

三軸応力状態での飽和砂の不安定挙動の解析的検討

森尾 敏*・日下部 伸**・安福規之***・
兵動正幸****

非排水三軸試験およびひずみ経路制御三軸試験で表れるひずみ軟化を伴う不安定挙動を解析的に検討し、筆者らが提案した弾塑性構成モデルは、極めてゆるく詰められた砂の非排水せん断強度がゼロになり、静的液状化が発生する挙動、間隙比の減少に伴いひずみ軟化からひずみ硬化に至る挙動をうまく表現できることを示した。また、ひずみ軟化の発生には、材料固有の体積変化特性に加えて、排水条件が重要な役割を演じていること、この時の変形はせん断帯の発生を伴わない均質なものであることを明らかにした。

Key Words : triaxial test, sand, strain softening, instability, constitutive relation

1. ま え が き

土構造物の破壊は、土要素の不安定挙動によって引き起こされ、一般にこの不安定挙動は応力点が破壊曲面に到達した時に生じると考えられている。しかし、Ladeら^{1)~3)}は、非排水条件下の実験結果に基づいて次のことを明らかにした。

- ① ゆる詰め砂においては、応力点が破壊曲面に到達する前にひずみ軟化を伴う不安定挙動が生じる。
- ② Drucker および Hill の安定条件は、不安定挙動の定義には適用できない。
- ③ 摩擦性材料の安定には、材料固有の体積変化特性(ダイレイタンス)が重要な役割を演じる。

Lade らが取り扱った不安定挙動は、いわゆる静的な液状化と呼ばれる現象と同じもので、別の表現をすれば、有効応力経路が排水時の強度に至らないうちに生じる破壊現象であるといえる。

Lade らの研究におけるひずみ軟化が、せん断時に体積収縮を示すゆる詰め砂に限定されているのに対し、Chu ら^{4),5)}、内田ら⁶⁾は、ひずみ経路制御試験(体積ひずみ増分と軸ひずみ増分の比を一定に制御した三軸試験)と呼ばれる手法を用いて、せん断時に体積膨張を示す中～密詰め砂においてもひずみ軟化を伴う不安定挙動が表れることを示した。また、五十嵐ら⁷⁾も三軸圧縮試験において排水量を制御することによって静的液状化挙動が表れるとの結論を得ており、小高ら⁸⁾も同様の実験結果を示している。

本研究は、これらのひずみ軟化を伴う不安定挙動を解析的に検討したものである。解析には、筆者ら⁹⁾が提案

している弾塑性構成モデルを用いた。このモデルは、FEM による 2 次元あるいは 3 次元液状化解析への使用を目的として提案した繰返しモデルである。

本研究では、まずモデルを静的な単調載荷の解析に適用した時の構成関係を示す。次に、このモデルを用いて Verdugo ら^{10),11)}、兵動ら^{12),13)}が行った非排水三軸圧縮試験のシミュレーション解析を行い、ゆる詰め砂の非排水せん断強度がゼロになり静的液状化に至る挙動、間隙比の減少に伴いひずみ軟化から硬化に至る挙動をうまく表現できることを示す。

さらに、非排水三軸試験およびひずみ経路制御三軸試験でのひずみ軟化を表現する構成式の安定性について若干の理論的考察を加えたくうえで、両試験でのひずみ軟化の判定式を示す。そして、この結果を基に材料固有のダイレイタンス特性に加えて、飽和砂要素に課せられる体積変化、すなわち、排水条件がひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生に重要な役割を演じていることを明らかにする。

本研究で取り扱うひずみ軟化は、いわゆる排水時の砂骨格が示すひずみ軟化とは明らかに異なるものである。すなわち、以下に述べるひずみ軟化は、非排水あるいはひずみ経路制御というひずみの条件を課すこと(砂骨格と間隙水にある種の制限をつけること)によって生じた不安定挙動であり、せん断帯形成などに伴う不安定挙動とは異なるものであることを明記しておく。また、本論文における定式化は、微小変形理論の範囲で行う。

2. モデルの概要⁹⁾

本モデルは、塑性硬化係数場理論に基づく無数曲面モデルの範疇に属し、応力比一定タイプの正規降伏曲面とその内部に定義される無数の硬化曲面によって構成される。この内、現在の応力点を通る活動硬化曲面は負荷の方向を規定する負荷曲面として用いられ、その移動、拡

* 正会員 (株) 奥村組 電算センター 数値解析・制御グループ (〒545 大阪市阿倍野区松崎町 2 丁目 2 番 2 号)

** 正会員 (株) 奥村組 技術研究所 地盤研究室

*** 正会員 工博 山口大学講師 工学部社会建設工学科

**** 正会員 工博 山口大学助教授 工学部社会建設工学科

大および縮小によって古典弾塑性論で弾性域として取り扱われてきた領域での弾塑性挙動を記述する。

また、本モデルで陽に用いられる曲面は、正規降伏曲面、負荷曲面、最新の応力反転曲面、過去の最大の応力反転曲面および弾性域を定義する硬化曲面の5つである。このため、本モデルは5曲面モデルと呼ぶこともできる。

本研究では、前述したように静的な単調荷重時の挙動を取り扱うため、以下、静的な単調荷重を考えた時のモデルの基本式（構成関係）を示す。この時用いられる曲面は、正規降伏曲面と負荷曲面の2つで、モデルは等方硬化モデルとなる。

以下において、特に断りのない限り、応力はすべて有効応力を意味し、圧縮を負として取り扱う。ただし、 \ominus の表示は、地盤工学の慣例に従い圧縮を正としている。

(1) 正規降伏曲面 F , 負荷曲面 f

正規降伏曲面 F は破壊曲面としての意味を持ち、2階の応力テンソル σ_{ij} を用いて式 (1) で表される。

$$F = \eta_{ij}\eta_{ij} - A^2 \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\eta_{ij} = s_{ij}/p$, $p = (1/3)\sigma_{kk}$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$, δ_{ij} はクロネッカーのデルタ ($i=j$ の時 $\delta_{ij}=1$, $i \neq j$ の時 $\delta_{ij}=0$), $A = \sqrt{(2/3)} \cdot G(\theta)$ は F の半径である。 $G(\theta)$ は、軸対称応力状態 ($\theta = \pm\pi/6$) での破壊時の内部摩擦角 ϕ を用いて定義され、松岡・中井モデル¹⁴⁾に基づいて中間主応力の影響をローデ角 θ の関数として導入したものである¹⁵⁾。 θ は、次式で表され、

$$\theta = (1/3)\sin^{-1}(-1.5\sqrt{3} J_3/J_2^{3/2}) \dots\dots\dots (2)$$

$J_3 = (1/3)s_{ij}s_{jk}s_{ki}$, $J_2 = (1/2)s_{ij}s_{ij}$ である。

この結果、 F の π 平面での形はモールクーロン規準の角を滑らかに結んだ曲線で表され、軸対称応力状態でもールクーロン規準と一致する。

負荷曲面 f は、式 (1) の $A = \sqrt{(2/3)} \cdot G(\theta)$ の代わりに、 $a = a_0G(\theta)$ を用いたものである。ここに、 a は f の半径であり、 a_0 は現在の応力点を通るように決定される。

(2) 流れ則

塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^p$ の方向を規定する単位テンソル g_{ij} は、次式で表される。以下、 $||$ はテンソルのノルムを表す。

$$g_{ij} = d\epsilon_{ij}^p / |d\epsilon_{ij}^p| \\ = \alpha G_{ij} + (1/3)\alpha\beta\delta_{ij} \dots\dots\dots (3)$$

上式の両係数 α , β はカムクレイ型のストレス-ダイレイタンス-関係に非共軸性（応力主軸と塑性ひずみ増分主軸が一致しない現象）の評価を取り入れることによって、式 (4), (5) で表される⁹⁾。

$$\beta = -(M - c\eta) \dots\dots\dots (4)$$

$$\alpha = \{3/(\beta^2 + 3)\}^{1/2} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $M = \sqrt{(2/3)G_m(\theta)}$, $\eta = |\eta_{ij}|$ である。 ϕ_m を軸対称応力状態での体積最大圧縮時の内部摩擦角とすると、 $G_m(\theta)$ は $G(\theta)$ で用いられる ϕ を ϕ_m に置き換えたものとなる。また、 $c (-1 \leq c \leq 1)$ は、次式で与えられるスカラーで、非共軸性の程度を表す。

$$c = S_{ij}G_{ij}/(2J_2)^{1/2} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $c=1$ は共軸を、 $c=-1$ は応力主軸方向と塑性ひずみ増分主軸方向が逆向きであることを示す。ただし、本報告で取り上げた解析では、両主軸方向が固定されており、常に共軸 ($c=1$) である。

式 (3), (6) で用いられる G_{ij} は、塑性偏差ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^p$ の方向を示す単位テンソルで、次式で与えられる。

$$G_{ij} = d\epsilon_{ij}^p / |d\epsilon_{ij}^p| \\ = Q_{ij} / |Q_{ij}| \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij}^e - (1/3)d\epsilon_{kk}^e\delta_{ij}$ である。上式の Q_{ij} は、本報告で取り扱う解析では式 (8) で与えられる。同式は、負荷曲面 f の偏差応力空間での外向き法線方向単位テンソルを表す。

$$Q_{ij} = -\eta_{ij}/|\eta_{ij}| \dots\dots\dots (8)$$

(3) 負荷指標 df と硬化係数 K_p

塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^p$ の大きさを規定する df は、次式で与えられ、同式は、同時に載荷、除荷状態を判定する負荷指標として用いられる。

$$df = n_{ij}d\sigma_{ij} \dots\dots\dots (9)$$

負荷の方向を示す単位テンソル n_{ij} は、次式で与えられる。

$$n_{ij} = (df/\partial\sigma_{ij}) / |df/\partial\sigma_{ij}| \dots\dots\dots (10)$$

硬化係数 K_p は、応力空間の原点を中心とする負荷曲面 f の大きさ a と同じく応力空間の原点を中心とする正規降伏曲面 F の大きさ A の比で与えられ、次式で表される。すなわち、ここでの解析はすべて等方硬化則に従う共軸モデルを用いた解析である。

$$K_p = K_{pI} (p/p_I)^{1/2} (1 - a/A)^2 \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $K_{pI} = rK_I$, p_I は初期平均主応力、 K_I は $p = p_I$ のときの体積弾性係数、 r は、硬化係数の初期値 K_{pI} を K_I で規準化したパラメーターである。

(4) 弾塑性係数テンソル D_{ijk}^{ep}

上で示された n_{ij} , g_{ij} , K_p と全ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}$ を用いて、応力増分 $d\sigma_{ij}$ は次式で与えられる。

$$d\sigma_{ij} = D_{ijk}^{ep} d\epsilon_{kl} \dots\dots\dots (12)$$

上式の弾塑性係数テンソル D_{ijk}^{ep} は、次式で表され、

$$D_{ijk}^{ep} = D_{ijk}^e - \frac{D_{mnnk}^e n_{mn} D_{ijuv}^e g_{uv}}{K_p + H_s} \dots\dots\dots (13)$$

弾性係数テンソル D_{ijk}^e は式 (14) で定義される。

$$D_{ijk}^e = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \dots\dots\dots (14)$$

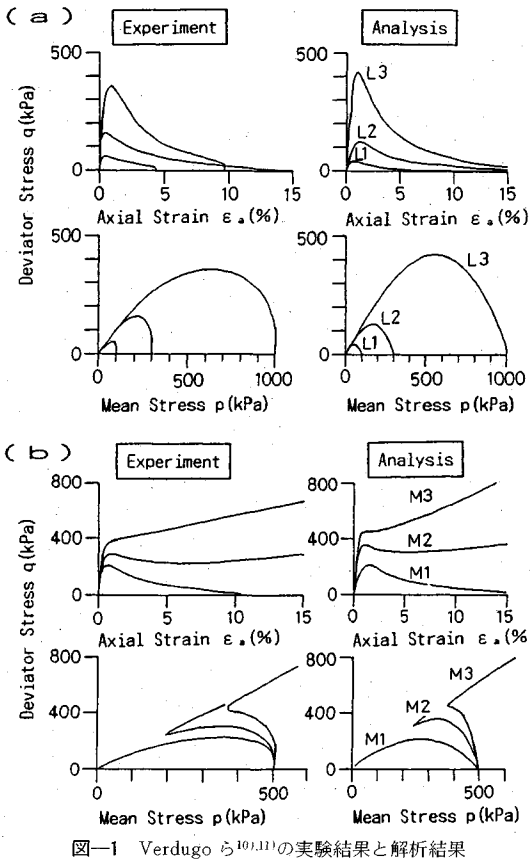


図-1 Verdugoら^{10),11)}の実験結果と解析結果

ここに、 $H_s = D_{pqs}^2 n_p q_s$, $\lambda = 3\nu K / (1 + \nu)$, ν はポアソン比である。せん断弾性係数 G および体積弾性係数 K は、式 (15), (16) で与えられる。

$$G = G_I (p/p_I)^{1/2} \dots\dots\dots (15)$$

$$K = K_I (p/p_I)^{1/2} \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 G_I は $p = p_I$ のときの G である。

(5) モデルのパラメーター

用いられるパラメーターは、2つの弾性定数 (G_I , K_I) と ϕ , ϕ_m , r の5つである。このうち、 ϕ , ϕ_m , r は通常の排水三軸圧縮試験から決定される。すなわち、 ϕ は $q/p \sim e$ 関係の破壊応力比から決定され、式 (1) の応力比 A を、 ϕ_m は $q/p \sim v$ 関係のピーク応力比 (体積最大圧縮時の圧力比) から決定され、式 (4) の応力比 M を定義する。また、 r は $q \sim e^p$ 関係の初期接線勾配から決定され、式 (11) において $a=0$ のときの硬化係数の初期値 K_{PI} を定義する。ここに、三軸応力状態での応力とひずみの定義は式 (17), (18) のとおりで、 e^p は e の塑性成分を表す。

$$q = \sigma_a - \sigma_r, p = (\sigma_a + 2\sigma_r) / 3 \dots\dots\dots (17)$$

$$e = (2/3)(\epsilon_a - \epsilon_r), v = \epsilon_a + 2\epsilon_r \dots\dots\dots (18)$$

ただし、 σ_a は軸応力、 σ_r は側方応力、 ϵ_a は軸ひずみ、

表-1 間隙比 e_0 とパラメーター

| | e_0 | G_I (kPa) | K_I (kPa) | ϕ deg. | ϕ_m deg. | r |
|----|-------|----------------|----------------|----------------|------------------|-----|
| L1 | 0.930 | 5430 | 14500 | 31.5 | 32.0 | 1.5 |
| L2 | 0.930 | 9400 | 25100 | 31.5 | 32.0 | 1.5 |
| L3 | 0.933 | 34400 | 91600 | 31.5 | 32.0 | 1.5 |
| M1 | 0.930 | 12200 | 32600 | 31.5 | 32.0 | 1.5 |
| M2 | 0.883 | 27000 | 72000 | 31.5 | 30.0 | 4.0 |
| M3 | 0.861 | 28200 | 75400 | 31.5 | 30.5 | 8.0 |
| H1 | 0.876 | 10000 | 10000 | 33.4 | 30.4 | 2.0 |
| H2 | 0.869 | 10000 | 10000 | 33.4 | 30.4 | 2.0 |
| H3 | 0.856 | 10000 | 10000 | 33.4 | 30.4 | 2.0 |

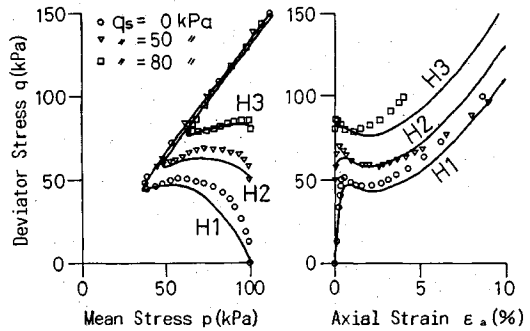


図-2 兵動ら^{12),13)}の実験結果と解析結果

ϵ_r は側方ひずみで、 $\sigma_a = \sigma_{11}$, $\sigma_r = \sigma_{22} = \sigma_{33}$, $\epsilon_a = \epsilon_{11}$, $\epsilon_r = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$ である。

3. 三軸圧縮試験のシミュレーション解析結果

本節および次節では、軸対称三軸応力状態を対象にしていることから、式 (17), (18) に示した応力とひずみの定義を用いて検討を加える。

Verdugoら^{10),11)}が行った等方圧密からのひずみ制御非排水三軸圧縮試験結果と解析結果の比較を図-1 (a), (b) に示している。用いられた砂は豊浦砂で、同図 (a) は、極めてゆるく詰められた砂 ($D_r = 12\%$) の応力経路と応力-ひずみ関係を、同図 (b) は $D_r = 12 \sim 31\%$ の結果を示している。豊浦砂の間隙比 e_0 と解析で用いたパラメーターを、表-1 に示す。

これらの結果の比較から、図-1 (a) では、極めてゆるく詰められた砂の非排水せん断強度がゼロとなり、静的液状化が発生する様子、同図 (b) では、間隙比 e_0 の減少に伴いひずみ軟化からひずみ硬化に至る挙動がうまく表現されていることが分かる。

図-2 は、兵動ら^{12),13)}がひずみ制御で行った豊浦砂の異方圧密からの非排水三軸圧縮試験結果と解析結果を比較したものである。同図において、○, ▽, □印は実験結果を実線は解析結果を示している。解析で用いたパラメーターは、表-1 に示されている。

解析結果は、初期せん断 $q_0 (= -\sigma_{a0} + \sigma_{r0})$ を有するゆ

る詰め砂 ($D=30\%$) のひずみ軟化から硬化に至る挙動をうまく表現している。ここに、 σ_{a0} , σ_{r0} はそれぞれ σ_a , σ_r の初期値である。

4. 三軸応力状態でのひずみ軟化挙動の理論的考察

以下、非関連流れ則を用いた硬化型のモデル (硬化係数 $K_P > 0$) を対象にして、ひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生条件を示し、若干の考察を加える。なお、以下の議論は応力比一定タイプの負荷曲面とカム・クレイ型のストレーヌ・ダイレイタンス・関係を用い、破壊応力比で硬化係数 K_P がゼロとなる硬化則を与える他のモデルにおいても成立する。

三軸応力状態での応力増分とひずみ増分の関係は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} dq \\ dp \end{Bmatrix} &= [D^{EP}] \begin{Bmatrix} de \\ dv \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{K_P + H_S} \begin{Bmatrix} D_{SS} & D_{SP} \\ D_{PS} & D_{PP} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} de \\ dv \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ここに、 $H_S = 3Gn_s g_s + Kn_p g_p$, $D_{SS} = 3G(K_P + Kn_p g_p)$, $D_{SP} = -3GK_P g_s n_p$, $D_{PS} = -3GK_P g_p n_s$, $D_{PP} = K(K_P + 3Gn_s g_s)$ である。また、 n_p , n_s は負荷の方向を示す単位ベクトル、 g_p , g_s は塑性ひずみ増分の方向を示す単位ベクトルで、前述の単位テンソル n_{ij} , g_{ij} との関係は式 (20), (21) のとおりである。

$$n_p = n_{kk}, n_s = (2/3)(n_{11} - n_{33}) \dots\dots\dots (20)$$

$$g_p = g_{kk}, g_s = (2/3)(g_{11} - g_{33}) \dots\dots\dots (21)$$

(1) 非排水時のひずみ軟化挙動の検討

非排水条件下 ($dv=0$) では、次式が得られる。

$$dq = \frac{3G(K_P + Kn_p g_p)}{K_P + H_S} de \dots\dots\dots (22)$$

また、負荷の条件 (負荷指標 $df > 0$) は次式となる。

$$df = n_s dq + n_p dp = \frac{K_P(3Gn_s)}{K_P + H_S} de > 0 \dots\dots\dots (23)$$

式 (23) において、式 (24) が成り立つ (後述の表-2 参照) ことを考えると式 (25) が得られ、橋口¹⁶⁾の主張と一致する。

$$den_s > 0 \dots\dots\dots (24)$$

$$K_P + H_S > 0 \dots\dots\dots (25)$$

この結果、式 (22) において式 (25) を考慮すると非排水時に軟化の発生する条件は、式 (26) で与えられ、同式は、Lade⁹⁾が導いた安定条件の判定式と一致する。

$$K_P + Kn_p g_p < 0 \dots\dots\dots (26)$$

なお、非排水条件下でのひずみ軟化の定義として、式 (22) において、 $dq \cdot de < 0$ を用いているが、式 (17), (18) を考慮すると $d\sigma_{ij} de_{ij} = dq \cdot de$ が成立するため、ひずみ軟化の定義として $d\sigma_{ij} de_{ij} < 0$ を採用したと等価で

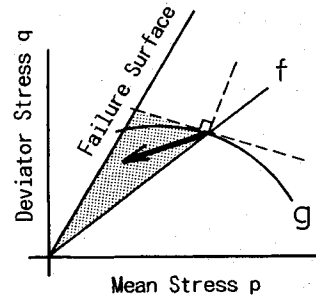


図-3 ひずみ軟化時の応力経路の方向

ある。

式 (26) は、式 (19) の弾塑性マトリックス D^{EP} の対角項 D_{SS} に負が生じること、関連流れ則 ($n_p = g_p$) を用いたモデルでは $K_P > 0$ のもとでは軟化は生じないこと、また、非排水時の $q \sim e$ 関係におけるひずみ軟化が、材料固有の体積変化 (g_p の特性) に支配されることを示している。

ここで、この時の塑性ポテンシャル曲面 g の接線方向と応力経路の方向との関係を調べてみる。式 (24)~(26) と式 (27) が成り立つ (表-2 参照) ことを考慮すると式 (28) が得られる。

$$degs > 0 \dots\dots\dots (27)$$

$$dg = g_s dq + g_p dp$$

$$= \frac{g_s de (K_P + Kn_p g_p) - n_s deg_p^2}{K_P + H_S} < 0 \dots\dots\dots (28)$$

式 (23) と式 (28) は、ひずみ軟化が生じる時の応力経路が負荷曲面 f の接線方向より外側で、塑性ポテンシャル曲面 g の接線方向より内側 (図-3 の着色部) に向かっていることを示す。Lade⁹⁾は、この領域の存在を実験的に確かめ、Wedge Shaped Region と呼んでおり、ここでは軸差応力 q は低下するが、応力比 q/p は増加する。

さて、本モデルでは硬化係数 K_P の補間則として式 (11) が用いられ、体積弾性係数 K は式 (16) で与えられる。両式を式 (26) に代入すると式 (29) が得られ、軟化の条件から K_T , p の影響を取り除くことができる。

$$r(1 - a/A)^2 + n_p g_p < 0 \dots\dots\dots (29)$$

また、本モデルでは前述のように応力比一定タイプの負荷曲面を仮定しており、式 (30)~(32) が成立する。

$$n_p = C_1 \eta_T^2, g_p = -C_2 (M - |\eta_T|) \dots\dots\dots (30)$$

$$n_s = -C_3 \eta_T, g_s = -C_4 \eta_T \dots\dots\dots (31)$$

$$a/A = C_5 |\eta_T| \dots\dots\dots (32)$$

ここで、 $\eta_T = q/p$ で、前述の $\eta = (\eta_{ij} \eta_{ij})^{1/2}$ との関係は、 $\eta = \sqrt{(2/3)} \eta_T$ である。 M は、次式で表され、

$$M = 6 \sin \phi_m / (3 \pm \sin \phi_m) \dots\dots\dots (33)$$

上式の符号は、三軸圧縮で-、三軸伸張で+であり、係

表-2 n_p, g_p, n_s, g_s および de の符号

| | de | n_s | n_p | g_s | g_p |
|------|----|-------|-------|-------|-------|
| 三軸圧縮 | - | - | + | - | ± |
| 三軸伸張 | + | + | + | + | ± |

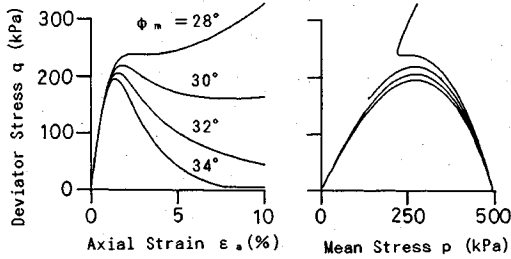


図-4 ϕ_m を変えた時の解析結果

数 $C_1 \sim C_5$ の符号は正である。また、硬化型のモデルにおいて n_p, g_p, n_s, g_s および de の符号は式 (17), (18), (20), (21) を考慮すると容易に決定でき、三軸圧縮、三軸伸張状態で表-2 のとおりである。同表において、 g_p の符号は $M < |\eta|$ で +, $M > |\eta|$ で - である。

式 (30), (32) を式 (29) に代入すると η_T だけに關する不等式が得られ、 p および q の項が単独に含まれないことが分かる。このことは、 $\phi_m > \phi$ として $g_p (< 0)$ の絶対値を大きく設定すると、ある応力比 η_T からひずみ軟化を示し、最終的に非排水せん断強度がゼロになる挙動を表現できることを示す。 $\phi_m > \phi$ は、限界状態 (変相状態) に至る前に破壊する材料を想定したことになる。前述の図-1 (a) の $L1 \sim L3$, 同図 (b) の $M1$ の解析では、表-1 に示したように $\phi_m = 32^\circ$, $\phi = 31.5^\circ$ を用いることでこの現象を表現している。

図-4 は、図-1 (b) の $M1$ の材料定数を用いて、 ϕ_m だけを $28^\circ, 30^\circ, 34^\circ$ に変えたときの解析結果であり、 $M1$ の $\phi_m = 32^\circ$ の結果も併記している。 ϕ_m を大きくすると急激なひずみ軟化が発生し、収縮型 (Contractive) の挙動を示す。逆に、 ϕ_m を小さくするとひずみ硬化が生じ、膨張型 (Dilative) の挙動が表現される。

(2) ひずみ軟化時の構成式の安定性

ここでは、非排水時にひずみ軟化を示すときの骨格の変形を表現する構成式の安定条件について検討してみる。まず、Drucker の安定条件は、2次塑性仕事増分 d^2W^p が正の時、解の安定性が保証されるというもので、この条件を常に満足する材料は安定な材料と呼ばれる (付録1 参照)。式 (34), (35) および式 (23)~(27) を考慮すると式 (36) が成立し、この安定条件は満足されないことが分かる。

$$de^p = (df/K_p)g_s \dots\dots\dots (34)$$

$$dv^p = (df/K_p)g_p \dots\dots\dots (35)$$

$$d^2W^p = d\sigma_{ij}d\epsilon_{ij}^p = dqde^p + dpdv^p$$

$$= \frac{3Gdfde}{K_p(K_p+H_s)} \{g_s(K_p+Kn_p g_p) - Kg_s^2 n_s\} < 0 \dots\dots\dots (36)$$

同時に、式 (37) が成立し、Drucker の条件より若干広い範囲を定義する Hill の安定条件も満足されない。

$$d^2W = d\sigma_{ij}d\epsilon_{ij} = dqde + dpdv < 0 \dots\dots\dots (37)$$

Lade ら³⁾は、Drucker および Hill の安定条件は解の安定に対する十分条件であり、必要条件ではないという事実に基づいて、(材料の) 不安定挙動の判定には適用できない (式 (37) の不等号が満たされても不安定な挙動がみられない) と述べている。しかし、この安定性の議論は Lade らの結論に対する Drucker の反論 (不均質な変形を考慮すると Lade らの結果を Drucker の条件を基礎に説明可能である)¹⁷⁾からも分かるように極めて難しいものである¹⁸⁾。両者の立場は、ひずみ軟化を材料特性と考えるか境界値問題の結果として考えるべきかという立場の違いを示しているともいえるが、ここで使用するモデルは材料特性としては軟化の生じない硬化型のモデルであり、図-1, 2, 4 等に示すひずみ軟化は、結果的に後者の立場に立脚したものになっている。ただし、これらのひずみ軟化は、前述のように非排水というひずみの拘束を課すことによって生じた挙動であり、いわゆる排水時の砂骨格が示すひずみ軟化とは明らかに異なるものであることに注意が必要である。

ここで、式 (19) の弾塑性マトリックス D^{EP} の固有値について調べておく。式 (25) を考慮すると式 (38) が成立する。同式は、 D^{EP} の2つの固有値が共に正で、ひずみ軟化がせん断帯の発生を伴わない均質な変形であることを示している¹⁹⁾。

$$\det[D^{EP}] = (D_{ss}D_{pp} - D_{sp}D_{ps}) / (K_p + H_s)^2$$

$$= 3GKK_p / (K_p + H_s) > 0 \dots\dots\dots (38)$$

一方、Bazant ら²⁰⁾は非対称マトリックス D^{EP} の安定性は次式で表されるように、マトリックスの対称成分 D_s^{EP} から決定されると述べている。

$$\det[D_s^{EP}] = \det\{([D^{EP}] + [D^{EP}]^T)/2\} \dots\dots\dots (39)$$

ここに、添字 T はマトリックスの転置を意味する。 $\det[D^{EP}] = 0$ が中立平衡極限状態 (Critical state of neutral equilibrium) を表すのに対し、 $\det[D_s^{EP}] = 0$ は安定限界極限状態 (Critical state of stability limit) を表す (付録2 参照)。 $\det[D_s^{EP}]$ は次式で表され、非関連流れ則 ($g_s n_p \neq g_p n_s$) を用いると $K_p > 0$ のもとでも負となる場合が生じ得ることが分かる。

$$\det[D_s^{EP}] = \frac{3GK}{(K_p + H_s)^2} \{K_p(K_p + H_s) - (3/4)GK \cdot (g_s n_p - g_p n_s)^2\} \dots\dots\dots (40)$$

図-5 は、図-1 (b) の $M1$ の解析における D^{EP} お

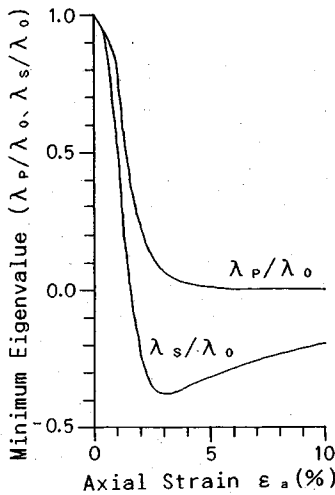


図-5 D^{EP} , D_s^{EP} の最小固有値 λ_p , λ_s

および D_s^{EP} の最小固有値 λ_p , λ_s を軸ひずみ ϵ_a に対して示したもので、 λ_0 は λ_p の初期値である。同図によると、 λ_p は ϵ_a の増加に伴って次第にゼロに接近するが、式(38)で示されるように常に正である。ただし、 λ_s は $\epsilon_a=1.5\%$ 付近で $\lambda_s=0$ を通過しており、その以降では安定した平衡状態は存在しないことになる。すなわち、本研究で取り扱うひずみ軟化は D^{EP} の最小固有値が常に正の状態が生じ、 D_s^{EP} の最小固有値が負となる屈服形の不安定 (Flattening instability)²¹⁾ 挙動と類似の現象であると考えられ、解の唯一性の消失、分岐を伴う座屈型の不安定²¹⁾ 挙動とは異なる現象である。

以上の考察は、有効応力に基づく式(19)の弾塑性マトリックス D^{EP} についてのものである。以下では、全応力に基づく弾塑性マトリックス D_i^{EP} について検討してみる。

全応力表示の応力増分～ひずみ増分関係は、次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} dq \\ dp_i \end{Bmatrix} = [D_i^{EP}] \begin{Bmatrix} de \\ dv \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (41)$$

$$[D_i^{EP}] = \frac{1}{K_p + H_s} \begin{bmatrix} D_{SS} & D_{SP} \\ D_{PS} & D_{PP} + (K_p + H_s)\Gamma \end{bmatrix} \dots\dots\dots (42)$$

ここに、 $dp_i = d(p + p_w)$ 、 p_w は間隙水圧である。 Γ は、次式で与えられ、

$$1/\Gamma = \beta/K_f + (1-\beta)/K_m \dots\dots\dots (43)$$

β は間隙率、 K_f 、 K_m はそれぞれ間隙流体および土粒子の体積弾性係数である。

D_i^{EP} の固有値 λ_i は、次の2次方程式の2つの解であり、

$$\lambda_i^2 + A\lambda_i + B = 0 \dots\dots\dots (44)$$

$$A = D_{SS} + D_{PP} + (K_p + H_s)\Gamma$$

$$B = D_{SS} (D_{PP} + (K_p + H_s)\Gamma) - D_{SP}D_{PS}$$

最小固有値がゼロになるのは、式(44)の定数項 B がゼロのときである。このとき、 K_p は次式で与えられる。

$$K_p = -H_s \dots\dots\dots (45)$$

又は、

$$K_p = -K_{np}g_p / (1 + K/\Gamma) \dots\dots\dots (46)$$

式(45)は、式(25)より意味のない解である。この結果、式(46)が成立すると $\lambda_i=0$ が生じ、解の唯一性が保証されないことが分かる。

ここで、土粒子および間隙流体を非圧縮性とする ($\Gamma = \infty$)、式(46)は式(26)に示した軟化の生じる条件と一致する。

式(46)は、全応力を制御するいわゆる応力制御試験ではひずみ軟化挙動を再現できないことを意味している。一方、前述の式(38)は、ひずみ制御非排水試験で得られたひずみ軟化時の有効応力経路をたどるに有効応力を制御すれば、ひずみ軟化挙動を再現できることを示す。

(3) 体積ひずみを制御した時のひずみ軟化挙動の検討

近年、せん断中に体積ひずみを膨張側に制御すると、密な砂でもひずみ軟化挙動が現れることが示されている²¹⁻²⁴⁾。以下、体積ひずみを制御したときのひずみ軟化について検討しておく。

まず、式(47)の a を用いて体積ひずみ増分と軸ひずみの増分の比を定義すると、式(48)、(49)が成り立つ。

$$dv/de_a = a \dots\dots\dots (47)$$

$$dv/de = b \dots\dots\dots (48)$$

$$b = 3a/(3-a) \dots\dots\dots (49)$$

例えば、側方ひずみ拘束 ($de_v=0$) 三軸圧縮試験 (K_0 圧密試験) は、 $a=1$ 、 $b=1.5$ としたひずみ制御試験、平均主応力 p 一定試験は、次式の b に基づいて dv/de を制御した試験といえる。

$$b = -\frac{D_{FS}}{D_{PP}} = \frac{3Gn_s g_p}{K_p + 3Gn_s g_s} \dots\dots\dots (50)$$

平均主応力 p 一定試験においては、式(48)、(50)より $dq \sim de$ 関係は次式で表され、 $n_s \cdot g_s > 0$ を考慮すると $K_p > 0$ のもとではひずみ軟化は生じない(無条件に安定)ことが分かる。

$$dq = \frac{3GK_p}{K_p + 3Gn_s g_s} de \dots\dots\dots (51)$$

体積ひずみ増分を制御する時は、 a 、 b の符号は意味をもつ。三軸圧縮では $a < 0$ が膨張、三軸伸張では $a > 0$ が膨張で、 b の符号の意味も同じである。この時、 $dq \sim de$ 関係は式(52)である。

$$dq = \frac{3G\{K_p + K_{np}(g_p - bg_s)\}}{K_p + H_s} de \dots\dots\dots (52)$$

負荷の条件は次式で与えられる。

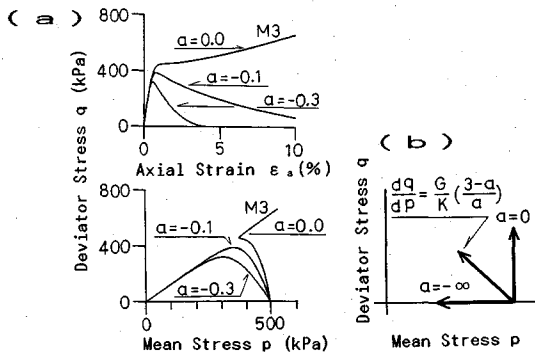


図-6 aを一定に制御した時の解析結果

$$df = \frac{K_p(3Gn_s + bKn_p)}{K_p + H_s} de > 0 \dots\dots\dots (53)$$

ここで、 b を一定にして体積ひずみを膨張側に制御した試験^{5),6)}を考える。この状況は、地震中に発生した過剰間隙水圧が下方から流入してくる過程で、不透水層の存在によって上方への水圧の消散が妨げられた場合の近似と考えることができる。この時、式(53)において式(24)、 $b \cdot de > 0$ 、 $n_p > 0$ を考慮すると非排水の場合と同様に式(25)、(38)が成り立ち、体積ひずみ増分と軸ひずみ増分の比を一定に制御した時のひずみ軟化も均質な変形であることが分かる。また、ひずみ軟化の条件は式(54)で与えられ、前述の式(26)は、同式の特殊な場合($b=0$)とみなすことができる。

$$K_p + Kn_p(g_p - bg_s) < 0 \dots\dots\dots (54)$$

上式で、 bg_s は排水条件によって課せられる体積変化を表すと考えことができ、せん断中に体積ひずみを膨張側に制御するとき、 $bg_s > 0$ が成り立つ。この結果、非排水時には式(26)が成立しない密な砂でも、体積ひずみを制御すること、すなわち、間隙水を強制的に流入することによって課せられる体積膨張(bg_s)が材料固有の体積膨張(g_p)より大きくなると、ひずみ軟化が容易に生じることが分かる。この結論は、内田ら⁶⁾が実験的に導いた結論を理論的に導いたものになっている。

なお、この時飽和砂の間隙水圧増分 dp_w は、次式で表される。

$$dp_w = \Gamma dv = \Gamma b de \dots\dots\dots (55)$$

図-6(a)は、図-1(b)のM3の材料定数を用いて、式(47)の a を一定($a = -0.1, -0.3$)に制御した時の解析結果である。同図には、非排水($a = 0.0$)の場合の結果も併記している。例えば、材料が線形等方弾性体と仮定すれば、応力経路は図-6(b)に示すように $dq/dp = \text{一定}$ で移動する。この図から、非排水時にひずみ硬化を示す膨張性材料も体積ひずみを制御することによって、あたかも収縮性材料に変わったかのように、ひずみ軟化を示し、復元力が低下することが分かる。この

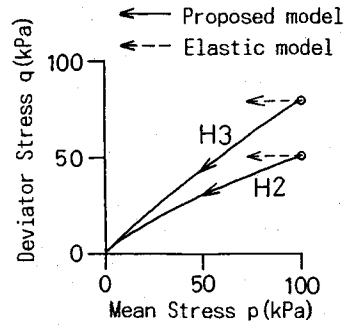


図-7 体積ひずみだけを制御した時の解析結果

ことは、材料固有のダイレイタンス特性に加えて、飽和砂要素に課せられる体積変化、すなわち、間隙水の流入がひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生に重要な役割を演じていることを示している。

三軸状態での極端な例として、異方圧密状態から $de = 0$ の条件で、体積ひずみだけを膨張側に制御する($dv > 0$)試験が考えられる。この時、 $a = 3, b = \infty$ である。負荷の条件は次式で与えられ、

$$df = \frac{K_p Kn_p}{K_p + H_s} dv > 0 \dots\dots\dots (56)$$

前述の式(23)、(53)と同様に式(25)、(38)が成立する。この時、 dq は、次式で与えられる。

$$dq = \frac{-3GKgsn_p}{K_p + H_s} dv \dots\dots\dots (57)$$

上式より、三軸圧縮では $dq > 0$ 、三軸伸張では $dq < 0$ が得られ、常に q の絶対値が低下することが分かる。

図-7の実線は、初期せん断 q_s を有する図-2のH2($q_s = 50$ kPa)およびH3($q_s = 80$ kPa)の材料定数を用いて、体積ひずみだけを膨張側に制御した場合の解析結果(応力経路)である。例えば、材料が線形等方弾性体と仮定すれば、応力経路は図中に破線で併記したように p 軸に平行に移動する。同図では、平均主応力 p の低下に伴って初期せん断 q_s も次第に低下しており、間隙水圧の流入による地盤の復元力の低下、すなわち、一種の静的液化現象を表していると考えられる。

図-7に示すような応力経路(ひずみ経路)は、例えばカム・クレイ型の降伏規準に従う材料では通常弾性域に入る。しかしながら、砂のような粒状体では降伏規準を近似的に応力比一定線とみなすことができることを考慮すれば、この挙動は現実には生じ得る砂の浸透破壊現象とみることができよう。また、図-6, 7に示したような体積ひずみ増分を制御した場合の土要素の挙動に関する検討は、地盤への薬液注入、グラウトおよび水圧破壊問題等への適用も期待できるものと考えられる。

5. 結 論

本文の主要な結論は、次のとおりである。

- ① 提案した弾塑性構成モデルは、極めてゆるく詰められた砂において非排水せん断強度がゼロになり、静的液状化が発生する挙動、間隙比の減少に伴いひずみ軟化からひずみ硬化に至る挙動をうまく表現することができる。
- ② 限界状態(変相状態)に至る前に破壊する材料($\phi_m > \phi$)を想定することで、静的液状化を表現することができる。
- ③ 非排水三軸試験およびひずみ経路制御試験(体積ひずみ増分と軸ひずみ増分の比を一定に制御した三軸試験)でひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生する条件は、それぞれ、下に示す式(26)と式(54)で表され、この時の変形は、せん断帯の発生を伴わない均質なものである。

$$K_p + K_n g_p < 0 \dots\dots\dots (26)$$

$$K_p + K_n (g_p - b g_s) < 0 \dots\dots\dots (54)$$

- ④ 式(54)から分かるように、ひずみ軟化を伴う不安定挙動の発生には、材料固有のダイレイタンスに加えて、排水条件(間隙水の流出)が重要な役割を演じている。

6. 謝 辞

本論文の作成にあたり、安定性に関する理論的な検討について八戸工業大学・飛田善雄助教授から貴重なご指摘をいただいた。記して謝意を表する。

付録 1

弾塑性理論の枠内で、材料の安定性に関して種々の仮定が提案されている。このうち、Druckerの仮定とHillの仮定はエネルギー理論に基づくものであり、Mandelの仮定は波動伝播理論に基づくものである²¹⁾。DruckerおよびHillの仮定は、それぞれ式(A1)、式(A2)で表されるが、

$$d^2 W^p = d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \dots\dots\dots (A1)$$

$$d^2 W = d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \geq 0 \dots\dots\dots (A2)$$

弾性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^e$ が十分小さい破壊近傍では、両者はほぼ一致する。また、 $d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^e > 0$ であることを考えると、Hillの仮定はDruckerの仮定より若干広い範囲を規定している。

Hillの仮定は、解の唯一性に対する十分条件であり、解の唯一性の保証は、その解が定める状態が安定であることを意味している。しかし、その逆はいえず、解が唯一でなくても安定である場合が存在しうる。すなわち、安定な変形の分岐を生じ得る可能性が残されている²³⁾。

付録 2

Bazant²⁰⁾は、非対称接線剛性マトリックス $[A]$ の極

限状態(Critical state)は次式で与えられ、

$$\{du\}^T [A] \{du\} = 0 \dots\dots\dots (A3)$$

上式は、次の2つの場合に成立すると述べている。

$$[A] \{du\} = \{0\} \dots\dots\dots (A4)$$

$$\{du\}^T \{dF\} = 0 \dots\dots\dots (A5)$$

ここに、 $\{du\}$ は変位ベクトル、 $\{dF\} = [A] \{du\}$ である。

式(A4)は、中立平衡極限状態を表し、この状態は $\det[A] = 0$ で与えられる。一方、式(A5)は安定限界極限状態を表し、 $\{dF\} (\neq \{0\})$ と $\{du\}$ が直交することを示す。この状態は、 $\det[A_s] = 0$ で与えられる。ここに、 $[A_s]$ は $[A]$ の対称成分で、 $[A_s] = ([A] + [A]^T)/2$ である。

このため、 $[A]$ が非対称のときは、 $\det[A] = 0$ で $\det[A_s] \neq 0$ あるいは、 $\det[A] \neq 0$ で $\det[A_s] = 0$ の場合が生じる得る。前者は、安定した状態で解の唯一性の消失(分岐)が生じる場合であり、後者は解の唯一性の消失は生じないが、安定性が保てない場合である。

ここで、安定とは平衡状態にある系に任意の外乱を加えたとき、外乱が小さければそれによって生じる変形も小さく抑えられる場合であり、不安定(安定性が保てない)とは、外乱が小さくてもそれによって大変形に至る場合である²³⁾。

参 考 文 献

- 1) P.V. Lade, R.B. Nelson and Y.M. Ito : Instability of granular materials with nonassociated flow, J. Eng. Mech., ASCE, 114(12), pp.2173-2191, 1988.
- 2) D. Pradel and P.V. Lade : Instability and plastic flow of soils. II Analytical investigation, J. Eng. Mech., ASCE, 116 (11), pp.2551-2566, 1990.
- 3) P.V. Lade : Static instability and liquefaction of loose fine sandy slopes, J. Geo. Eng., ASCE, 118(1), pp.51-71, 1992.
- 4) J. Chu : Discussion of static instability and liquefaction of loose fine sandy slopes, J. Geo. Eng., ASCE, 119(2), pp.385-391, 1993.
- 5) J. Chu, S-C.R. Lo and I.K. Lee : Instability of granular soils under strain path testing, J. Geo. Eng., ASCE, 119(5), pp.874-891, 1993.
- 6) 内田一徳・Y.P. Vaid : ひずみ経路制御三軸試験, 第27回土質工学研究発表会, pp.553-556, 1992.
- 7) 五十嵐正剛・山田恭央・排水量を制御した砂の静的三軸試験, 第27回土質工学研究発表会, pp.557-558, 1992.
- 8) 小高猛司・細岡生也・浅岡 顕 : 砂の初期構造が限界状態時の $e-p'-q$ 関係に及ぼす影響, 第28回土質工学研究発表会, pp.603-604, 1993.
- 9) 森尾敏・日下部伸・安福規之・兵動正幸 : 非共軸性の評価を取り入れた砂の繰返し弾塑性構成モデル, 土木学会論文集, No.487/III-26, pp.139-148, 1994.
- 10) R. Verdugo, K. Ishihara, Y. Miyata : Undrained response of sandy soils, 26th Nat. Conv. of JSSMFE, Nagano,

- Japan, pp.529~532, 1991.
- 11) R. Verdugo, K. Ishihara : Undrained behavior of silty materials, 27th Nat. Conv. of JSSMFE, pp.603~606, 1992.
 - 12) 兵動正幸・村田秀一・安福規之・谷水秀行 : 初期せん断を受けるゆるい飽和砂の非排水せん断挙動, 第25回土質工学研究発表会, pp.743~746, 1990.
 - 13) Hydo, M., Tanimizu, H., Yasufuku, N. and Miura, H. : Undrained cyclic and monotonic triaxial behaviour of saturated loose sand, Soils and Foundations, Vol.34, No.1, pp.19~32, 1994.
 - 14) Matsuoka, H. and Nakai, T. : Stress deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, Proc. JSCE, No.232, pp.59~70, 1974.
 - 15) 西川明宏・安福規之・中田幸男・兵動正幸・村田秀一・砂の拘束圧依存性と中間主応力の影響を考慮した構成式について, 第28回土質工学研究発表会, pp.495~498, 1993.
 - 16) 橋口公一 : 最新弾塑性学, 朝倉書店, p.141, 1990.
 - 17) Drucker, D.C. and Li, M. : Triaxial instability of a nonassociated flow-rule model, J. Eng. Mech., ASCE, 119(6), pp.1188~1204, 1993.
 - 18) 飛田善雄 : 標準固体と地盤材料の構成モデル, 第28回土質工学研究発表会, pp.505~508, 1993.
 - 19) Rundnicki, J.W. and Rice, J.R. : Condition for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, J. Mech. Phys. Solids, Vol.23, pp.371~394, 1975.
 - 20) Z.P. Bazant and L. Cedolin : Stability of structure, Oxford Univ. Press, pp.670~677, 1991.
 - 21) 川井忠彦 : 座屈問題解析, コンピューターによる構造工学講座Ⅱ-6-B, 培風館, pp.9~51, 1975.
 - 22) 岡二三生 : 4.5 塑性不安定, 粒状体の力学, (社)土質工学会, 粒状体力学に関する国内委員会, pp.258~262, 1993.
 - 23) 北川 浩 : 弾・塑性力学, 裳華房, pp.114~141, 1987. (1993.11.2 受付)

ANALYTICAL INVESTIGATION OF INSTABILITY FOR SATURATED SAND UNDER TRIAXIAL CONDITION

Satoshi MORIO, Shin KUSAKABE, Noriyuki YASUFUKU and Masayuki HYODO

This paper presents the analytical investigations for the strain softening behaviour of sand found in undrained and strain controlled drained triaxial tests.

The analysis is based on an isotropic hardening elasto-plastic constitutive model with a non-associated flow rule proposed by the authors. The following conclusions were reached.

- (1) The proposed model successfully simulates the strain softening behaviour of extremely loose sand under undrained triaxial conditions.
- (2) The conditions for the initiation of strain softening behaviour have been clarified.
- (3) The nature of the volume change and drainage conditions of a soil element have a marked influence on the occurrence of the strain softening phenomena.