

円錐形の島に捕捉された長波の特性

藤間功司*・後藤智明**

津波が島を襲うと、捕捉現象により波高が増幅する場合がある。そこで、島の有限な大きさと斜面による屈折の効果を考慮した円錐形の島による長波の捕捉に関する理論解を求めた。理論解に基づき、空間水位の変化特性、汀線に沿った遡上高の変化特性、最大遡上高の変化特性などを調べ、捕捉の影響が強く現れる条件を示した。本理論により隠岐や奥尻島の津波痕跡高が良好に説明できる。

Key Words : trapping, tsunami, refraction, Hokkaido-nansei-oki earthquake

1. はじめに

1993年7月に発生した北海道南西沖地震津波では、奥尻島の海岸に沿って、打ち上げ高の高い地域と低い地域が交互に観測された。このことから、奥尻島で津波が捕捉され、波高増幅に寄与した可能性が指摘された(首藤,1993)。また、1983年日本海中部地震津波でも、奥尻島や隠岐で同様の特徴ある実測結果が得られており、その原因が島による捕捉であった可能性が指摘されていた(酒井ら,1984)。

津波のような長周期波が島によって捕捉されることは、これまでに、多くの研究により示されている。図-1は、長波の捕捉に関し、理論解や数値解が得られている様々な島のモデルを示したものである。図中、 h は水深、 r は島の中心からの距離である。図のように様々なモデルが用いられているものの、これらのモデルのうち、津波の打ち上げ高分布の検討に使用できる現実的なモデルは(e)だけである。すなわち、(a)-(c)のモデルは水平床の組み合わせであり、斜面による屈折の効果を考慮していない。(d)のモデルは小さな島を想定したものであり、有限の大きさを持った島には適用できない。また、(f)のモデルでは現地地形に適用すると汀線の水深が無視できず、屈折の効果を正確に取り入れたことにはならない。

しかし、(e)のモデルでは支配方程式の特異点が増えるため、解析的な扱いが複雑になる。そのため、Lautenbacher(1970)はGreen関数を用いたシミュレーションにより島まわりの波高を求めた。また、清川ら(1982)は、固有関数展開を用いることにより、解析解を求めた。Green関数を用いた計算は、簡便な数値シミュレーションとして捕捉の研究に供し得る可能性があるが、Lautenbacherの計算ケースだけで捕捉の特性に関して十分な知見が得

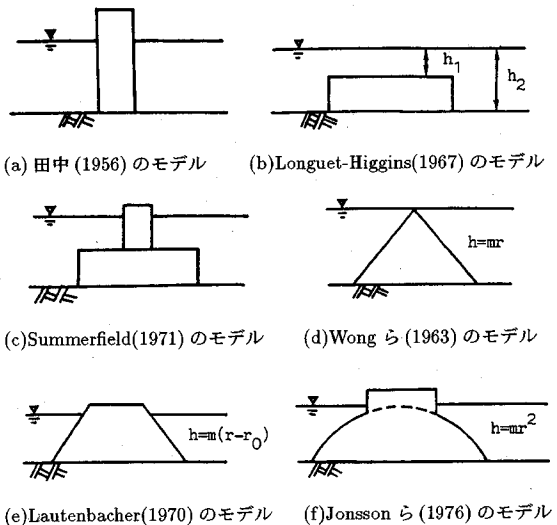


図-1 円形島の様々なモデル

られたとは言い難い。また、清川らの解は分散性をも考慮した高次の解であるが、実際に理論解を計算するのは必ずしも簡単でない。捕捉に関する基礎的な特性を理解するためには、解を簡単に求められる、簡便な理論解析が必要であろう。

そこでここでは、第1次近似として、複雑な地形の影響や非線形・分散性の効果などを無視し、線形長波理論を用いた(e)のモデルに対する簡便な理論解を求め、島による長周期波の捕捉の特性を明らかにする。

なお、Euler座標を用いた本理論では、波先端の境界条件が完全には満足されず、厳密な遡上解は得られない。しかし、線形理論の範囲ではLagrange座標を用いて得られる解とEuler座標の解は第1次近似で一致する。したがって、本理論を用いて津波の遡上高を議論しても差

* 正会員 工博 防衛大学校講師 土木工学教室 (〒239 神奈川県横須賀市走水1-10-20)

** 正会員 工博 東海大学教授 工学部土木工学科 (元運輸省港湾技術研究所 海洋エネルギー利用研究室長)

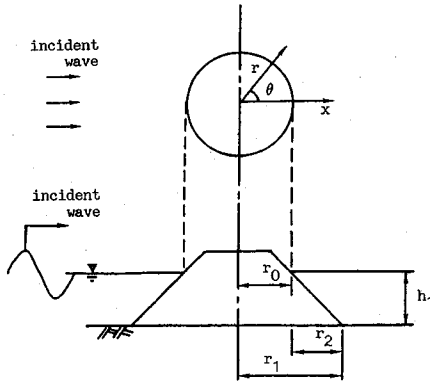


図-2 地形の模式図

し支えないと考えられる。

2. 理論解の誘導

(1) 支配方程式

海底形状は、同心円状の等水深線をもち、どの方向にも勾配が一定な円錐形と仮定する。ただし、島の大きさは有限とする。すなわち、水深 h は、 $h = m(r - r_0)$ で表される。ただし、 m は勾配 (一定値)、 r_0 は島の海岸線の半径である。また、 $r > r_1 = r_0 + r_2$ では水平床とする。水平床部分の水深を $h_1 (= mr_2)$ とする。このような地形の模式図を図-2 に示す。

上記の海底地形をもつ島に、正弦波が入射したときの定常 (周期) 的な解を求める。基礎方程式は、以下の線形長波理論である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots (3)$$

ここで、 x, y は島の中心を原点とし、入射波の進行方向が x 軸と一致するようにとった座標であり、 u, v は x, y 方向の断面平均流速、 η は平均水面からの水位変動を表す。連続の式から u, v を消去すると次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + g \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad \dots\dots (4)$$

入射する正弦波の角周波数を σ ($= 2\pi/T$, T は周期) とすると、現象は周期的と仮定したので、

$$\eta(x, y, t) = \zeta(x, y) e^{-i\sigma t} \quad \dots\dots (5)$$

とおける。したがって、式(4)は以下のように変形される。

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \frac{\sigma^2}{gh} \zeta = 0 \quad \dots\dots (6)$$

上式を極座標に変換すると次式となる。ただし、水深 h は r のみの関数としている。

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + \frac{\sigma^2}{gh} \zeta + \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0 \quad \dots\dots (7)$$

また、 ζ は θ に関して 2π を周期とする周期関数とおくことができる。すなわち、

$$\zeta(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(r) e^{in\theta} \quad \dots\dots (8)$$

となり、 n 番目の成分 R_n に対しての支配方程式として次式を得る。

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \right) \frac{dR_n}{dr} + \left(\frac{\sigma^2}{gh} - \frac{n^2}{r^2} \right) R_n = 0 \quad \dots\dots (9)$$

(2) 水平床上の解

水平床部分 ($r > r_1 = r_0 + r_2$) における解を求めるため、水深を一定 ($h = h_1$) とおく。このとき、上式は

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n}{dr} + \left(\frac{\sigma^2}{gh_1} - \frac{n^2}{r^2} \right) R_n = 0 \quad \dots\dots (10)$$

となり、解の組み合わせは次式で与えられる。

$$R_n = \begin{bmatrix} J_n(k_1 r) \\ N_n(k_1 r) \end{bmatrix} \quad \dots\dots (11)$$

ただし、

$$k_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{gh_1}} \quad \dots\dots (12)$$

であり、 J_n, N_n はそれぞれ n 次の第1種、第2種 Bessel 関数を意味する。以上は、田中 (1956) や Longuet-Higgins (1967) の取り扱いと同等である。

(3) 斜面上の解

a) 斜面上の領域における支配方程式

次に、斜面部分 ($r < r_1 = r_0 + r_2$) における解を求めるため、

$$h = m(r - r_0) \quad \dots\dots (13)$$

を式(9)に代入する。これにより、次式が得られる。

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r - r_0} \right) \frac{dR_n}{dr} + \left\{ \frac{\sigma^2}{gm(r - r_0)} - \frac{n^2}{r^2} \right\} R_n = 0 \quad \dots\dots (14)$$

上式を解けばよいが、式(14)には2個の確定特異点 ($r = 0, r_0$) と1個の不確定特異点 ($r = \infty$) があり、解を初等関数で表すことは困難である。そこで、ここでは級数解を組み合わせる手法により解を求める。

方程式の見通しをよくするために、さらに

$$\frac{\sigma^2}{gm} = \alpha, \quad 2\sqrt{\alpha r_0} = \beta \quad \dots\dots (15)$$

とおいて、

$$\xi = 2\sqrt{\alpha(r - r_0)} \quad \dots\dots (16)$$

によって座標変換しておく。後の考察で明らかにするが、 β は島の大きさと汀線近傍における波長との比に関係したパラメタである。目安として、津波の周期 T を5分~20分、勾配 m を $1/10 \sim 1/100$ 、島の海岸線の半径 r_0 を

1km~10km とすると, β は 0.3~13 程度の大きさになる. この変換により得られる次式が支配方程式となる.

$$\frac{d^2 R_n}{d\xi^2} + \left(\frac{2\xi}{\xi^2 + \beta^2} + \frac{1}{\xi} \right) \frac{dR_n}{d\xi} + \left\{ 1 - \left(\frac{2\xi}{\xi^2 + \beta^2} \right)^2 n^2 \right\} R_n = 0 \dots\dots\dots (17)$$

上記の支配方程式の極端な場合として, $\beta \rightarrow \infty$ の場合と $\beta \rightarrow 0$ の場合には容易に理論解が求められる. まず, $\beta \rightarrow \infty$ の場合, 式 (17) は次式で近似できる.

$$\frac{d^2 R_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR_n}{d\xi} + R_n = 0 \dots\dots\dots (18)$$

この解の組合わせは,

$$R_n = \begin{bmatrix} J_0(\xi) \\ N_0(\xi) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

で表される. J_0, N_0 は 0 次の第 1 種, 第 2 種 Bessel 関数を表す. つまり, 島の半径 r_0 が非常に大きいと, 1 次元伝播問題の斜面上の解の組合わせと一致する.

次に, $\beta \rightarrow 0$ の場合 (島の半径 r_0 が非常に小さい, Wong らのモデルの場合), 式 (17) は以下のように近似される.

$$\frac{d^2 R_n}{d\xi^2} + \frac{3}{\xi} \frac{dR_n}{d\xi} + \left(1 - \frac{4n^2}{\xi^2} \right) R_n = 0 \dots\dots\dots (20)$$

この解の組合わせは,

$$R_n = \begin{bmatrix} \xi^{-1} J_{\sqrt{1+4n^2}}(\xi) \\ \xi^{-1} N_{\sqrt{1+4n^2}}(\xi) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

で与えられる. $J_{\sqrt{1+4n^2}}, N_{\sqrt{1+4n^2}}$ は $\sqrt{1+4n^2}$ 次の第 1 種, 第 2 種 Bessel 関数を表す. なお, この近似は $\xi \gg \beta$ なら良好な精度を有するので, 上記の解は, 大きい ξ における式 (17) の近似解として使える.

b) 級数解法

支配方程式 (17) の解を求める手法は以下の通りである. まず, 原点 $\xi = 0$ のまわりで級数解を求めておく. 級数の収束半径は $\xi < \beta$ である. 決定方程式が重根 (ゼロ) をもつので, 解のひとつは通常のべき級数に展開され, $\xi = 0$ で有界になる. それと独立な, もうひとつの解は $\log \xi$ なる関数形を含み, $\xi = 0$ で ∞ に発散する. 物理的には, $\xi = 0$, すなわち汀線で水位が有限でなければならないので, ここでは前者の解のみ考えればよい. なお, 式 (17) にはふたつのパラメタ n と β が含まれているので, ここで求めるべき解を関数 $F_{n,\beta}(\xi)$ と書くことにする. 関数 $F_{n,\beta}(\xi)$ の $\xi = 0$ 周辺の級数解は以下のように表される.

$$F_{n,\beta}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \dots\dots\dots (22)$$

係数 a_k は, 式 (17) の第 2 項, 第 3 項の係数を Taylor 展開して, 各項を比較することにより以下のように求められる. ただし a_0 は最終的に境界条件によって決まるもの

で, 基本解では自由に定義できる. $F_{n,\beta}$ における a_0 の定義は, 後に述べる.

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_2 &= -\frac{1}{4} a_0, \\ &\vdots \\ a_k &= -\frac{1}{k^2} \sum_{\ell=1}^k \{ (k-\ell) b_\ell + c_\ell \} a_{k-\ell} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

上式中の係数 b_ℓ, c_ℓ は以下のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= 1, \\ b_1 &= 0, \\ b_{2\ell} &= (-1)^{\ell-1} \frac{2}{\beta^{2\ell}}, \\ b_{2\ell+1} &= 0 \end{aligned} \right\} (\ell \geq 1) \dots\dots\dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 0, \\ c_1 &= 0, \\ c_2 &= 1, \\ c_3 &= 0, \\ c_{2\ell} &= (-1)^{\ell-1} \frac{(\ell-1)}{\beta^{2\ell}} 4n^2, \\ c_{2\ell+1} &= 0 \end{aligned} \right\} (\ell \geq 2) \dots\dots\dots (25)$$

同様に, 任意の正則点 ξ_i のまわりの級数解が以下のよう求められる. 収束半径は $|\xi - \xi_i| < \xi_i$ である.

$$F_{n,\beta}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (\xi - \xi_i)^k \dots\dots\dots (26)$$

ただし, 係数 d_k は, d_0, d_1 が与えられたとして,

$$\left. \begin{aligned} d_2 &= -\frac{f_0 d_1 + g_0 d_0}{2e_0}, \\ &\vdots \\ d_k &= -\frac{\sum_{\ell=1}^{k-1} \{ (\ell(\ell-1)e_{k-\ell} + \ell f_{k-\ell-1}) d_\ell + g_{k-\ell-1} d_{\ell-1} \}}{k(k-1)e_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

であり, 係数 e_ℓ, f_ℓ, g_ℓ は以下のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= \xi_i (\xi_i^2 + \beta^2)^2, \\ e_1 &= (\xi_i^2 + \beta^2) (5\xi_i^2 + \beta^2), \\ e_2 &= \xi_i (10\xi_i^2 + 6\beta^2), \\ e_3 &= 10\xi_i^2 + 2\beta^2, \\ e_4 &= 5\xi_i, \\ e_5 &= 1, \\ e_\ell &= 0 \quad (\ell \geq 6) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= (\xi_i^2 + \beta^2) (3\xi_i^2 + \beta^2), \\ f_1 &= \xi_i (12\xi_i^2 + 8\beta^2), \\ f_2 &= 18\xi_i^2 + 4\beta^2, \\ f_3 &= 12\xi_i, \\ f_4 &= 3, \\ f_\ell &= 0 \quad (\ell \geq 5) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= e_0 - 4n^2 \xi_i^3, \\ g_1 &= e_1 - 12n^2 \xi_i^2, \\ g_2 &= e_2 - 12n^2 \xi_i, \\ g_3 &= e_3 - 4n^2, \\ g_4 &= e_4, \\ g_5 &= e_5, \\ g_\ell &= 0 \quad (\ell \geq 6) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

次に、変数 ξ のとり得る $[0, \infty]$ の範囲を、 $[0, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$, \dots , $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, \dots , $[\xi_{M-1}, \xi_M]$, $[\xi_M, \infty]$ と $(M+1)$ 個の区間に分割する。ただし、最後の区分点 ξ_M は、式 (17) の近似解として式 (21) が使用できるほど原点から離れているものとする。また、各区分点は、

$$\xi_1 < \beta, \xi_2 < 2\xi_1, \dots, \xi_{i+1} < 2\xi_i, \dots \dots \dots (31)$$

を満たすものとする。これにより、 $[0, \xi_1]$ から $[\xi_{M-1}, \xi_M]$ までの各区間において、区間の始まりの点を中心とした級数解の収束性が保証される。

すなわち、区間 $[0, \xi_1]$ の解として、 $\xi = 0$ 近傍の級数解が使えることになる。この際、仮に $a_0 = 1$ としておく。この解を $F_{n,\beta}^{(1)}$ と表すことにする。

次に正則点 ξ_1 のまわりの級数解を求め、区間 $[\xi_1, \xi_2]$ における解 $F_{n,\beta}^{(2)}$ とする。ただし、式 (26) の係数 d_k のうち、最初の 2 項 d_0, d_1 は、

$$\left. \begin{aligned} F_{n,\beta}^{(1)}(\xi_1) &= d_0 \\ F_{n,\beta}^{(1)'}(\xi_1) &= d_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

と与える。ここで、記号' は ξ による微分を表す。これにより、 ξ_1 において $F_{n,\beta}$ と $F_{n,\beta}'$ が連続に接続される。同様に、次々と $F_{n,\beta}^{(3)}, F_{n,\beta}^{(4)}, \dots$ と各区間に対する級数解を求めていくことができる。

最後の区間では解 (21) に接続する。すなわち、

$$F_{n,\beta}^{(M+1)} = p\xi^{-1}J_{\sqrt{1+4n^2}}(\xi) + q\xi^{-1}N_{\sqrt{1+4n^2}}(\xi) \dots (33)$$

において、定数 p, q を次式から求める。

$$\left. \begin{aligned} F_{n,\beta}^{(M)}(\xi_M) &= F_{n,\beta}^{(M+1)}(\xi_M) \\ F_{n,\beta}^{(M)'}(\xi_M) &= F_{n,\beta}^{(M+1)'}(\xi_M) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

最後に、 n や β に関らず、大きな ξ における $F_{n,\beta}$ の大きさが同程度になるよう、各区間の解 $F_{n,\beta}^{(1)}, \dots, F_{n,\beta}^{(M+1)}$ を $2/\sqrt{p^2+q^2}$ 倍して再定義する。以上の手順により式 (17) の解 $F_{n,\beta}$ を求めることができる。

実際に級数を何項まで考慮すべきかは、解の接続点 ξ_i のとり方により異なる。一般的に、ある関数をベキ級数で近似する場合には級数の項数を増やすより区間分割数を増やすほうが経済的である。ここでは $M = 200$ とし、以下に示すような等間隔の分割をした。

- $2 \leq \beta < 20$ では $\xi_1 = 0.05\beta, \dots, \xi_M = 10\beta$ ($M=200$)
 - $0.5 \leq \beta < 2$ では $\xi_1 = 0.1\beta, \dots, \xi_M = 20\beta$ ($M=200$)
 - $0.2 \leq \beta < 0.5$ では $\xi_1 = 0.2\beta, \dots, \xi_M = 40\beta$ ($M=200$)
- 本論文で使用した n と β の組み合わせの範囲 ($0.2 < \beta < 20, 0 \leq n < [\beta] + 4$) の中では、この分割により各級数を 10 項まで考慮すれば十分な精度が得られた。ただし、 $[\beta]$ は β を超えない最大の整数を表す。

なお、 $F_{n,\beta}(\xi)$ は、 $\xi = 0$ 付近の級数解により初期値を決め、Runge-Kutta 法で数値的に求めることも可能である。上述の理論解と Runge-Kutta 法による数値解は良好に一致する。しかし、本理論解を用いると、任意点にお

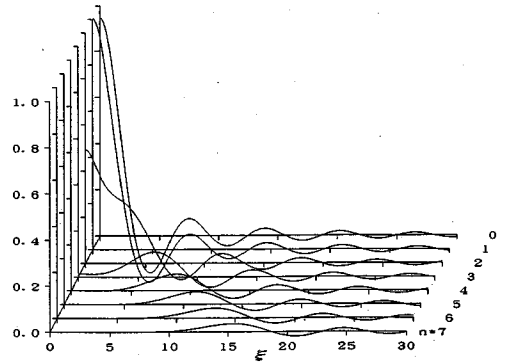


図-3 $F_{n,\beta}$ 関数のグラフ ($\beta = 2$)

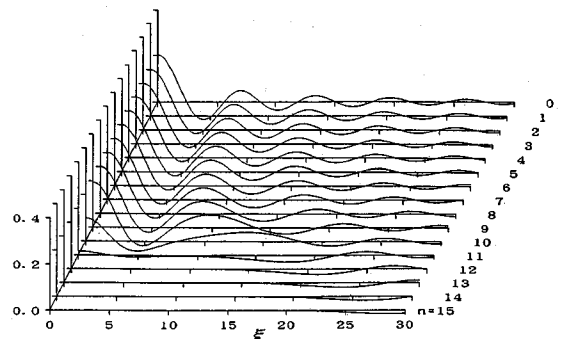


図-4 $F_{n,\beta}$ 関数のグラフ ($\beta = 10$)

ける $F_{n,\beta}$ の値を容易に求めることができ、捕捉の特性に関する様々な検討が可能になる。

c) $F_{n,\beta}(\xi)$ の性質

関数 $F_{n,\beta}$ の例を図-3,4 に示す。図-3 は $\beta = 2$ の場合、図-4 は $\beta = 10$ の場合のグラフである。

これらの図から、 $F_{n,\beta}$ の関数形は、 n が小さいと原点 $\xi = 0$ に最大値をもつ J_0 のような形であり、それに対し n が大きいと原点での値がゼロと見なせる $J_{1,2,\dots}$ に似た形であることがわかる。その境は、ほぼ $n = \beta$ 程度である。例えば、 $\beta = 2$ の場合、 $n = 0, 1$ では J_0 のような形であり、 $n \geq 3$ では $J_{1,2,\dots}$ のような形となる。 $\beta = 10$ の場合、 $n \leq 9$ では J_0 のような形で、 $n \geq 12$ では $J_{1,2,\dots}$ に似た形となる。

これから、 $n > \beta$ のモードは島の汀線近傍ではほとんど現れず、捕捉の汀線近傍での特性を調べるなら、 $n \leq \beta$ のモードのみ考えればよいといえる。ただし、解が J_0 のような形から $J_{1,2,\dots}$ のような形に移行する遷移的な状態 ($\beta = 2$ における $n = 2$ の場合や $\beta = 10$ における $n = 10, 11$ の場合) では、解の形は複雑に変化する。そのため、関数形によっては、 $n \simeq \beta$ 付近で現れる遷移的なモードが汀線における水位変化に寄与することがある。

このように、本モデルの解 $F_{n,\beta}$ は、高次モード ($n \leq \beta$

程度のモードまで)でも原点で大きな値をとることに特徴がある。したがって、本モデルでは、捕捉による汀線における波高の不均一な分布を求めることが可能になる。

それに対し、水平床を仮定した Longuet-Higgins の解 ($r=0$ で有界な解は J_n) や、 $r_0=0$ とした解 (21) ($r=0$ で有界な解は $\xi^{-1}J_{\sqrt{1+4n^2}}(\xi)$) では、0 次以外のモードにおいて $r=0$ で $R_n \approx 0$ になる。そのため、汀線における不均一な波高分布が得られない。

さらに、図-3.4 から、 $F_{n,\beta}$ が J_0 のような関数形をとるとき ($n \leq \beta$)、 ξ が小さいところ (おおむね $\xi < 0.5\beta$) では、 $F_{n,\beta}$ が n によってあまり変化しないことがわかる。この性質には、島周辺に捕捉された波の挙動を議論する際に触れる。

(4) 水平床上の解と斜面上の解との接続

前節までの理論展開から、同心円状の一樣斜面上における解は以下のように表すことができる。

$$\eta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n F_{n,\beta}(\xi) e^{i(n\theta - \sigma t)} \dots\dots\dots (35)$$

ただし、 A_n は複素定数である。これから、 η の 1 回微分は以下のように計算される。

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\xi} A_n F'_{n,\beta}(\xi) e^{i(n\theta - \sigma t)} \dots\dots\dots (36)$$

ただし、記号' は、 ξ による微分を表す。

一方、水平床上の散乱波の解は、

$$\eta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{C_n J_n(k_1 r) + D_n N_n(k_1 r)\} e^{i(n\theta - \sigma t)} \dots (37)$$

で与えられる。しかも、散乱波が $r \rightarrow \infty$ に進行することを考えれば、 C_n と D_n の組み合わせは、第 1 種ハンケル関数をつくる組み合わせでなければならない。すなわち、

$$\eta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(k_1 r) e^{i(n\theta - \sigma t)} \dots\dots\dots (38)$$

である。 B_n は複素定数である。また、入射波は、振幅を 1 とすると

$$\eta = e^{i(k_1 x - \sigma t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_1 r) e^{i(n\theta - \sigma t)} \dots\dots\dots (39)$$

と書けるので、結局、水平床上の解は、次式となる。

$$\eta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{i^n J_n(k_1 r) + B_n H_n^{(1)}(k_1 r)\} e^{i(n\theta - \sigma t)} \dots (40)$$

この 1 回微分は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_1 \{i^n J'_n(k_1 r) + B_n H_n^{(1)'}(k_1 r)\} e^{i(n\theta - \sigma t)} \dots\dots\dots (41)$$

ここで、記号' は $J_n(z)$ 、 $H_n^{(1)}(z)$ の z による微分を表している。

斜面上の解と水平床上の解を接続するには、 $r = r_1 = r_0 + r_2$ において、 η 、 $\partial \eta / \partial r$ が連続するよう A_n 、 B_n を

定めればよい。すなわち、次の連立 1 次方程式を解くことにより A_n 、 B_n を計算する。

$$\left. \begin{aligned} A_n F_{n,\beta}(2\sqrt{\alpha r_2}) &= i^n J_n(k_1 r_1) + B_n H_n^{(1)}(k_1 r_1) \\ A_n F'_{n,\beta}(2\sqrt{\alpha r_2}) &= i^n J'_n(k_1 r_1) + B_n H_n^{(1)'}(k_1 r_1) \end{aligned} \right\} (42)$$

得られた A_n を式(35)に代入して実数部をとれば、求めるべき解が以下のように得られる。

$$\eta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n| F_{n,\beta}(\xi) \cos(n\theta - \sigma t - \delta_n) \dots\dots\dots (43)$$

ただし、

$$\delta_n = \tan^{-1} \frac{-Im.(A_n)}{Re.(A_n)} \dots\dots\dots (44)$$

である。ここで、 A_n 、 B_n を求める式から、

$$A_n = A_{-n} \dots\dots\dots (45)$$

であることが証明できるので、最終的に、斜面上の解は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \eta &= |A_0| F_{0,\beta}(\xi) \cos(\sigma t + \delta_0) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} 2|A_n| F_{n,\beta}(\xi) \cos(n\theta) \cos(\sigma t + \delta_n) \dots (46) \end{aligned}$$

同様に水平床上の解は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{P_0^2 + Q_0^2} \cos(\sigma t + \epsilon_0) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{P_n^2 + Q_n^2} \cos(n\theta) \cos(\sigma t + \epsilon_n) \dots (47) \end{aligned}$$

ただし、 P_n 、 Q_n 、 ϵ_n は r の関数であり、以下の通りである。

$$P_n = Re.(B_n) J_n(k_1 r) - Im.(B_n) N_n(k_1 r) \dots\dots (48)$$

$$Q_n = Im.(B_n) J_n(k_1 r) + Re.(B_n) N_n(k_1 r) \dots\dots (49)$$

$$\epsilon_n = \tan^{-1} \frac{-Q_n}{P_n} \dots\dots\dots (50)$$

3. 島による捕捉現象の特性

(1) 捕捉条件から見た領域区分

Longuet-Higgins(1967)によれば、水深 h が r のみの関数であるとき、捕捉の起こる条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h}{r^2} \right) \geq 0 \dots\dots\dots (51)$$

この条件を満たすと、ある円に接するように入射してきた波向き線は、円の内側に屈折していく。特に、等号が成り立つ場合には、波向き線はその円上に捕捉され、同じ円周上を回ることになる。

一樣勾配の斜面の場合、島の半径をゼロとした $h = mr$ では、上の捕捉の条件は満たされない。しかし、島の半径を有限とした本モデル $h = m(r - r_0)$ の場合、

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r - r_0}{r^2} \right) = \frac{-r + 2r_0}{r^3} \dots\dots\dots (52)$$

なので、

$$r \leq 2r_0 \text{ では } \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h}{r^2} \right) \geq 0 \dots\dots\dots (53)$$

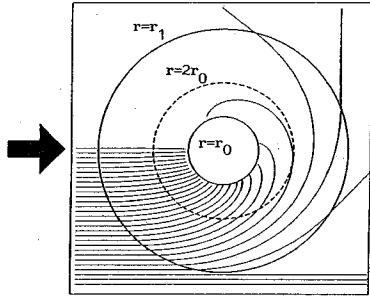


図-5 波向き線のスケッチ

となる。したがって、島が有限の大きさをもってれば、汀線付近では必ず捕捉が生じることになる。

すなわち、屈折の結果 $r = 2r_0$ の円より内側に入ってきた波向き線は最終的に汀線まで達し、 $r = 2r_0$ の円に接するように入射してきた波向き線は、 $r = 2r_0$ の円周上に捕捉される。 $r = 2r_0$ の円内に到達しない波向き線は沖へ向かう。このような状況を図-5 に示す。

以上の議論から、 $r > 2r_0$ の領域は屈折しながら入射してくる波と散乱波が重なりあった領域であり、 $r < 2r_0$ は波が捕捉され、水位変化が重複波的な挙動を示す領域であると考えられる。

(2) 空間水位分布と汀線水位分布

式(46)により計算した空間水位分布の経時変化の例を図-6~図-8 に示す。図-6~図-8 は、それぞれ同じ地形に対して異なる周期の波が入射した場合の水位変化である。図中、実線は正の水位のコンター、点線は負の水位のコンターを示しており、各数字は入射波振幅との比である。また、図-6~図-8 の場合に対応した、汀線の水位分布の経時変化を図-9~図-11 に示す。

図-6,9 は周期が長く、捕捉による波高増幅機構があまり効かない場合である。汀線に沿って波が進行する様子が分かる。また、汀線水位変化は波の入射してくる方向 ($\theta = \pi$) で大きく、島影 ($\theta = 0$) で小さい。この地形の場合、 β が2以下ならこのような水位変化になる。

図-7,10 は、捕捉のため島近傍で波高が大きく増幅した場合である。このとき、波高の高い地域と低い地域が複数箇所、明確に現れていることが分かる。また汀線付近では、前項で推論した通り、波が汀線に沿って進行せず、重複波的に振る舞っている。島固有の捕捉周期と入射した波の周期が近いと、このように入射波が大きく増幅され、重複波的な挙動を示すと考えられる。

図-8,11 は、周期が短い場合である。周期11分の場合ほどではないが波高は増幅されており、散乱波による縞模様が多数見られる。

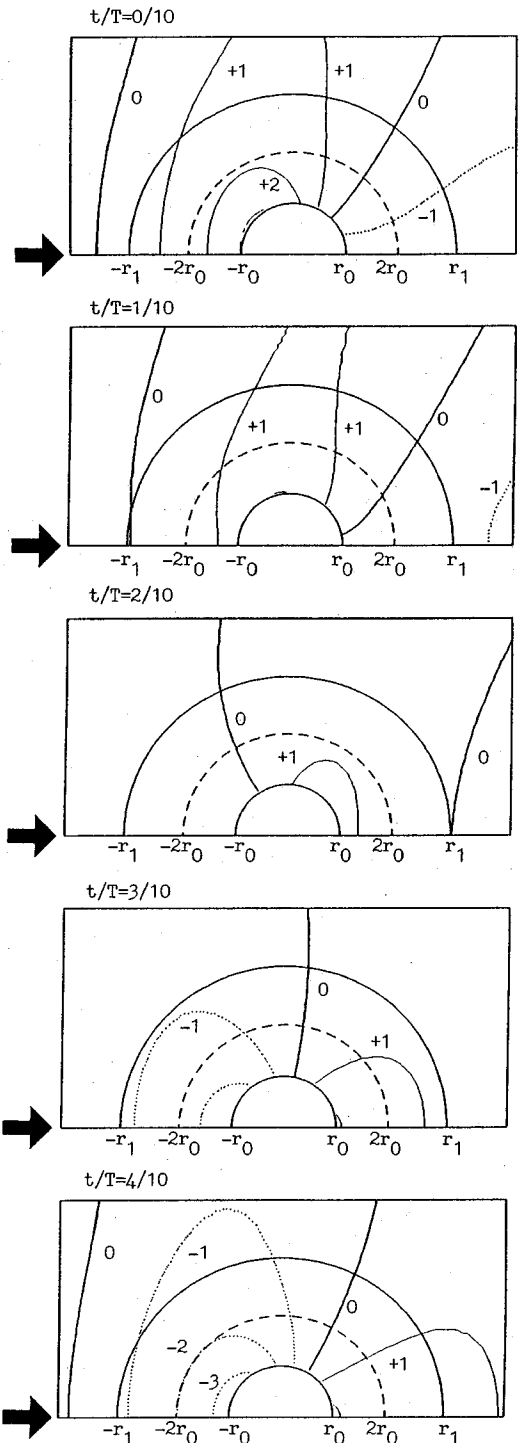


図-6 空間水位分布の経時変化(1) ($r_0 = 7\text{km}$, $r_2 = 15\text{km}$, $m = 1/50$, $T = 25\text{min}$, $\beta = 1.6$)

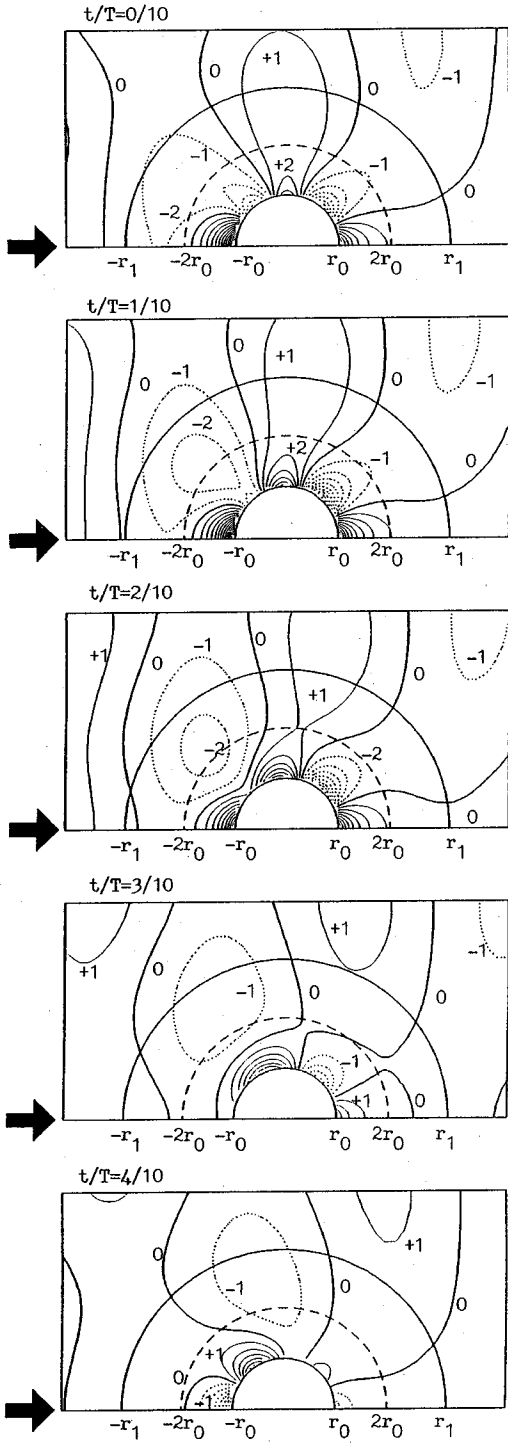


図-7 空間水位分布の経時変化 (2) ($r_0 = 7\text{km}$, $r_2 = 15\text{km}$, $m = 1/50$, $T = 11\text{min}$, $\beta = 3.6$)

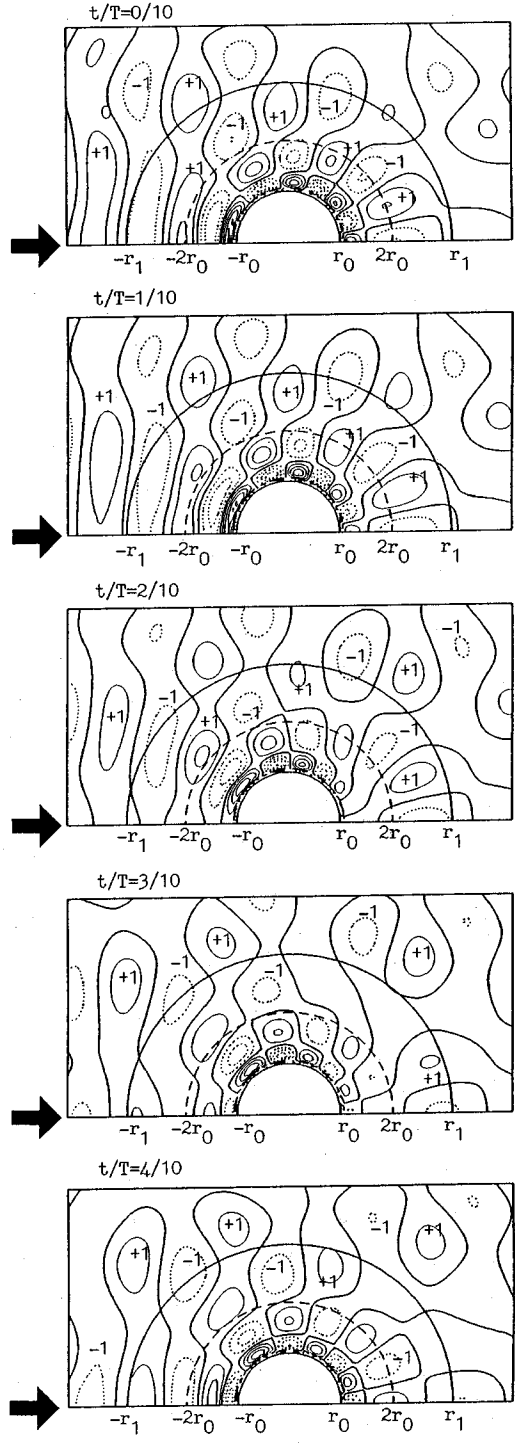


図-8 空間水位分布の経時変化 (3) ($r_0 = 7\text{km}$, $r_2 = 15\text{km}$, $m = 1/50$, $T = 4\text{min}$, $\beta = 9.9$)

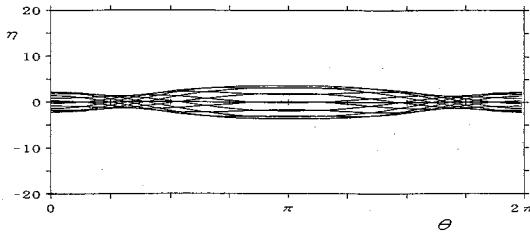


図-9 汀線水位分布の経時変化(1) ($r_0 = 7\text{km}$, $r_2 = 15\text{km}$, $m = 1/50$, $T = 25\text{min}$, $\beta = 1.6$)

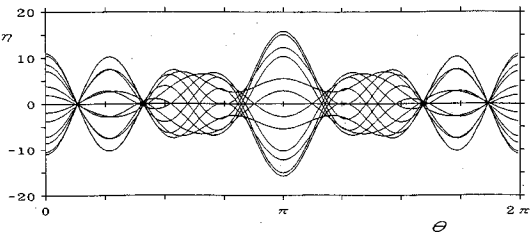


図-10 汀線水位分布の経時変化(2) ($r_0 = 7\text{km}$, $r_2 = 15\text{km}$, $m = 1/50$, $T = 11\text{min}$, $\beta = 3.6$)

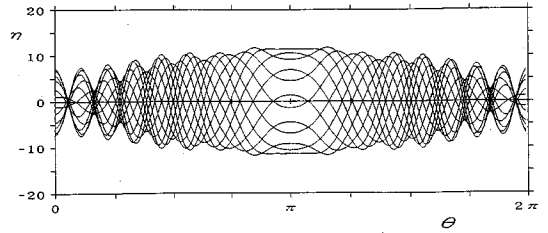


図-11 汀線水位分布の経時変化(3) ($r_0 = 7\text{km}$, $r_2 = 15\text{km}$, $m = 1/50$, $T = 4\text{min}$, $\beta = 9.9$)

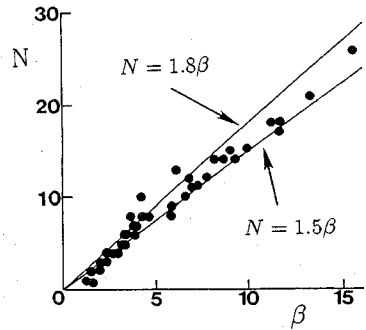


図-12 波高が高くなる場所の数 N

(3) 島近傍における現象

ここでは、島の周囲に波高の高くなる地域が何箇所できるか考察する。まず、島の近くにおける波峰線の性質を議論しておく。波峰線の位置は、ある ξ と t を与えて、

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_c} = - \sum_{n=1}^{\infty} 2n |A_n| F_{n,\beta}(\xi) \sin(n\theta_c) \cos(\sigma t + \delta_n) = 0 \dots\dots\dots (54)$$

を満たす θ_c を求めることにより決められる。

汀線付近では、多くの場合、 $n \leq \beta$ のモードだけが有意であり、しかもその場合、 $\xi < 0.5\beta$ では $F_{n,\beta}$ は n によって値がそれ程変化しない。したがって、上式を解くことは、実質的に次式を解くことと同じである。

$$\sum_{n=1}^{[\beta]} n |A_n| \sin(n\theta_c) \cos(\sigma t + \delta_n) = 0 \dots\dots\dots (55)$$

したがって、汀線の近くでは、波の峰をあらわす θ_c は ξ に依らない。すなわち、波峰線は汀線から $\xi < 0.5\beta$ の範囲では放射線状になる。

さて、 $r = 2r_0$ 上に捕捉される波の波長 L は

$$L = cT = \sqrt{gm(2r_0 - r_0)}T = \sqrt{gmr_0}T \dots\dots\dots (56)$$

で表される。したがって、 $r = 2r_0$ 上の波数は、

$$\frac{4\pi r_0}{L} = \frac{4\pi r_0}{\sqrt{gmr_0}T} = \beta \dots\dots\dots (57)$$

になる。実際には散乱波の成分も存在するので、 $r = 2r_0$ 上の波数が厳密に β であるとは言えないが、オーダー的にはほぼ β 程度であり、 β で特性づけられると考えられる。そして、波峰線は島付近では放射線状であるから、汀線における波数も β 程度であろう。

あるモードの波だけ考えれば、波数1に対し2つの(打ち上げ高の)ピークが現れる。したがって、結局、波高

が高くなる場所数 N も、おおまかには β によって特性づけられると考えてよいであろう。

実際に m, r_0, r_2, T を変化させて N を数え、 β に対してプロットした結果が図-12である。図から、平均的に

$$N = (1.5 \sim 1.8)\beta \dots\dots\dots (58)$$

がよい近似であることがわかる。

(4) 周期による汀線最大水位の変化

すでに述べたように、島の形状によって捕捉に関する固有周期のようなものがあり、入射波の周期と捕捉周期が一致すると入射波は著しく増幅されると考えられる。そこで、そのような捕捉の周波数特性を調べるため、 m, r_0, r_2 を一定として入射波の周期を2分から30分まで変化させ、汀線における水位の最大値 $R_{H\max}$ を求める。 $R_{H\max}$ は、 $r = r_0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq t < T$ での η の最大値を意味する。実際に $R_{H\max}$ を求め、 $\beta (\propto 1/T)$ に対してプロットした図が図-13である。

共振の条件は r_2 にも依るので、 r_2 の入っていないパラメタ β だけでは厳密な議論ができないが、図から、 $\beta = 3 \sim 6$ 付近と $\beta = 8 \sim 12$ 付近は、複数の共振周波数の密集した周波数帯であると言える。また、 r_2 が大きくなるほど、ピークが現れる周波数帯の β が小さくなる傾向が見られる。

(5) 1次元伝播における打ち上げ高との比較

ここでは、1次元伝播問題における一様斜面による打ち上げ高と比較することにより、どのような場合に、捕捉の影響が強く現れるか考察する。一様勾配斜面による

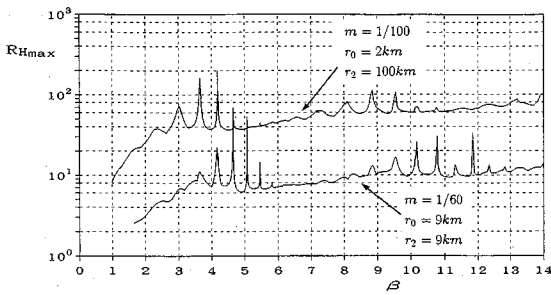


図-13 打ち上げ高の周波数特性

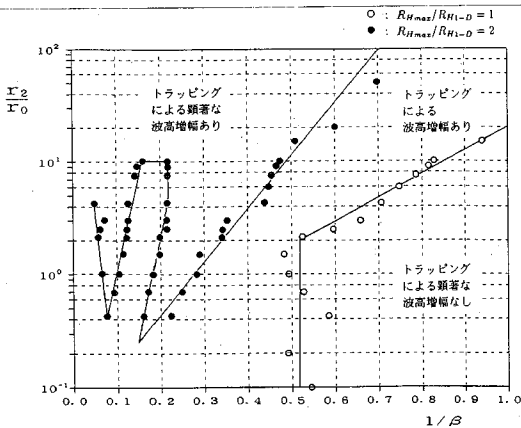


図-14 島による捕捉と1次元伝播の打ち上げ高の比較

打ち上げ高 R_{H1-D} は、次式で表される (Shuto, 1972).

$$R_{H1-D} = \frac{2}{\sqrt{J_0(2\sqrt{\alpha}r_2)^2 + J_1(2\sqrt{\alpha}r_2)^2}} \dots (59)$$

図-14 に、 $R_{Hmax}/R_{H1-D} = 1, 2$ の位置をプロットしている。ただし、島の場合は複数の共振周波数が存在するので、 R_{Hmax}/R_{H1-D} のコンターは非常に複雑な形状になる。そこで、ピークが密集した共振周波数帯では、入り組んだコンターを包含する点をプロットしてある。図中の折れ線は、プロットされた点から描いた、捕捉特性を表す領域区分である。周期が長く ($1/\beta$ が大きく)、 r_2/r_0 が小さければ捕捉による顕著な波高増幅はない。反対に、黒丸で囲まれた領域では同一条件下で1次元問題の2倍以上の打ち上げが生じる可能性がある。

4. 津波痕跡値との比較

(1) 隠岐における日本海中部地震津波

本理論の応用例として、日本海中部地震津波で隠岐(島後)で実測された打ち上げ高との比較を試みる。

隠岐島後の海岸線の形は円形に近く、半径 $r_0 = 9\text{km}$ 程度である(図-15中の地図参照)。海底勾配は方向によって異なるが、海図をもとに隠岐付近の水深分布を直線近似し、 $m = 1/60$ とする。また、 $r_2 = 9\text{km}$ とする。周期は、検潮記録から6~7分程度と言われているので、

6分とした。すなわち、 β は8.2程度である。汀線における最大水位 R_H の分布を描いた図が図-15である。図中の丸印は打ち上げ高の実測値である。ただし、入射方向は、酒井ら(1984)の検討結果から中村の方向とした。入射波振幅は、理論値と痕跡高が平均的に一致するよう、0.3mとした。

理論解は打ち上げ高の分布の傾向をよく表しており、日本海中部地震津波における隠岐での打ち上げ高は、島による捕捉によりほぼ説明できると言える。また、本理論は長波近似なので、周期が短く β が大きいと精度が悪くなると考えられるが、ここで適用した $\beta = 8$ 程度なら十分実用に供し得ると言える。

なお、上記の諸元を図-14に当てはめると、隠岐における日本海中部地震津波を表す点は、 $1/\beta = 0.12$ 、 $r_2/r_0 = 1$ となり、2つの共振周波数帯に挟まれた位置にある。また、1次元問題の場合に比べ、増幅率が2倍近いことが分かる。

(2) 奥尻島における北海道南西沖地震津波

次に奥尻島で実測された北海道南西沖地震津波の打ち上げ高との比較を試みる。隠岐が本理論のモデル地形と比較的類似しているのに比べ、奥尻島周辺の地形は複雑で、本理論で仮定した単純な地形では近似することが難しい。しかし、平均的な値として、 $m = 0.075$ 、 $r_0 = 8\text{km}$ 、 $r_2 = 20\text{km}$ を与える。周期は8分とする。 β は2.7である。また、津波来襲方向が必ずしも明らかでないので、ここでは神威脇から青苗岬にかけての海岸で、痕跡高が10m以上の地域の中心点を取り、入射方向とした。入射波振幅は、理論値と痕跡高が平均的に一致するよう、1.3mとした。このようにして汀線における最大水位分布を求めた結果が図-16である。

理論解は、藻内付近から初松前までの地域を除けば、打ち上げ高の全体的な傾向をよく表している。すなわち、本理論は複雑な地形においても、島をめぐる打ち上げ高の傾向をかなり再現できると言える。藻内付近と初松前で大きな打ち上げ高がでてきている原因は、入射波形あるいは複雑な地形条件の影響が考えられる。

また、図-14に当てはめると、 $1/\beta = 0.37$ 、 $r_2/r_0 = 2.5$ なので、日本海中部地震津波における隠岐の場合と同様、増幅率は1次元伝播の2倍近いことが分かる。

5. 結論

斜面の効果と島の有限な大きさを考慮し、円錐形の島による長周期波の捕捉理論の解を求めた。そして理論解に基づき、島による長波の捕捉の特性を調べた。さらに現地地形に適用し津波の打ち上げ高の観測値との比較を行なった。その結果、以下の結論を得た。

1. 島の大きさに比べて波長が長いときには捕捉の影響は顕著に現れず、波は汀線に沿って進行する。

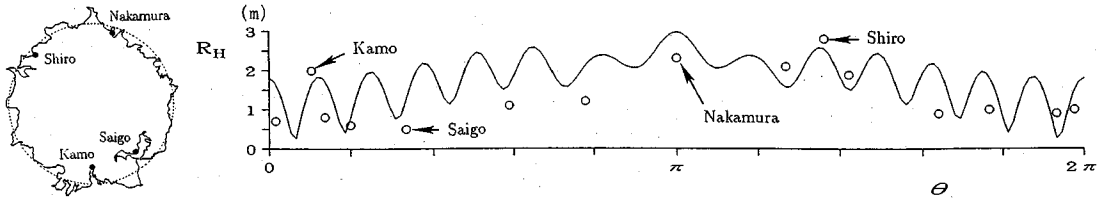


図-15 隠岐(島後)における打ち上げ高分布 ($m = 1/60$, $r_0 = 9\text{km}$, $r_2 = 9\text{km}$, $T = 360\text{s}$)

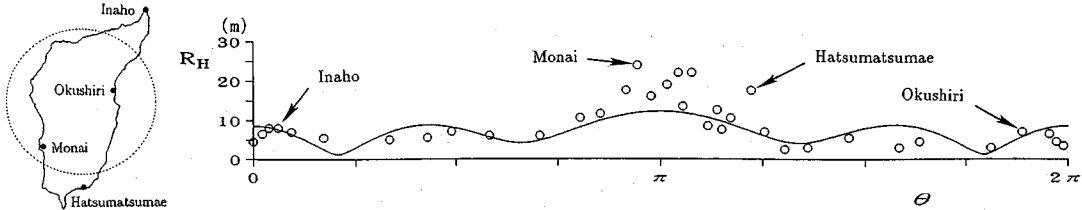


図-16 奥尻島における打ち上げ高分布 ($m = 0.075$, $r_0 = 8\text{km}$, $r_2 = 20\text{km}$, $T = 480\text{s}$)

2. 捕捉の影響が現れると、汀線に沿って遡上高の高い場所と低い場所が複数箇所現れる。また汀線付近で波は重複的な挙動を示す。これは、 $r < 2r_0$ の範囲において必ず波が捕捉されることに関係している。
3. 汀線に沿って遡上高が高くなる箇所は $(1.5 \sim 1.8)\beta$ 程度である。
4. 島の形状によって、捕捉に関する固有周期があり、特定の条件下で波高が著しく増幅される。1次元伝播問題における一様勾配斜面による打ち上げ高との比較により、捕捉の影響が強く現れる条件を示した。
5. 隠岐における日本海中部地震津波の打ち上げ高は、本理論によってほぼ説明される。また、奥尻島における北海道南西沖地震津波の打ち上げ高は、藻内付近と初松前を除けば本理論でほぼ説明できる。藻内付近と初松前の打ち上げ高を説明するためには、本理論で考慮していない局所地形の影響などを考慮しなければならない。
- 2) 酒井哲郎・石突寿啓：島周辺における津波の挙動(日本海中部地震津波調査)，第32回海岸工学講演会論文集，pp.242-246，1984。
- 3) 田中清：円形島による波浪の回折，第2回海岸工学講演会論文集，pp.33-35，1956。
- 4) 清川哲志・小林浩・日野幹雄：軸対称構造物による波の散乱と波力，土木学会論文報告集第321号，pp.103-112，1982。
- 5) Longuet-Higgins, M.S.: On the trapping of wave energy round islands, J.Fluid Mech., Vol.29, part 4, pp.781-821, 1967.
- 6) Summerfield, W.: Circular islands as resonators of long-wave energy, Phil.Trans.Roy.Soc.London, pp.361-402, 1972.
- 7) Wong, K.K., Ippen, A.T. and Harleman, D.R.F.: Interaction of tsunamis with oceanic islands and submarine topographies, M.I.T. Tech.Hydro.Lab. Rep.No.62, 86p., 1963.
- 8) Lautenbacher, C.C.: Gravity wave refraction by islands, J.Fluid Mech., vol.41, part 3, pp.655-672, 1970.
- 9) Jonsson, I.G., Skovgaard, O. and Brink-Kjaer, O.: Diffraction and refraction calculations from waves incident on an island, J. Marine Research, Vol.34, No.3, 1976.
- 10) Shuto, N.: Standing Waves in Front of a Sloping Dike, Coastal Engineering in Japan, Vol.15, 1972.

参考文献

- 1) 首藤伸夫：北海道南西沖地震に伴う津波とその教訓，土木学会誌，第78巻，第9号，pp.2-17，1993。

(1994. 1. 19 受付)

CHARACTERISTICS OF LONG WAVES TRAPPED BY CONICAL ISLANDS

Koji FUJIMA and Chiaki GOTO

When tsunami attacks islands, there are some cases to damage the islands heavily by the trapping phenomena. Thus, a theoretical solution on the trapping of long waves by conical islands is obtained, which considers the effects of both infinite radius of islands and refraction by sloping beach. Characteristics on variation of spacial distribution of water elevation, characteristics on variation of runup height around coastal line, and characteristics on frequency response of maximum runup height are examined through the theoretical solution, then the condition in which the influence of trap is strongly appeared is demonstrated. The heights of tsunami traces in Oki-island and Okushiri-island can be explained satisfactorily by the present theory.