

繰返し載荷を受けた飽和砂の二面弾塑性構成式

中田幸男*・安福規之**・村田秀一***・
兵動正幸****

本論文では、非排水繰返し載荷時の飽和砂の応力・ひずみ関係を表現可能でかつ実用性の高い二面を有する等硬化型弾塑性構成式を軸対称の応力空間内に限定して提案した。提案した構成式の特徴は、塑性ひずみ増分の方向を規定する共役点の考え方を排水繰返し試験結果に基づいて決定している点と、材料定数の物理的意味が明確な点である。提案式を用いた解析的な検討から、提案式は、砂質土の種類によらず軸差ひずみの急増する有効応力を適切に評価できることなどが明確になった。

Key Words : sand, elasto-plastic constitutive equations, cyclic loading, stress-dilatancy relation, axial symmetric condition

1. ま え が き

地震や波浪、交通荷重などの動的外力は、地盤の大変形に伴いしばしば斜面の崩壊、構造物の転倒等の損害を与える。特に砂地盤においては、このような外力を受けると過剰間隙水圧の累積に起因して液状化に至るため、大災害を引き起こすことがある。1964年新潟地震以降、数々の震災調査や室内での試験結果の蓄積を通じて、液状化に対する精度の高い予測手法が提案され、実際の設計に使われるようになってきている。

一方、近年の大型計算機の発達にともない地盤の動的非線形有限要素解析が行われるようになってきている。数値解析の技術の向上とともに、色々な特徴を持った種々の構成式が組み込まれてきた。それぞれの構成式は一長一短を有し、現在では解析の精度を導入する構成式が決めるとさえ言われている。1970年代以降、多くの研究者によって土の繰返し載荷型の構成式が提案されてきている。その構成式は、主応力空間において円錐形をなす降伏曲面が複合硬化則に従うとした Ghaboussi and Momen¹⁾のもの、圧密とせん断過程での降伏が独立に生じるという考えに基礎をおく西・江刺²⁾、西³⁾のもの、一定の塑性硬化係数を与える曲面を無数に有する Prevost⁴⁾や Mroz, Norris and Zienkiewicz⁵⁾のもの、その考え方を二面に簡略化した Mroz, Norris and Zienkiewicz⁶⁾、Hashiguchi⁷⁾、Al-tabbaa and Wood⁸⁾のもの、下負荷面(境界曲面)の考え方を導入した Hashiguchi and Ueno⁹⁾、Dafalias and Herrmann¹⁰⁾のものなどが挙げられる。これらの構成式は、降伏関数や塑性ポ

テンシャルの決定などにおいて幾何学的な観点に依拠するものが多く、実験事実を十分に反映させたものが少ないように思われる。また、それらの構成式は一般応力条件下で定式化がなされているものの、軸対称応力条件下であっても非排水繰返し載荷時の有効応力の減少過程やせん断変形の起こり方を的確に表現できるとは言い難い。さらに、構成式に含まれる材料定数も多い上に、その決定方法の曖昧なものが数多くみられる。

第2著者らはこれまでに、低圧域から粒子破碎が生じるような高拘束圧を含んだ砂質土の応力・ひずみ挙動を評価することに主眼をおいた構成式を開発してきた^{11)~13)}。その構成式は、実験的に得られた降伏特性^{14), 15)}を導入し、さらに内部摩擦角やダイラタンシー特性の拘束圧依存性を加味したものであり、単調載荷に対する砂の応力・ひずみ関係をうまく表現できることが確認されている。

そこで、本論文は、既に提案されている広範な応力域における等硬化型弾塑性構成式を基礎とし、繰返し載荷時の砂の特に有効応力の減少過程を的確に捉えることができ、かつ実用性の高い二面を有する弾塑性構成式を、実験的な検討を踏まえた上で構築するものである。ここでは、最初の試みとして、軸対称の応力空間内に限定して定式化を行い、その後、構成式中の降伏曲面(正規降伏曲面¹⁶⁾)の形状の違いが計算結果に及ぼす影響を把握する。さらに、等方圧密後の非排水繰返し三軸試験結果と提案式を用いた計算結果の比較により、数種類の砂質土への適用性を調べる。

2. 二面を有する繰返し載荷型弾塑性構成式

(1) 提案式の基本的な考え方と特徴

提案式は、弾性領域と正規圧密領域をそれぞれ規定する載荷曲面と正規降伏曲面、塑性ひずみ増分の生じ方を与える塑性ポテンシャル関数と共役点の考え方、そして

* 学生会員 工修 山口大学大学院博士後期課程
(〒755 山口県宇部市常盤台 2557)

** 正会員 工博 山口大学講師 工学部社会建設工学科

*** 正会員 工博 山口大学教授 同上

**** 正会員 工博 山口大学助教授 同上

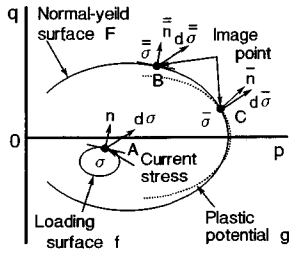


Fig.1 Schematic illustration of model presented in p - q space

塑性ひずみ増分の大きさを規定するのに重要な役割を果たす硬化則と補間則からなっている。提案式の主な特色を挙げると、以下ようになる。

- ① 土は、応力状態が载荷曲面上にある場合、弾塑性材料として挙動し、载荷曲面内にある場合、弾性材料として挙動する。
- ② 载荷曲面は、応力状態と共に応力空間内を移動し、ひずみ硬化しない曲面とする。
- ③ ひずみ増分は、弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分の線形和で与えられるとし、塑性ひずみ増分は、非関連流れ則を用いて誘導される。
- ④ 塑性ひずみ増分の生じ方は、現在の応力状態によらず正規降伏曲面上の応力点（共役点）によって規定される。
- ⑤ 構成式に含まれる材料定数は、8つであるが、その物理的意味は明確で、等方圧密除荷・再载荷試験と数本の排水三軸試験によって決定することができる。

(2) 構成関係と構成式の概要

本論文の解析的及び実験的検討に用いた応力とひずみ増分のパラメーターは、

$$p = (\sigma_a + 2\sigma_r) / 3; q = \sigma_a - \sigma_r \dots\dots\dots (1)$$

$$dv = d\varepsilon_a + 2d\varepsilon_r; d\varepsilon = 2(d\varepsilon_a - d\varepsilon_r) / 3 \dots\dots\dots (2)$$

である。ここで、 p は平均有効主応力、 q は軸差応力であり、 σ_a と σ_r は、それぞれ軸方向応力、半径方向応力である。また、 dv は体積ひずみ増分、 $d\varepsilon$ は軸差ひずみ増分であり、 $d\varepsilon_a$ と $d\varepsilon_r$ は、それぞれ軸方向および半径方向のひずみ増分である。さらに、応力比 η とひずみ増分比 ϕ は次式で与えられる。

$$\eta = q/p; \phi = dv/d\varepsilon \dots\dots\dots (3)$$

供試体に応力増分が作用するとある微小なひずみ増分を生じる。そのひずみ増分は、弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分の線形和で与えられ、

$$dv = dv^e + dv^p; d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここで、上式中の上付きの“ e ”と“ p ”は、それぞれ弾性成分と塑性成分を意味する。上式中の弾性ひずみ増分は、等方弾性体を仮定することにより、

$$dv^e = 1/K dp; d\varepsilon^e = 1/(3G) dq \dots\dots\dots (5)$$

で与えられる。ここで、 K と G は、それぞれ体積弾性

係数とせん断弾性係数である。

Fig.1は正規降伏曲面 F と载荷曲面 f の概念図を示したものであり、それぞれ、

$$F = F(\bar{p}, \bar{q}, k^p) \text{ or } F = F(\bar{p}, \bar{q}, k^p); f = f(p, q) \dots\dots (6)$$

で定義される。ここで、 \bar{p} 、 \bar{q} や \bar{p} 、 \bar{q} は、正規降伏曲面上の共役点の応力状態を意味し、 f 上にある現在の応力状態とは異なることに注意が必要である。また、 k^p は正規降伏曲面の硬化を規定するパラメーターである。従来の二面を有する代表的な構成式⁶⁾⁻⁸⁾では、現在の応力状態における塑性ひずみ増分と共役点における塑性ひずみ増分が等しいと仮定して、関連流れ則に基づき以下の関係を導いている。

$$[n_p dp + n_q dq] n_p / H = [\bar{n}_p d\bar{p} + \bar{n}_q d\bar{q}] \bar{n}_p / \bar{H} \dots\dots\dots (7)$$

$$[n_p dp + n_q dq] n_q / H = [\bar{n}_p d\bar{p} + \bar{n}_q d\bar{q}] \bar{n}_q / \bar{H} \dots\dots\dots (8)$$

$$n_p = \frac{\partial f / \partial p}{a_f}; n_q = \frac{\partial f / \partial q}{a_f}; a_f = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)^2 \right\}^{0.5} \dots (9)$$

$$\bar{n}_p = \frac{\partial F / \partial \bar{p}}{a_F}; \bar{n}_q = \frac{\partial F / \partial \bar{q}}{a_F}; a_F = \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{p}} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{q}} \right)^2 \right\}^{0.5} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 H および \bar{H} は現在の応力状態および共役点での応力状態における硬化係数である。この共役点は、Fig.1に示すように現在の応力状態（点A）における载荷曲面の法線ベクトル n と正規降伏曲面の法線ベクトル \bar{n} が等しくなる応力状態（点B）として求められ、この場合、塑性ひずみ増分ベクトルはベクトル n と等しくなる。しかしながら、後述するように実験結果から判断すると、そのような塑性ひずみ増分の生じ方はまれである。そこで提案式では、実験結果を反映させるために、通常の共役点（点B）とは異なるFig.1中の点Cのような共役点を考える。この新たな共役点の与え方については、2. (4)で詳述する。さて、非関連流れ則に基づき、新たな共役点と関係づけられる現在の応力状態における塑性ひずみ増分は、

$$dv^p = \Lambda m_p; d\varepsilon^p = \Lambda m_q \dots\dots\dots (11)$$

$$\Lambda = [n_p dp + n_q dq] / H \dots\dots\dots (12)$$

$$\bar{n}_p = \frac{\partial F / \partial \bar{p}}{a_F}; \bar{n}_q = \frac{\partial F / \partial \bar{q}}{a_F}; a_F = \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{p}} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{q}} \right)^2 \right\}^{0.5} \dots\dots\dots (13)$$

$$m_p = \frac{\partial g / \partial \bar{p}}{a_g}; m_q = \frac{\partial g / \partial \bar{q}}{a_g}; a_g = \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{p}} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{q}} \right)^2 \right\}^{0.5} \dots\dots\dots (14)$$

で表されることを考える。ここで、 g は共役点における塑性ポテンシャル関数であり、 H は補間則によって決定されるものである。また、塑性ひずみ増分が生じる場合、[]内は正であるべきであり、結果として、

$$[(\partial F / \partial \bar{p}) dp + (\partial F / \partial \bar{q}) dq] > 0; f = 0 \dots\dots\dots (15)$$

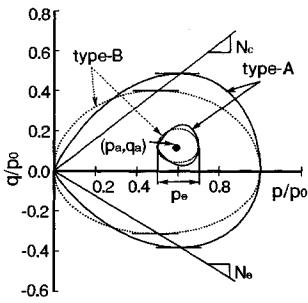


Fig.2 Shape of normal-yield and loading surface

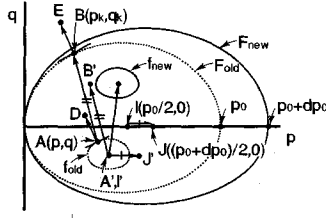


Fig.3 Translation rule of loading surface

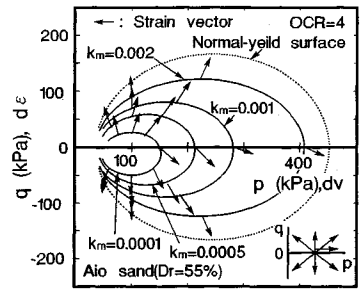


Fig.4 Observed normal-yield surface, state parameter and strain vector

が載荷条件となる。

(3) 正規降伏曲面と載荷曲面

砂の応力・ひずみ関係を精度良く表現するためには、正規降伏曲面の形状を適切に評価する必要がある。本論文ではその重要性を明らかにするために、Fig.2に示す2種類の正規降伏曲面の形状を用いて検討を行う。図中の実線は、著者ら¹⁴⁾が定式化した正規降伏曲面を示したものである。p-q空間においてp軸方向に若干歪んだ楕円の形状を示すこの正規降伏曲面の関数は、

$$F = \bar{\eta}^2 + 2N^2 \ln(\bar{p}/p_0) = 0 \dots\dots\dots (16)$$

となる。ここで、Nは、正規降伏曲面の勾配が0になる応力比であり、p₀は正規降伏曲面の最大のpの値である。また、図中の点線は、粘性土の構成式である修正Cam-Clayモデル¹⁷⁾型の正規降伏曲面を示しており、その関数は、

$$F = \bar{p}^2 - \bar{p}p_0 + \bar{q}^2/N^2 = 0 \dots\dots\dots (17)$$

で与えられる。以下では、実線で示す正規降伏曲面をtype-A; 点線で示すものをtype-Bと称する。

Jardine¹⁸⁾は、土の微小変形には本質的に線形弾性変形する領域と非線形弾性変形する領域があり、その後者の領域は、実験的に応力空間内を移動することを明らかにしている。このことを踏まえて、載荷曲面は土が線形弾性変形を示す境界を与えるものとする。また、正規降伏曲面と交わらずに移動する条件を満たすために、ここでは、正規降伏曲面と相似形で表されるとする。その結果、type-A, Bに対応する載荷曲面の関数は、それぞれ、

$$f = \left[\frac{(q-q_a)}{p+p_e/2-p_a} \right]^2 + 2N^2 \ln \left(\frac{p+p_e/2-p_a}{p_e} \right) = 0 \dots\dots (18)$$

$$f = (p-p_a)^2 - (p_e/2)^2 + (q-q_a)^2/N^2 = 0 \dots\dots\dots (19)$$

となる。ここで、Fig.2中に示すようにp_a, q_aはそれぞれ載荷曲面の中心位置を示すパラメーターであり、p_eは載荷曲面のp軸方向の直径を表すパラメーターである。簡単のために、p_eはひずみ硬化せず圧密時のpの値p_cに依存するものとし、

$$p_e = Rp_c \dots\dots\dots (20)$$

と仮定する。ここで、Rは0<R≤1を満足する材料定

数で、後述するように等方圧密除荷試験によって求められる。

Fig.3は、載荷曲面の移動の概念図を示したものであり、点線が移動前(f_{old})を実線が移動後(f_{new})を示している。載荷曲面の移動は、Krieg¹⁹⁾やDafalias and Popov²⁰⁾に習い次式で表せるとする。

$$dp_a = dp_0/2 + S(p_k - p); dq_a = S(q_k - q) \dots\dots\dots (21)$$

ここで、Fig.3に示すように、p_k, q_kは、現在の応力状態Aにおける載荷曲面の法線ベクトルADと正規降伏曲面上の法線ベクトルが等しくなる応力状態Bであり、Fとfが相似形であることを利用すると、

$$p_k = p_0/2 + (p_0/p_e)(p - p_a); q_k = (p_0/p_e)(q - q_a) \dots\dots\dots (22)$$

となる。式(21)は、載荷曲面の中心の移動が、正規降伏曲面の中心の移動ベクトルLと、現在の応力状態と(p_k, q_k)を結ぶベクトルABのS倍であるベクトルA'B'の線形和で与えられることを意味している。さて式(21)中のSは、移動則の適合条件式

$$df = \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p_a} dp_a + \frac{\partial f}{\partial q_a} dq_a = 0 \dots\dots\dots (23)$$

に式(21)を代入することで以下のように求められる。

$$S = \frac{(\partial f/\partial p) dp + (\partial f/\partial p_a) dp_0/2 + (\partial f/\partial q) dq}{-(\partial f/\partial p_a)(p_k - p) - (\partial f/\partial q_a)(q_k - q)} \dots\dots (24)$$

式(21)と式(24)で表される移動則は、現在の応力状態がF<0を満足し、かつ土が弾塑性変形する場合の載荷曲面の移動を規定するものである。また、現在の応力状態が正規降伏曲面上に位置する場合(F=0)には、

$$p_a = p - (p_e/p_0)(p - p_0/2); q_a = (1 - p_e/p_0)q \dots\dots (25)$$

で簡単に与えられる。

(4) 共役点と塑性ポテンシャル関数

Fig.4は、秋穂砂(D_r=55%)を用いて、p=400 kPaまで等方圧密し100 kPaまで除荷した後、図中右下に示すような7つの応力径路で三軸試験を行った結果をまとめたものである。図中には、実験的に得られた正規降伏曲線とMorotoの示した状態量k_m = ∫dW/p = ∫(dv + ηde)²¹⁾のコンター及びひずみ増分ベクトルをまとめて示している²²⁾。この結果から、ひずみ増分ベク

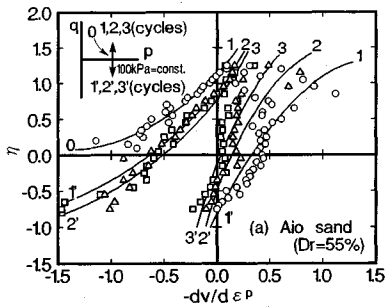


Fig.5 Stress ratio-dilatancy relationship in drained cyclic loading test; (a) $\eta-dv/d\varepsilon^p$, (b) $\bar{\eta}-dv/d\varepsilon^p$

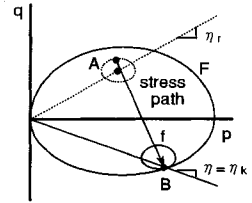
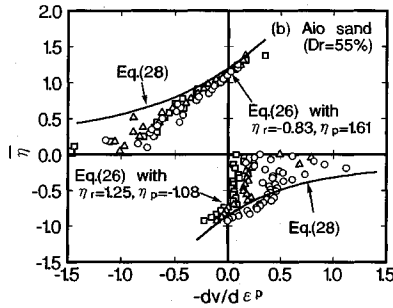


Fig.6 Schematic illustration of image point in $p-q$ space

トルは、等状態量曲線に対して法線方向を向いていないことがわかる。例えば、 $k_m=0.0001$ の等状態量曲線が載荷曲面であるとすると、この載荷曲面はひずみ増分を規定するポテンシャルにはなり得ないことになる。このような砂のひずみ増分ベクトルの特性は、式(7)~式(10)で与えられる従来の二面モデルでは表現し得ない。

Fig.5 (a) は、秋穂砂 ($D_r=55\%$) を用いて、 $p=100$ kPa まで等方圧密した後、図中左上に示すような p 一定で比較的大きな応力比振幅を与えた排水繰返し三軸試験結果をまとめたものであり、応力比 η とひずみ増分比 $-dv/d\varepsilon^p$ の関係を繰返し回数に着目して示したものである²³⁾。 $d\varepsilon^p$ を求める際の弾性成分は、 p 一定せん断試験結果の $q-\varepsilon$ 関係の初期接線勾配 G を式(5)に代入することで求めている²³⁾。図中の数字は繰返し回数を示し、○、△、□のプロットは各々繰返し回数1, 2, 3回目の結果を示しているが、この図から、 $-dv/d\varepsilon^p$ は、応力比によって一義的ではなく応力増分方向や繰返し回数に依存していることがわかる。そこで、応力比を、応力増分が反転した時の応力比 η_r と破壊時の応力比 η_p を用いて次式のように修正する。

$$\bar{\eta} = \frac{\eta - \eta_r}{\eta_p - \eta_r} \eta_p \dots\dots\dots (26)$$

この式は、 $\eta = \eta_r$ の時、 $\bar{\eta} = 0$ を、 $\eta = \eta_p$ で $\bar{\eta} = \eta_p$ を与えるものである。Fig.5 (b) は、式(26)に、 $dq < 0$ の場合、 $\eta_r = 1.25$, $\eta_p = -1.08$ を、 $dq > 0$ の場合、 $\eta_r = -0.83$, $\eta_p = 1.61$ を代入して求めた応力比 $\bar{\eta}$ と $-dv/d\varepsilon^p$ の関係を示したものである。この図から、 $\bar{\eta}$ と $-dv/d\varepsilon^p$ の間におおむね一義的な関係が存在することがわかる。このことは、現在の応力状態における塑性変形の共役点が、式(26)を用いて規定できることを示唆している。ただし、式(26)は、Fig.6で示すように応力状態が $F < 0$ の状態(点A)から $F = 0$ の状態(点B)になる場合、 $\eta_k \approx \bar{\eta}$ となり矛盾を生じることになる。そこで、 $|\eta_k| < |\eta_p|$ の場合には、便宜上共役点を規定するための応力比 $\bar{\eta}$ を、

$$\bar{\eta} = \frac{\eta - \eta_r}{\eta_k - \eta_r} \eta_k \dots\dots\dots (27)$$

で与える。ここで、 η_k は、Fig.3で示した q_k と p_k の比、 q_k/p_k で与えられる量である。上式は、 $\eta = \eta_k$ の時、 $\eta = \bar{\eta}$ を与え、上述した矛盾を解消することができる。また、式(26)や式(27)中の η_r は、弾性変形する場合の載荷曲面の中心座標の比 q_a/p_a (Fig.2参照)で与えられるとする。

Fig.5中に示す dv の弾性成分が無視できるほど十分小さいとし ($dv \approx dv^p$)、 $\bar{\eta}$ と $dv^p/d\varepsilon^p (= \phi^p)$ の関係が、

$$\phi^p = dv^p/d\varepsilon^p = (M^2 - \bar{\eta}^2)/(2\bar{\eta}) \dots\dots\dots (28)$$

で与えられることを考える。ここで、 M は材料定数であり、 $\phi^p = 0$ における $\bar{\eta}$ の値で定義される。Fig.5 (b) 中の実線は、式(28)で与えられる $\bar{\eta}$ と ϕ^p の関係を示したものであるが、実験値との対応はよいといえる。この式は、正規圧密を受けた砂の場合、 $\bar{\eta}$ が η と置き換えられ、

$$\phi^p = dv^p/d\varepsilon^p = (M^2 - \eta^2)/(2\eta) \dots\dots\dots (29)$$

となる。この関係は、修正Cam-Clayモデル¹⁷⁾のストレス・ダイレタンシー関係式と一致する。また、著者ら²⁴⁾は、11種類の砂質土に対する実験結果から、式(29)のストレス・ダイレタンシー関係式が砂質土においても妥当であることを示している。以上の特性を有する式(28)に直交則を適用すると、塑性ポテンシャル関数は、次のように誘導される。

$$g = \bar{p}^2 - \bar{p}p_0 + \bar{q}^2/M^2 = 0 \dots\dots\dots (30)$$

(5) 硬化係数と補間則

硬化パラメーター k^p に対する増分式として、塑性体積ひずみ成分と軸差ひずみ成分を含む次式を仮定する¹²⁾。

$$dk^p = dv^p + \chi \bar{\eta} d\varepsilon^p = \lambda [\bar{m}_p + \chi \bar{\eta} \bar{m}_q] = \lambda \bar{k} \dots\dots\dots (31)$$

ここで、 χ は硬化に対する塑性軸差ひずみ増分の寄与率を与えるパラメーターである。式中のパラメーター χ は、土が破壊時の応力状態に達すると完全塑性体として挙動する、つまり、硬化係数 \bar{H} が 0 になると仮定する

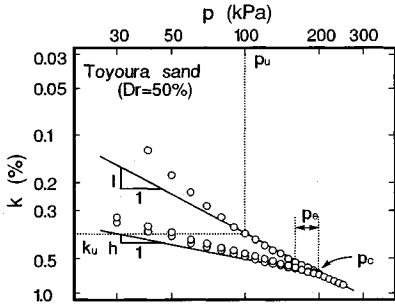


Fig.7 $\ln k - \ln p$ relationship during isotropically consolidation

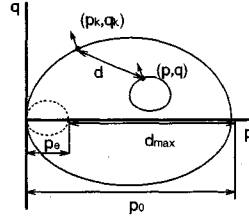


Fig.8 Explanation of d_{max} and d

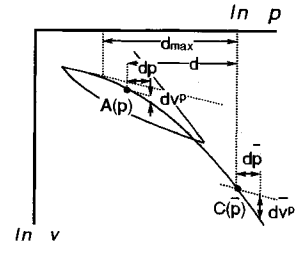


Fig.9 Explanation of plastic volumetric strain during reloading process

ことにより簡単に決定できる。この仮定は、 $\bar{\eta} = \eta_p$ の時、式(31)の[]内の値が0をとることを必要とし、その結果 χ の値は、

$$\chi = (\eta_p^2 - M^2) / (2\eta_p^2) \dots\dots\dots (32)$$

で与えられる。ここで、式中の η_p は、破壊時の応力比を意味し、提案式においては、 η_p を一定とみなすことから、 χ の値はせん断中定数となる。

さて、土がある応力変化に対して塑性変形を生じる場合の適合条件式は、式(6)を用いると、

$$dF = \bar{a}_F \bar{n}_p dp + \bar{a}_F \bar{n}_q dq + \frac{\partial F}{\partial k^p} dk^p = 0 \dots\dots\dots (33)$$

で与えられる。上式に式(31)を代入すると、正規降伏曲面上の共役点における硬化係数 \bar{H} は、

$$\bar{H} = -\frac{1}{\bar{a}_F} \frac{\partial F}{\partial k^p} \bar{k} \dots\dots\dots (34)$$

で与えられる。ここで、右辺の $\partial F / \partial k^p$ は、

$$\frac{\partial F}{\partial k^p} = \frac{\partial F}{\partial p_0} \frac{\partial p_0}{\partial k^p} \dots\dots\dots (35)$$

となる。 $\partial p_0 / \partial k^p$ の評価は、等方圧密除荷・再載荷試験における $k (= \int dk)$ と p の関係を調べることによって可能となる。Fig.7は、豊浦砂($D_r=50\%$)の $\ln k - \ln p$ 関係を示したものである。縦軸の $\ln k$ は、この場合 $\ln v$ と等価である。この図から、 $\ln k - \ln p$ 関係が直線によって近似できるとすると、 $\partial p_0 / \partial k^p$ は

$$\frac{\partial p_0}{\partial k^p} = \frac{dp_0}{dk^p} = \frac{p_0}{(l-h)k_u} \left(\frac{p_u}{p_0}\right)^l \dots\dots\dots (36)$$

で与えられる。ここで、図中に示すように、 p_u は単位応力であり、 k_u は $p=p_u$ での k の値である。また、 l は処方圧密曲線の勾配を与え、 h は除荷あるいは再載荷の初期の直線の勾配を与える材料定数である。また、載荷曲面の大きさを規定する R は、図中に示されているように除荷時の初期直線部分の p の幅 p_e と圧密応力 p_c を式(20)に代入することで求めることができる。

以上により、正規降伏曲面上の共役点における硬化係数 \bar{H} を与えることができるので、後は、 \bar{H} と現在の応力状態における硬化係数 H を関連づける補間則を決定

すればよい。

補間則は、現在の応力状態とFig.3に示す F 上の応力点 (p_k, q_k) との距離の関数で与えられるものとし、次式を仮定する。

$$H = \bar{H} \left(\frac{d_{max}}{d_{max} - d} \right)^B \dots\dots\dots (37)$$

ここで、 d_{max} は、現在の応力状態と (p_k, q_k) との取りうる距離の最大値を与える。例えば、Fig.8に示すような場合には、

$$d_{max} = p_0 - p_e \dots\dots\dots (38)$$

で与えられる。また、 d は現在の応力状態と (p_k, q_k) との距離を意味し、

$$d = \sqrt{(p_k - p)^2 + (q_k - q)^2} \dots\dots\dots (39)$$

で与えられる。式(37)は、 $d \rightarrow d_{max}$ の時、 $H \rightarrow \infty$ となり、 $d \rightarrow 0$ の時、 $H \rightarrow \bar{H}$ になるという特徴を有している。式中のパラメーター B は、 H と \bar{H} の関わりを規定する材料定数であり、等方圧密除荷・再載荷試験における再載荷過程の応力・ひずみ関係から規定できる。Fig.9は、現在の応力状態(点A)から応力増分 dp が作用したときに生じる、現在(点A)及び共役点(点C)の応力状態での塑性体積ひずみ増分 dv^p と $\bar{d}v^p$ を $\ln v - \ln p$ 空間に模式的に示したものである。再載荷中の各々の応力状態における塑性体積ひずみ増分は、

$$dv^p = (\bar{n}_p \bar{m}_p / H) dp \dots\dots\dots (40)$$

$$\bar{d}v^p = (\bar{n}_p \bar{m}_p / \bar{H}) dp \dots\dots\dots (41)$$

で表される。この時、式(40)の H に式(37)を代入し、式(41)を用いて \bar{H} を消去し整理すると、現在の応力状態における塑性体積ひずみ増分は、次式のように書き換えることができる。

$$dv^p = \bar{d}v^p \left(\frac{d_{max} - d}{d_{max}} \right)^B \dots\dots\dots (42)$$

また、上式は、再載荷中に限定すると以下ようになる。

$$dv^p = \bar{d}v^p \left(\frac{p - p_e}{p - p_c} \right)^B \dots\dots\dots (43)$$

Fig.10は、再載荷過程における p と dv^p の関係を示したもので、図中のプロットは実験結果を、実線は式(43)中のパラメーター B に9を代入して求めたものである。

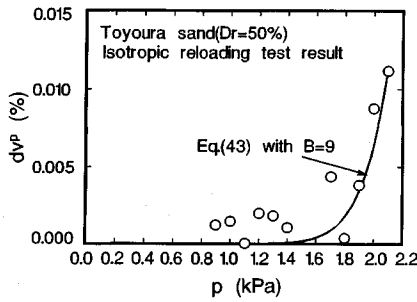


Fig. 10 dv^p-p relationship during isotropically reloading process

実験結果は、 p の増加と共に指数関数的に増加しており、式 (37) の仮定が妥当であることを示している。

さて、非排水条件下において繰返し荷重を受けた砂質土は、過剰間隙水圧の増加に伴い、破壊近傍では大きな変形を生じる。ここでは、この特性をうまく表現するために式 (37) の補間則に以下のような若干の工夫を行う。

$$H = \bar{H} \left(\frac{d_{\max}}{d_{\max} - d} \right)^{B(p/p_0)} \quad (44)$$

上式の大きな特徴は、 $p \rightarrow 0$ と共に指数が 0 に近づくために結果として $H \rightarrow \bar{H}$ となり、現在の応力状態が正規降伏曲面内部にある場合でも、正規降伏曲面上に応力状態がある場合と等価な塑性変形を表現できるところにある。

以上の議論に基づき、全体積ひずみ増分 dv と全軸差ひずみ増分 $d\varepsilon$ を、マトリックス表示すると以下のようになる。

$$\begin{Bmatrix} dv \\ d\varepsilon \end{Bmatrix} = \frac{1}{H} \begin{bmatrix} H/K + \bar{n}_p \bar{m}_p & \bar{n}_q \bar{m}_p \\ \bar{n}_p \bar{m}_q & H/3G + \bar{n}_q \bar{m}_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dp \\ dq \end{Bmatrix} \quad (45)$$

さらに、上式の逆マトリックスを求め整理すると、非排水条件下における dp 、 dq は、

$$\begin{Bmatrix} dp \\ dq \end{Bmatrix} = \frac{H}{\Delta} \begin{bmatrix} H/3G + \bar{n}_q \bar{m}_q & -\bar{n}_q \bar{m}_p \\ -\bar{n}_p \bar{m}_q & H/K + \bar{n}_p \bar{m}_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ d\varepsilon \end{Bmatrix} \quad (46)$$

$$\Delta = [H/K + \bar{n}_p \bar{m}_p][H/3G + \bar{n}_q \bar{m}_q] - [\bar{n}_p \bar{m}_q][\bar{n}_q \bar{m}_p]$$

と求められる。ここで、式中の体積弾性係数 K は、除荷時の初期部分の $\ln k - \ln p$ 直線関係に基づき導くことができる。また、せん断弾性係数 G は、ポアソン比 ν と K により決定できる。 K と G の具体的な式形は、以下のようになる。

$$K = \frac{p}{h k_u} \left(\frac{p_u}{p} \right)^i; G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} K \quad (47)$$

さらに、 ν の値は Jaky の式から求められる静止土圧係数 K_0 を用いて、近似的に次式で評価した。

$$\nu = K_0 / (1 + K_0) \quad (48)$$

式 (45)、(46) 中の偏微分項や載荷曲面の移動則を規定する式 (24) 中の偏微分項を、以下にまとめて示す。

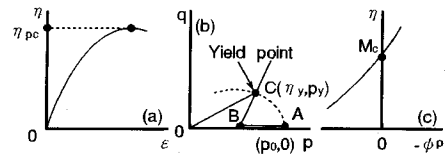


Fig. 11 Determination of experimental parameters

• type-A の場合

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p} &= 2\bar{p}[N^2 - \bar{\eta}^2]; \frac{\partial F}{\partial q} = 2\bar{q}; \frac{\partial F}{\partial p_0} = -\frac{2N^2}{p_0}\bar{p}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial p} &= 2\left[N^2(p + p_e/2 - p_a) - \frac{(q - q_a)^2}{(p + p_e/2 - p_a)}\right] = -\frac{\partial f}{\partial p_a} \\ \frac{\partial f}{\partial q} &= 2(q - q_a) = -\frac{\partial f}{\partial q_a} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

• type-B の場合

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p} &= \left[1 - \left(\frac{\bar{\eta}}{N}\right)^2\right]\bar{p}; \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{2}{N^2}\bar{q}; \frac{\partial F}{\partial p_0} = -\bar{p} \\ \frac{\partial f}{\partial p} &= 2(p - p_a) = -\frac{\partial f}{\partial p_a}; \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{2}{N^2}(q - q_a) = -\frac{\partial f}{\partial q_a} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \left[1 - \left(\frac{\bar{\eta}}{M}\right)^2\right]\bar{p}; \frac{\partial g}{\partial q} = \frac{2}{M^2}\bar{q} \quad (51)$$

3. 提案式の検証

(1) 材料定数の決定方法とパラメトリックスタディ
提案式に含まれる材料定数は 8 つである。まず、 l 、 h 、 k_u は、圧縮特性を評価する定数であり、上述したように、等方圧密除荷・再載荷試験における $\ln k - \ln p$ 直線関係により簡単に決定できる。強度特性を評価する定数 η_p は、通常の三軸圧縮試験から与えられる (Fig. 11 (a) 参照)。圧縮領域における破壊時の応力比 η_{pc} は、応力・ひずみ関係におけるピーク時の応力比であり、伸張領域の η_{pe} は、ピーク時の強度が Mohr-Coulomb 規準に従うとし、

$$\eta_{pe} = -3\eta_{pc} / (3 + \eta_{pc}) \quad (52)$$

で与える。降伏特性を評価する定数 N は、過圧密砂に対する排水三軸試験から求めることができる (Fig. 11 (b) 参照)。まず、O-A-B-C の応力経路で、通常の三軸試験を行い、A 点 ($p_0, 0$) に対応するひずみの急増する応力 (η_y, p_y) を見いだす (C 点)。そして、降伏関数に代入し整理すれば、三軸圧縮側における定数 N_c は次式で表せる。

$$N_c = \eta_y / [2 \cdot \ln(p_0/p_y)]^{0.5} \quad \text{for type-A} \quad (53)$$

$$N_c = (p_y / (p_0 - p_y))^{0.5} \eta_y \quad \text{for type-B} \quad (54)$$

ダイレタンシー特性を評価する定数 M_e は、三軸圧縮試験から得られる (Fig. 11 (c) 参照)。また、三軸伸張領域における N_e や M_e は、それぞれ η_p と同様に

Table 1 Experimental parameters of various kinds of sands

	Toyoura sand ($D_r=50\%$)	Aio sand ($D_r=55\%$)	Dogs bay sand ($D_r=60\%$)	Masado ($D_r=50\%$)	Shirasu ($D_r=50\%$)
I	0.842	0.688	0.923	0.669	0.594
h	0.309	0.27	0.197	0.049	0.060
k_{th}	0.0042	0.0047	0.0096	0.029	0.029
η_{pe}	1.42	1.61	1.85	1.35	1.52
N_c	1.80	0.98	1.51	0.95	0.87
M_c	1.20	1.21	1.61	1.12	1.38
R	0.25	1.20	0.30	0.40 </td <td>0.25</td>	0.25
B	9	8	11	15	13

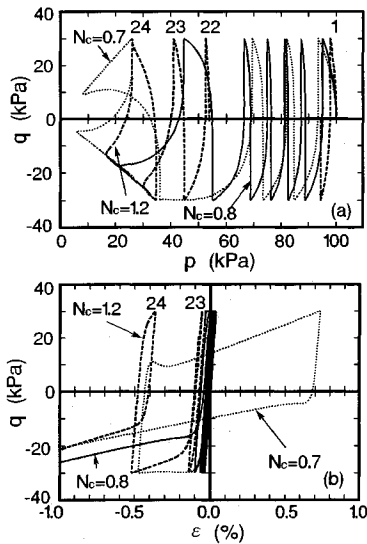


Fig.12 Effect of parameter N on undrained cyclic behaviour ; (a) p - q curve, (b) q - ϵ curve

Mohr-Coulomb 規準に従うと仮定する。弾性領域を評価する定数 R と正規降伏曲面内の塑性ひずみ増分の大きさを評価する定数 B は、上述したように、等方圧密除荷・再載荷試験から簡単に決定できる。Table 1 には、検証に用いた破碎性の異なる 5 種類の砂質土の材料定数をまとめて示している。

ここでは、まず降伏特性を評価する定数 N と正規降伏曲面の形状の違いが非排水繰返し挙動に及ぼす影響を把握する。

Fig.12 (a), (b) は type-A の正規降伏曲面を用いて、定数 N の影響を p - q 関係と q - ϵ 関係によって示したものである。定数 N 以外の材料定数は豊浦砂 ($D_r=50\%$) のものを用いている。試験は、 $p=100$ kPa で等方圧密した後、繰返し応力比 $q_{cyc}/p_c=0.3$ で非排水繰返し試験を行った場合を対象としている。図中には、 $N_c=0.7, 0.8, 1.2$ の場合の結果を、細い点線、実線、太い破線で示しており、 $N_c=1.2$ の結果は、関連流れ則を仮定した結果に対応する。また、図中の数字は、 $N_c=1.2$ の結果における繰返し回数を示している。Fig.12 (a) から、 N_c の値が増加すると共に、繰返し回数 1

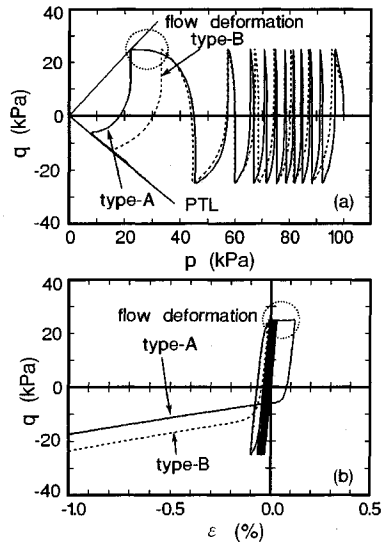


Fig.13 Effect of shape of normal-yield surface on undrained cyclic behaviour ; (a) p - q curve, (b) q - ϵ curve

回目の有効応力の減少は小さくなることや、有効応力が変相線 (PTL) に達するまでの繰返し回数は増加することがわかる。また、Fig.12 (b) より、 N_c の値が減少すると共に、変相線に達した後の軸差ひずみの生じ方が著しく大きくなることがわかる。

Fig.13 は、豊浦砂 ($D_r=50\%$) を用いて $p=100$ kPa で正規圧密した後、 $q_{cyc}/p_c=0.25$ の非排水繰返し三軸試験を、type-A と type-B の正規降伏曲面を用いて表現したものである。type-B の正規降伏曲面の降伏特性を評価する定数 N_c は、式 (54) から得られた 0.942 を用いており、その他の材料定数は、Table 1 と同じものを用いている。Fig.13 (a) から、type-B の正規降伏曲面を用いた計算結果は、type-A の場合と比較して変相線に達するまでの繰返し回数が少ないことがわかる。また Fig.13 (b) から、type-A の計算結果は、点線で囲ったような軸差応力一定で軸差ひずみが増加する飽和砂の現象 (流動化現象) をうまく表現しているのに対して、type-B の場合は、その特性を表していないことがわかる。

Fig.14 は、type-A と type-B の正規降伏曲面を用いて、 $p=100$ kPa で正規圧密した場合の豊浦砂 ($D_r=50\%$) の液状化強度曲線を示したものである。ここで、液状化強度は統一的な規準で議論を行うためにひずみ両振幅 $DA=1\%$ で定義している。type-B の場合は、比較のために N_c に 0.80 を用いた結果も示している。これにより、液状化強度曲線は、正規降伏曲面の形状や N_c の大きさに依存し、type-A の場合の方が type-B の場合よりも液状化強度が大きく、また、 N_c の増加と共に液状化強度が増加していることがわかる。このことは、

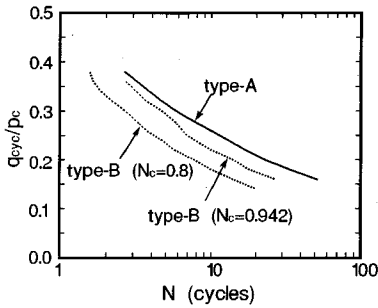


Fig. 14 Effect of parameter N and shape of normal-yield surface on liquefaction strength

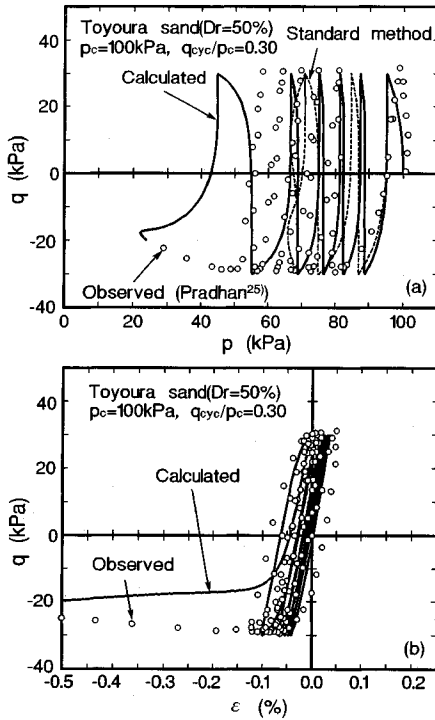


Fig. 15 Comparison of calculated and observed undrained cyclic behaviour for Toyoura sand ; (a) p - q curve, (b) q - ϵ curve

正規降伏曲面の形状の選択や材料定数の決定を含めた降伏特性の評価の仕方の重要性を示している。

(2) 提案式の検証

上述の結果を踏まえ、ここでの有用性の検証は、type-A の正規降伏曲面を用いて行う。

Fig. 15 (a), (b) は、 $p=100$ kPa で圧密した後、 $q_{cyc}/p_c=0.3$ で非排水繰返し試験を行った場合の豊浦砂 ($D_r=50\%$) の計算結果と実験結果を示したものであり、それぞれ p - q 関係と q - ϵ 関係を示したものである。実験結果は、Pradhan²⁵⁾ のものを引用している。計算結果は、実験結果における繰返し回数 1 回目の有効応力の大きな減少、その後の繰返し載荷にともなって徐々に

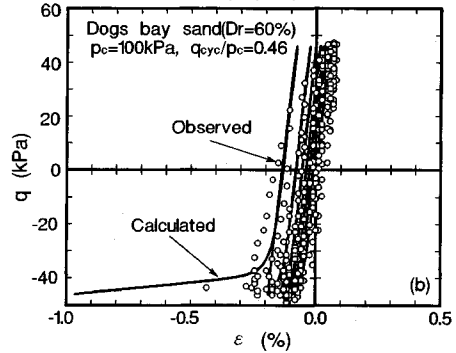
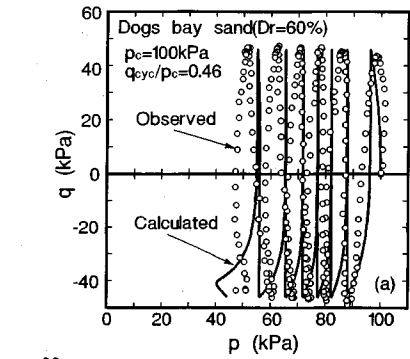


Fig. 16 Comparison of calculated and observed undrained cyclic behaviour for Dogs bay sand ; (a) p - q curve, (b) q - ϵ curve

有効応力の減少が小さくなること、さらに変相線に達する直前に有効応力が再び大きく減少する特性をうまく表現しているといえる。加えて、計算結果は、軸差ひずみが急増する応力点を的確に捉えているといえる。Fig. 15 (a) 中の破線は、共役点の応力状態を Mroz, Norris and Zienkiewicz⁶⁾, Hashiguchi⁷⁾, Al-Tabbaa and Wood⁸⁾ のモデルと同様に与えた場合の計算結果である。図から明らかなように、この計算結果は、実験結果において示されるような砂の非排水繰返し挙動を捉えているとは言えず、提案式に導入した共役点の考え方が、砂質土の非排水繰返し挙動を表現する場合、妥当なものであることがわかる。

Dogs bay 砂 ($D_r=60\%$) としらす ($D_r=50\%$) の $p=100$ kPa で等方圧密した後の非排水繰返し三軸試験の計算結果と実験結果^{26), 27)} を示したものが Fig. 16, Fig. 17 である。Dogs bay 砂やしらすは、豊浦砂と比較して低圧域においても圧縮性の卓越する破碎性材料である。計算結果は、実験結果と比較して変相線に至るまでの繰返し回数に若干の違いはあるものの、有効応力の減少過程を豊浦砂同様、うまく捉えている。さらに、最も興味深い点は、Dogs bay 砂としらすのいずれの試料においても軸差ひずみが急激に伸張側に進行していく応力点を的確に捉えていることである。

Fig. 18 は、豊浦砂²⁸⁾ と秋穂砂, Dogs bay 砂, まさ土,

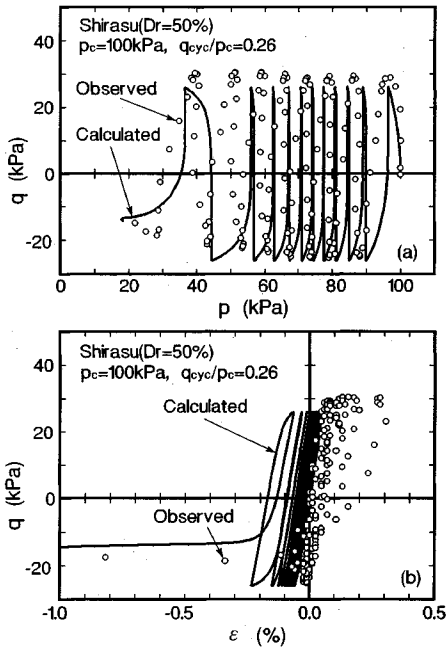


Fig.17 Comparison of calculated and observed undrained cyclic behaviour for Shirasu; (a) p - q curve, (b) q - ϵ curve

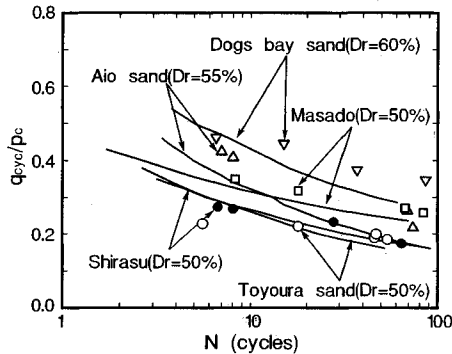


Fig.18 Comparison of calculated and observed liquefaction strength for various kinds of loose sands

しらすの液状化強度曲線の実験結果をプロットで、提案式による計算結果を実線で示したものである。ここでの、液状化強度は Fig.14 同様、 $DA=1\%$ と定義している。ただし、秋穂砂については、 q_{cyc} によっては計算結果において $DA=1\%$ に達しない場合があるため、軸差ひずみが -1% に達した時を液状化強度と定義した。図から提案式を用いた計算結果は、5種類の砂質土の液状化強度を比較的うまく表現しているといえる。5種類の砂質土の三軸圧縮試験におけるピーク時の応力比(内部摩擦角)は、Dogs bay 砂、秋穂砂、しらす、豊浦砂、まさ土の順に小さくなっている。しかしながら、例えば豊浦砂とまさ土に着目すると、液状化強度は、実験結果と計算結果のいずれにおいてもまさ土の方が大きくなってい

る。このことから、提案式は、液状化強度に及ぼすピーク時の応力比(内部摩擦角)だけでなく、圧縮特性やダイラテンシー特性等の様々な要因を十分に評価しているといえる。

4. ま と め

本論文では、繰返し載荷時の飽和砂の応力・ひずみ挙動を表現可能でかつ実用性の高い二面を有する弾塑性構成式を、実験的な検討を踏まえた上で、軸対称の応力空間内に限定して提案した。得られた知見をまとめると以下ようになる。

- (1) 非排水繰返し挙動は、正規降伏曲面の形状や降伏特性を規定する定数 N に大きく依存するため、その挙動を表現する場合には、正規降伏曲面の形状の選択や材料定数の決め方が重要であることが示された。
- (2) 提案式を構築する際に特に考慮した共役点の考え方は、提案式を用いて非排水繰返し挙動を表現する場合、妥当なものであることが示された。
- (3) 提案式は、砂質土の種類によらず、有効応力の減少の仕方や軸差ひずみの急増する応力点を適切に評価できることがわかった。
- (4) 提案式は、ピーク時の応力比(内部摩擦角)だけでなく、圧縮特性やダイラテンシー特性、降伏特性等を適切に評価した結果、5種類の砂質土の液状化強度の違いを表現できることが示された。

謝 辞：本研究を進めるにあたり、実験およびデータ整理において多大な協力を受けた山口大学大学院修士生西川明宏氏(現 鹿島)、大原誠氏(現 清水建設)、山口大学大学院神村真氏、試験機の改良で多大な労力を煩わせた山口大学技官 山本修三氏および、論文の作成にあたり貴重な御意見を頂いた(株)奥村組 森尾敏氏に心から感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Ghaboussi, J. and Momen, H. : Plasticity model for cyclic behaviour of sands, Proc. 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen, pp.423-434, 1979.
- 2) 西 好一・江刺靖行：繰返し荷重下における砂の弾-塑性挙動, 土木学会第34回年次学術講演会講演概要集, 第3部, pp.33-34, 1979.
- 3) 西 好一：非排水繰返し荷重下における飽和砂の弾-塑性挙動と構成式, 土木学会論文報告集, 第319号, pp.451-469, 1982.
- 4) Prevost, J.H. : Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behavior, Int. J. Numer. Anal. Methods Geotech., Vol.1, pp.195-246, 1977.
- 5) Mroz, Z., Norris, V.A. and Zienkiewicz, O.C. : An isotropic hardening model for soil and its application to cyclic loading, Int. J. Numer. Anal. Methods Geotechnique, Vol.2, pp.203-221, 1978.

- 6) Mroz, Z., Norris, V.A. and Zienkiewicz, O.C. : Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils, *Geotechnique*, Vol.29, No.1, pp.1~34, 1979.
- 7) Hashiguchi, K. : Constitutive equations of granular materials, Proc. U.S.-Japan Seminar on New Models & Constitutive Relations in Mech. of Granular Materials, pp.127~136, 1983.
- 8) Al-Tabbaa, A. and Wood, D.M. : An experimentally based bubble model for clay, *Numerical Methods in Geomechanics NUMOG III*, Elsevier Applied Science pp.91-99, 1989.
- 9) Hashiguchi, K. and Ueno, M. : Elastoplastic constitutive laws of granular materials, Proc. 9th ICSMFE, Spec. Session 9, Constitutive equations of soils (eds. Murayama, S. and Schofield, A.N.), pp.73~82, 1977.
- 10) Dafalias, Y.F. and Herrmann, L.R. : A bounding surface soil plasticity model, *International Symposium on Soils under Cyclic Transient Loading*, Swansea pp.335~345, 1980.
- 11) 村田秀一・兵動正幸・安福規之：低・高圧下における砂の降伏特性を評価した弾塑性構成式について，土木学会論文集，No.394/Ⅲ-9，pp.11~20，1988.
- 12) Yasufuku, N., Murata, H., Hyodo, M. and Hyde, F.L. Adrian : A stress-strain relationship for anisotropically Consolidated sand over a wide stress region, *Soils and Foundations*, Vol.31, No.4, pp.75~92, 1991.
- 13) 安福規之：広範な応力域における異方圧密砂の降伏特性と弾塑性構成式に関する研究，九州大学学位申請論文，1990.
- 14) 村田秀一・兵動正幸・安福規之：低・高圧下における密な砂の降伏特性，土木学会論文集，No.382/Ⅲ-7，pp.183~192，1987.
- 15) Yasufuku, N., Murata, H. and Hyodo, M. : Yield Characteristics of anisotropically Consolidated sand under low and high stresses, *Soils and Foundations*, Vol.31, No.1, pp.95~109, 1991.
- 16) 橋口公一：最新弾塑性学，朝倉書店，1990.
- 17) Roscoe, K.H. and Burland, J.B. : On the generalized stress strain behaviour of "wet" clay, *Engineering Plasticity*, Cambridge Univ. Press., pp.535~609, 1968.
- 18) Jardine, R. J. : Some observations on the kinematic nature of soil stiffness, *Soils and Foundations*, Vol.32, No.2, pp.111~124, 1992.
- 19) Krieg, R.D. : A practical two surface model, *J. Appl. Mech. Trans. ASME, ser.E* 42, pp.641~646, 1975.
- 20) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P. : A model of nonlinearly hardening materials for complex loading, *Acta Mechanica*, Vol.21, pp.173~192, 1975.
- 21) Moroto, N. : A new parameter to measure degree of shear deformation of granular material in triaxial compression tests, *Soils and Foundations*, Vol.16, No.4, pp.1~9, 1976.
- 22) 中田幸男・安福規之・村田秀一・兵動正幸・神村真：様々な応力履歴を受けた砂の硬化特性について，第28回土質工学研究発表会発表概要集，pp.583~586，1993.
- 23) Nakata, Y., Murata, H., Yasufuku, N., Hyodo, M. and Nishikawa, A. : Deformation Characteristics of sand subjected to drained cyclic loading, *Technology reports of the Yamaguchi Univ.* Vol.5, No.1, pp.11~21, 1992.
- 24) Yasufuku, N., Murata, H. and Hyodo, M. : Application of elasto-plastic constitutive model to undisturbed soil "Masado", Proc. Int. Conf. on Engineering Problems of Residual Soils, Beijing, Vol.1, pp.759~764, 1988.
- 25) Pradhan, T.B.S. : The behavior of sand subjected to monotonic and cyclic loadings, "The Doctor thesis, Kyoto University," 1989.
- 26) 小浪岳治・兵動正幸・安福規之・中田幸男・Hyde, F.L. Adrian：海底地盤としてのカーボネイト砂の力学特性について，第16回海洋開発シンポジウム，Vol.1，pp.313~318，1991.
- 27) 岡林 巧・兵動正幸・安福規之・村田秀一：乱した一次しらすの非排水単調および繰返しせん断挙動，土木学会論文集Ⅲ，投稿中。
- 28) Hyodo, M., Murata, H., Yasufuku, N and Fujii, T. : Undrained cyclic shear strength and residual shear strain of saturated sand by cyclic triaxial tests, *Soils and Foundations*, Vol.31, No.3, pp.60~76, 1991.

(1993. 10. 20 受付)

TWO SURFACE ELASTO-PLASTIC CONSTITUTIVE MODEL FOR SATURATED SAND SUBJECTED TO CYCLIC LOADING

Yukio NAKATA, Noriyuki YASUFUKU, Hidekazu MURATA, and Masayuki HYODO

An isotropic hardening elasto-plastic constitutive model, which can evaluate the undrained cyclic behaviour of saturated sand, has been presented in a triaxial stress space. The features of the model presented are that the image point, which is related to the plastic strain vector at the current stress state, and that the physical meaning of the experimental parameters involved are clear. It is shown from the analytical investigation, 1) the shape of normal-yield surface and the parameter which is concerned with the yield characteristics can have a great influence on the undrained cyclic behaviour of sand, and 2) the model reasonably presented can evaluate the effective stress state, which the large deformation of sands happens during undrained cyclic loading.