜構造⁶⁾

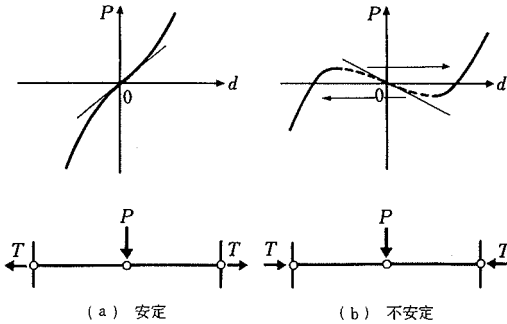


図-13 自己応力の導入による安定化

「自己応力の存在可能な形態決定問題」の古典的問題は極小曲面（等張力曲面）を求める Plateau 問題である⁵⁾。極小曲面は膜構造やケーブルネット構造の設計に利用されている。デカルト座標系における極小曲面方程式は $z=z(x, y)$ を曲面形状として次式で与えられる。

$$\left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots(17)$$

上式は非線形方程式で、特殊な例を除いては、このままの形で解くことができない。そのため、差分法や有限要素法による数値解析が行われている⁶⁾。図-12にその例を示す。

不安定構造に自己応力が導入できたとしても、必ずしも安定化できるとは限らない。具体例を図-13に示す。(a)は安定化されるが、(b)は安定化されない。複雑な構造の一部に(b)の状態が出現すると不安定状態となる。自己応力の導入によって安定化できる形態 x を求める問題を「自己応力による安定化可能な形態決定問題」という。

式(16)において $q \geq 2$ の場合には自己応力モードが複数個存在する。その場合には β_1, \dots, β_q の決定法が必要となる。文献⁷⁾は剛性が最大となる最適組み合わせの解析法を試みたものである。

5. 応力指定の形態解析

次式で与える Pucher の膜方程式を考える⁸⁾。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + P_z = 0 \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 $z=z(x, y)$ は曲面形状、 F は応力関数、 P_z は鉛直荷重である。膜応力は応力関数 F より $N_x = \partial^2 F / \partial y^2$, $N_y = \partial^2 F / \partial x^2$, $N_{xy} = -\partial^2 F / \partial x \partial y$ で得られる。通常の応力解析では曲面形状 z を与え、 F を解析する。一方、応力指定の形態解析では F を指定して z を解析することになる。この形態解析は「膜の逆問題」と呼ばれ、種々の解析が行われている⁹⁾。

鉄筋コンクリートシェルではコンクリートの性質（圧縮に強く、引張りに弱い）から、膜応力がシェル全面で圧縮応力状態になることが望まれる。Isler は逆転曲面の実験を利用して全面圧縮応力状態の任意形状シェルを多数建設している¹⁰⁾。主応力を次式で表す。

$$N_1, N_2 = \frac{N_x + N_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + N_{xy}^2} \dots\dots\dots(19)$$

このとき、逆転曲面の形態解析は $N_1 \leq 0, N_2 \leq 0$ の条件下で式(18)を解析することに対応する。逆転曲面は変分法に基礎をおくラグランジュ乗数法やペナルティ法を用いて解析されているが、高度の非線形性のため種々の工夫が要求される¹¹⁾。筆者らは4節で述べた不安定構造の形態解析を応用し、Isler 実験の手順に従った解析法を提案している¹²⁾。

一方、膜構造では圧縮でしわの発生する膜材料を用いる。そのため、膜面全体で $N_1, N_2 \geq 0$ となることが要求される。膜構造の形態設計では張力導入とともに、 $N_1, N_2 \geq 0$ となる形状決定が重要となる¹³⁾。

梅谷の生長変形法¹⁴⁾や尾田によるパターン変換法¹⁵⁾等、一様応力や一様ひずみエネルギー密度を目標とする形態解析もこの分野に属している。

式(2)~(4)を用いて、応力指定の形態解析を離散的に定式化する。式(4)より $d = K^{-1}f$ であるから、式(2), (3)より ϵ と d を消去すると

$$\sigma = G(x)f, G(x) = D(x)A(x)K(x)^{-1} \dots\dots\dots(20)$$

ここに、 $G(x)$ は (m, n) 型長方マトリクスである。応力を指定する応力ベクトルを σ_1 として、式(20)を次式のように変形する。

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} - [G(x)]f = 0 \dots\dots\dots(21)$$

σ_1 を応力モード σ_0 と未知係数 β を用いて $\sigma_1 = \beta \sigma_0$ とすると

$$e(x, \beta, \sigma_2) = \begin{bmatrix} \beta \sigma_0 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} - [G(x)]f = 0 \dots\dots\dots(22)$$

上式は x, β, σ_2 を未知量とする非線形方程式であり、直接解を求めることはできない。そこで、ニュートン・ラプソン法等の収束解析を用いて数値的に解を求めることになる⁹⁾。

6. 変位指定の形態解析

初期形態を x_0 とし、外乱等の作用下で変位 d が生じると、新しい形態 $x = x_0 + d$ が誕生する。そこで、 d を制御することにより、外乱等の作用下において、構造物の形態を目標に応じた「最適形態」とすることが可能となる。

膜構造やスペースフレーム（立体骨組構造）は形態抵抗型構造で、使用時の形態によって外乱に対する抵抗能力が左右される。そのため、「最適形態」に関する研究は設計時において形態を決定する際のひとつの基準を与えることになる。さらに、「最適形態」は種々の環境条件や目標によって異なった形態となることから、形態自身を環境に応じて制御できる「形態制御構造」の開発も要望される。ここでは、「最適形態」や「形態制御構造」を扱う場合の基礎となる「与えた荷重条件のもとで、指定した変位あるいは変位モードが得られる形態決定問題」を述べる^{16), 17)}。

(1) Bott・Duffin 逆行列による解法

次式で与える変位の制約条件付きの荷重-変位関係式の解法を考える。

$$Kd = f \dots\dots\dots(23)$$

$$Ad = g \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 $A : (m, n)$ 型制約マトリクス

$g : m$ 次制約ベクトル

$m : 制約条件数 (m < n)$, である。

制約条件はすべて独立であるとすると

$$\text{rank}(A) = m \dots\dots\dots(25)$$

A のランクと行数が一致しているので A はフルランクであり、次式が成立する³⁾。

$$A^+ = A^+(AA^T)^{-1}A, AA^+ = I_m \dots\dots\dots(26)$$

ただし、 $A^+A = I_n$ は一般には成立しない。

式 (23), (24) をラグランジュ乗数ベクトル λ を導入し、 d と λ を未知量とする停留問題に変換する。その際的全ポテンシャルエネルギー関数は

$$\Pi = \frac{1}{2}d^TKd - f^Td + \lambda^T(Ad - g) \dots\dots\dots(27)$$

d と λ の各成分で偏微分し、零とおくことにより d と λ を未知量とする $(n+m)$ 個の連立方程式が得られる。

$$Kd + A^T\lambda = f \dots\dots\dots(28)$$

$$Ad - g = 0 \dots\dots\dots(29)$$

ここで

$$r = A^T\lambda \dots\dots\dots(30)$$

とおくと、式 (28) は次式となる。

$$Kd + r = f \dots\dots\dots(31)$$

上式の r は荷重 f と同様のベクトルで、式 (29) の制約条件を満足させるために節点に作用する仮定の荷重を表している。 K は構造物の形態 x の関数であることから、

x が変化すると r も変化する。つまり、式 (31) より

$$r(x) = f - K(x)d \dots\dots\dots(32)$$

上式で $r(x) = 0$ となる x を求めると、式 (31) は式 (23) に帰着し、また、式 (29) が満足されているから、制約条件つまり、式 (24) も満足することになる。以上より、本節における形態解析は次式を満足する \bar{x} を求める問題に帰着される。

$$r(\bar{x}) = 0 \dots\dots\dots(33)$$

次に、 K と A を用いて r を定式化する。まず、式 (29) より制約ベクトル g を消去する。そのため、 d を次式で u に変換する。

$$u = d - A^+g \dots\dots\dots(34)$$

上式の d を式 (28), (29) に代入し、式 (26) を用いると

$$Ku + r = h \dots\dots\dots(35)$$

$$Au = 0 \dots\dots\dots(36)$$

ここに、

$$h = f - KA^+g \dots\dots\dots(37)$$

式 (30), (36) より

$$u^Tr = u^TA^T\lambda = (Au)^T\lambda = 0 \dots\dots\dots(38)$$

上式は u と r が直交していることを示している。そこで、 L を n 次元空間内の部分空間、 L^\perp を L に対する直交補空間とすると、 u と r は直交しているから次式が成り立つ。

$$u \in L, r \in L^\perp \dots\dots\dots(39)$$

よって、 n 次元空間から L および L^\perp 上への正射影マトリクスを P_L および P_{L^\perp} とし、 a を n 次元空間内のベクトルとすると

$$u = P_L a, r = P_{L^\perp} a, P_L + P_{L^\perp} = I_n \dots\dots\dots(40)$$

上式を式 (35) に代入すると

$$[KP_L + P_{L^\perp}]a = h \dots\dots\dots(41)$$

$[K] \neq 0$ のとき、 $[KP_L + P_{L^\perp}] \neq 0$ であるから、

$$a = [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1}h \dots\dots\dots(42)$$

$[K] = 0$ のときには一般逆行列を用いればよい³⁾。上式を式 (40) に代入することにより、

$$u = P_L [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1}h \dots\dots\dots(43)$$

$$r = P_{L^\perp} [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1}h \dots\dots\dots(44)$$

上式の係数マトリクスは K の Bott・Duffin 逆行列と呼ばれる。

以上より、 P_L, P_{L^\perp} が作成されると、式 (23), (24) を満足する解は次式で得られることになる。

$$d = P_L [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1}(f - KA^+g) + A^+g \dots\dots\dots(45)$$

P_L, P_{L^\perp} は A が与えられると自動的に作成することができる³⁾。また、変位指定の形態解析は次のように定式化できる。

[A より P_L, P_{L^\perp} を作成し、

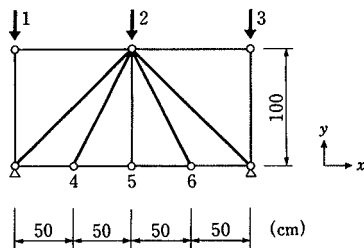


図-14 平面トラス

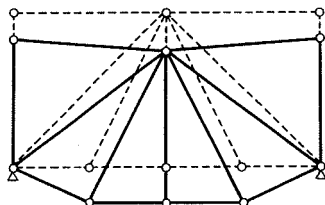


図-15 変位モード (制約無し)

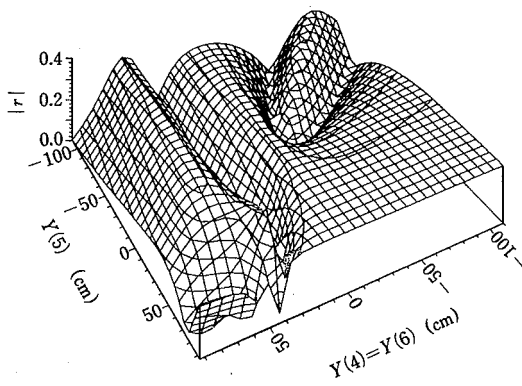


図-16 鳥瞰図

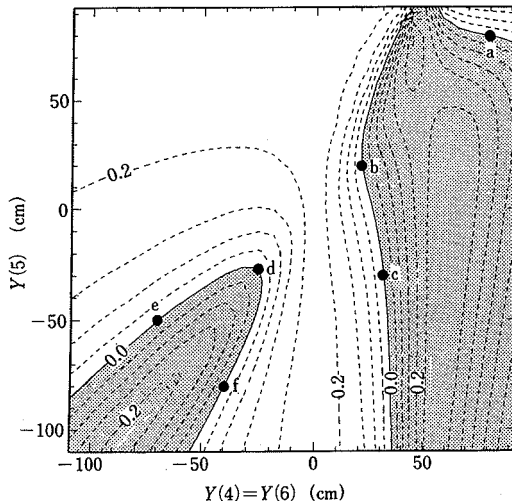


図-17 |r| 曲面の等高線図

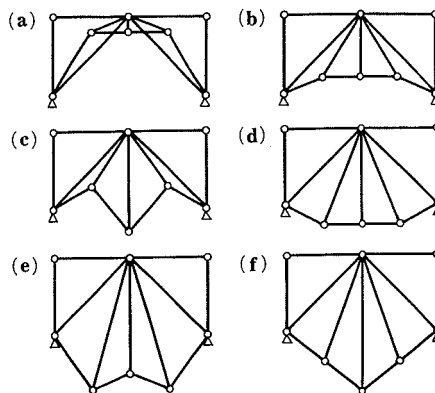


図-18 解形態の例

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_L [\mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_L^T]^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{A}^* \mathbf{g}) \dots (46)$$

において、 $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ となる \mathbf{x} を求めよ

式 (46) は非線形方程式であり、陽な解を求めることはできない。そこで、Newton-Raphson 法や最大傾斜法による数値解析を行う必要がある¹⁷⁾。

ここで、図-3 で示した機能構造を具体的に解析してみる。図-14 に示すトラス構造をモデルとして採用する。上弦節点に等しい鉛直荷重を作用すると図-15 に示す変位モードとなる。そこで、上弦節点の鉛直方向変位が等しくなる制約条件を考え、この制約条件を満足する構造形態を節点 4, 5, 6 の Y 座標値、つまり、 $Y(4) = Y(6)$, $Y(5)$ の 2 個の座標値を未知量として解析する。この場合、式 (46) は $Y(4)$, $Y(5)$ の関数となる。そこで、 $Y(4)$, $Y(5)$ の値を変化して、 $|\mathbf{r}(Y(4), Y(5))|$ の鳥瞰図と等高線図を描くと図-16, 17 となる。図-17 において、 $|\mathbf{r}| = 0$ となる曲線上の点がすべて指定した変位モードを満足する形態となる。この例の場合、解は無数に存在する。解形態の例として図-17 の点 a~f

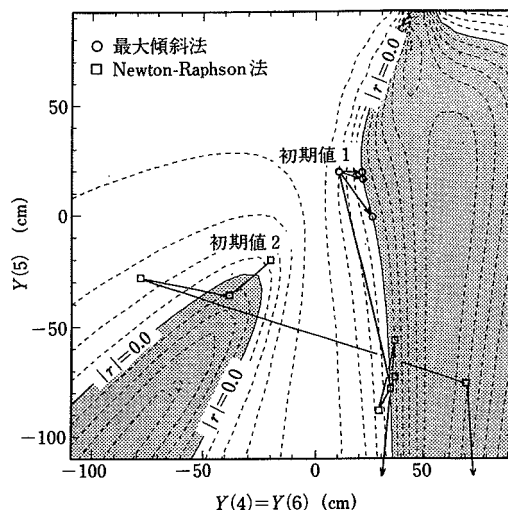


図-19 収束の様子

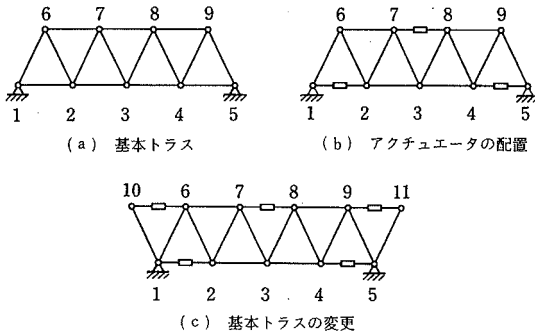


図-20 トラス部材のアクチュエータによる置換

に対する形態を図-18に示す。

次に、Newton-Raphson法による数値解析の様子を示す。図-19に示すように、初期値1および2の位置から解析を実行するといずれも発散して収束しない。式(46)で与えられる非線形関数は、図-16で理解できるように、非常に複雑な曲面を形成している。そのため、非線形方程式の代表的数値解法であるNewton-Raphson法はヤコビアンマトリクスに直接依存するため、□印で示すように解が得られないことがある。図-19の○印は最大傾斜法を利用した結果を示す。この例では、最大傾斜法を用いると解が得られているが、解の得られない例も多い。形態解析においては、定式化後の数値解法にも課題が多い。

(2) 形態制御構造

形態を制御する方法として、前節で述べたように、形態自身を変化する方法とアクチュエータ等を利用する方法がある。本節ではアクチュエータを組み込んだトラス構造を形態制御構造として採用し、指定した変位モードを保持しながら変形するための形態制御法を紹介する。アクチュエータにより形態制御を行う場合、指定した形状を保持できるためには適当なアクチュエータの配置が不可欠である。ここでは、アクチュエータの配置理論を主体に述べる。

図-20に示すトラス構造を用いて具体的に示す。(a)の基本トラスを制御するため、(b)に示すように部材12, 45, 78をアクチュエータに置き換えてみる(図中、□印の部材)。詳細は以下で述べるが、各アクチュエータの制御力(軸力)を n_b ($b=1\sim k$, k :アクチュエータ数)とすると、 n_b による構造物全体の制御力 R は次式で得られる。

$$R = Hn \quad (47)$$

このとき、次の課題が生じる。

課題1: $R=r$ となるアクチュエータの配置は存在するか。

課題2: $R=r$ となるアクチュエータの配置が存在するとき、各アクチュエータの制御力はどのように

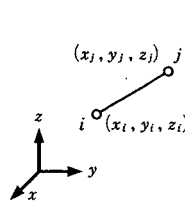


図-21 トラス部材

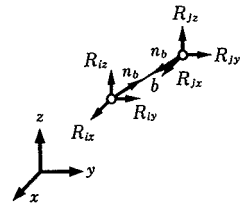


図-22 制御力と節点力

評価すればよいか。

課題3: $R=r$ となるアクチュエータの配置が存在しないとき、外部にどのようにアクチュエータを配置すればよいか。

課題3は図-20(c)に示すように、外部に新しい節点を設け、アクチュエータを配置することを意味している。

ここで、式(47)の H マトリクスを誘導する。図-21に示すように、デカルト座標において、節点 i と節点 j を結ぶトラス部材を a ($a=1\sim e$, e :部材数)とする。節点座標値ベクトルと方向余弦ベクトルを次式とする。

$$x_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, x_j = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}, \lambda_a = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}_a \quad (48)$$

部材長を l_a とすると

$$\lambda_a = \frac{x_j - x_i}{l_a} \quad (49)$$

次に、アクチュエータを考える。図-22に示すように、節点 i と節点 j を結ぶアクチュエータを b とする。アクチュエータ b の軸力を n_b とし、 n_b に釣合っている節点力を節点 i, j において次式とする。

$$R_{ib} = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{iz} \end{bmatrix}_b, R_{jb} = \begin{bmatrix} R_{jx} \\ R_{jy} \\ R_{jz} \end{bmatrix}_b \quad (50)$$

このとき、アクチュエータ b の釣合い式は

$$\begin{bmatrix} -\lambda_b \\ \lambda_b \end{bmatrix} n_b = \begin{bmatrix} R_i \\ R_j \end{bmatrix}_b \quad (51)$$

上式をすべてのアクチュエータについてまとめると次式となる。この式は式(47)に対応する式である。

$$R = Hn \quad (52)$$

課題1: k 個のアクチュエータによって指定した形状を保つに必要な節点力を確保するには、 $R=r$ が成立すればよい。式(52)の左辺を r で置き換えて

$$Hn = r \quad (53)$$

上式を n を未知量とする連立方程式と考え、解を持つ条件式を作ると

$$[I_n - HH^+]r = [I_n - HH^+]A^T \lambda = 0 \quad (54)$$

上式が成立するとき、基本トラスの部材をアクチュエータで置き換えることにより制御ができることを示している。

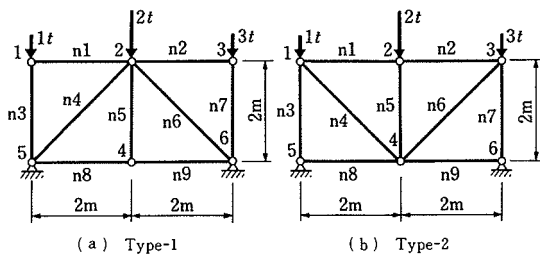


図-23 基本トラス

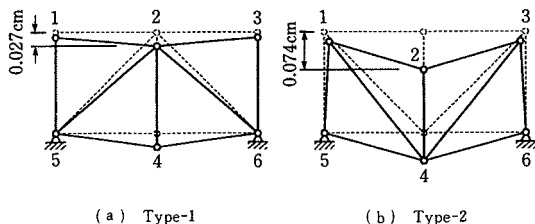


図-24 変位分布 (制御しない場合)

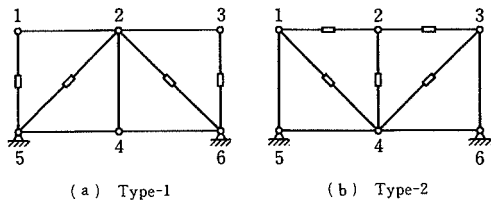


図-25 アクチュエータ配置

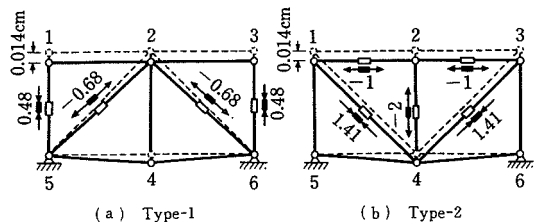


図-26 変位とアクチュエータ力

課題 2 : 式 (53) よりアクチュエータの制御力は

$$n = H^+ r \dots \dots \dots (55)$$

式 (44) を代入することにより

$$n = H^+ P_L \perp [K P_L + P_L \perp]^{-1} h \dots \dots \dots (56)$$

課題 3 : 基本トラスの全部材をアクチュエータで置き換えても式 (54) を満足させることができない場合には、基本トラスの外部に新しい節点を設けるか、あるいは、トラスの結合関係を変えて新しい基本トラスを作るか、のどちらかによりアクチュエータを配置する必要がある。この力学的意味は $r = A^T \lambda$ における A^T の独立な列ベクトルを H の列ベクトルで表現できないことである。そのため、 A^T の列ベクトルを表現できるように、アクチュエータの配置を考えてやればよいことになる。

図-23 に示すトラス構造において、部材のヤング率

を E 、断面積を A とする。また、制約条件として上弦部材の節点を鉛直方向変位を同一とする。このとき、 $DY(1) = DY(2) = DY(3)$ であるから、式 (24) の制約マトリクスと制約ベクトルは次式となる。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (57)$$

図-23 に示す荷重を作用する (単位は EA)。図-24 に制御しない場合の変位モードを示す。この場合には節点 1, 2, 3 の変位は制約条件を満足していない。式 (56) より n をもとのと

$$\text{Type-1 : } n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \\ n_7 \\ n_8 \\ n_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.48 \\ -0.68 \\ 0 \\ -0.68 \\ 0.48 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Type-2 : } n = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1.41 \\ -2 \\ 1.41 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (58)$$

上式で零でない部材をアクチュエータで置き換えればよいから、図-25 に示すアクチュエータの配置が得られる。Type-1 のアクチュエータはすべて支持節点に結合されている。一方、Type-2 では、すべて自由節点間に配置されている。支持節点と自由節点間のアクチュエータ配置を外部配置、自由節点間の配置を内部配置と呼ぶ。図-26 に変位とアクチュエータ力を示す。節点 1, 2, 3 の鉛直方向変位は同一に保たれている。

Bott・Duffin 逆行列を利用する形態制御構造の解法は動的問題へも応用できる¹⁸⁾。

7. おわりに

本稿では、離散的に表現した弾性論の基礎方程式 (釣合方程式と適合条件式) に立脚する形態解析を紹介した。形態解析の基礎方程式は高度な非線形方程式である場合が多く、解の存在条件や解の唯一性条件、また、数値解法の選択、など未解決の課題が多く残されている。形態解析は構造物の設計時における有用な道具になることが予想される。今後の発展に期待したい。

参考文献

- 1) Calladine, C.R. : Buckminster Fuller's tensegrity structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames, International Journal of Solids and Structures, Vol.14, pp.161~172, 1978.
- 2) 田中・半谷 : 不安定トラスの剛体変位と安定化条件, 日本建築学会構造系論文集, 356号, pp.35~42, 1985.
- 3) 半谷・川口 : 形態解析, 培風館, 1991.

- 4) 宮崎・川口・半谷：矩形要素による膜構造の安定化移行解析，膜構造研究論文集，No. 4, pp.13～17, 1990.
- 5) 佐藤：面積最小の問題の石鹼膜実験(1-4)，数学セミナー，第12巻，9～12月号，日本評論社，1973.
- 6) 石井：膜構造の形状解析(形状決定の問題)概説，膜構造研究論文集，No. 3, pp.83～107, 1989.
- 7) 小田・半谷：張力安定構造の自己釣合応力の導入法，第4回設計工学・システム部門講演会論文集，日本機械学会，pp.85～88, 1994.
- 8) Flügge, W. : Stresses in shells, Springer-Verlag, 1973.
- 9) Ramm, E. : Shape finding methods of shells. Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures, Vol.33, No.109, pp.89～99, 1992.
- 10) Isler, H. The quality of shell design and construction, 同上, Vol.32, No.106, pp.67～71, 1991.
- 11) 大森・大木・中増：設計原型曲面としての吊り下げ曲面の形態決定，第4回設計工学・システム部門講演会論文集，日本機械学会，pp.98～103, 1994.
- 12) 吉中・半谷：任意形状シェルの形態決定法，同上，pp.89～91.
- 13) 半谷：空間構造における形態形成の数理，カラム，109号，pp.65～71, 1988.
- 14) 梅谷：骨の形態と生長変形法，日本機械学会誌，第79巻，693号，pp.749～754, 1976.
- 15) 尾田：有限要素法による強度的最適形状の決定，日本機械学会誌，第79巻，691号，pp.4～12, 1976.
- 16) 半谷・関：ホモロガス変形を制約条件とする立体トラス構造の形態解析，日本建築学会構造系論文報告集，第405号，pp.97～102, 1989.
- 17) 半谷・原田：変位モード指定の構造形態解析法，同上，第453号，pp.95～100, 1993.
- 18) 金井・半谷：変位制約を持つ構造物の動的制御，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第18巻，pp.383～388, 1994.

(1994.7.28 受付)