

投稿論文 (和文)
PAPERS

時間予測降雨・流量および貯水量の 条件付き確率分布関係の誘導とその検証

國方美規義*・端野道夫**

期待値計算法を用いて、雨量の変動特性が与えられた場合の流量および貯水量の n 時間先での条件付き確率分布を、雨量の時系列相関、雨量と流量および流量と貯水量との相互相関、またダムでの洪水調節（本則操作、但し書き操作）を考慮して、誘導した。また、提案理論の実洪水への適用に際しては一般性を保持するために、与えられた予測精度に対する予測雨量の確率分布形を設定できるモデルを新たに開発した。

Key Words : flood control, conditional-probability-forecast of runoff and water storage

1. まえがき

洪水時のダム操作は、『操作規則』、『操作細則』および『実施要領』等により、細かく定められており、これを遵守して行われる。これらの諸規則には、気象・水象に関する資料の収集による現況の把握、この資料を用いて将来の気象・水象状況の予測計算の実施、ダム操作のために事前の関係各機関への通知・通報、そしてダム操作と一連の作業が定められている。これらの作業は定められた時間内に限られた人数で的確に行わなければならないことから、ダム操作支援のための種々のシステム開発が必要となる。そのなかでも特にダム流入量の予測法については、システム操作が洪水時という非常事態であることから、オペレーターに計算上での高度の知識を要する判断は避け、短時間で計算できる精度の高い実用的手法とすべきである。そのため支援システムとしては、長いリードタイムを持つ流入量予測法の開発、つまり流入量予測に対応する降雨予測法の開発が必要となる。

そこで、著者らは、現場での使用を念頭に置いた『実用的降雨予測法』と降雨予測結果を受けた『流量と貯水量の実用的推定法』の開発を行ってきた。

前者の『実用的降雨予測法』は、洪水調節での使用を念頭に置き、リードタイムを長くとれ、あたりはずれの少ない降雨予測法の開発を目指すことから、雨量の傾向予測に着目し、GMS (Geostationary Meteorological Satellite) の赤外画像の輝度値と AMeDAS (Automated Meteorological Data Acquisition System) の時間雨量データを用いた重回帰モデルにより豪雨の1日先までのハイトグラフを予測しようとしたものである^{1),2)}。

* 正会員 博(工) 四電技術コンサルタント 土木第2部
(〒761-01 高松市屋島西町 2109-8)

** 正会員 工博 徳島大学教授 工学部建設工学科

本論文では、後者の『流量と貯水量の実用的推定法』として開発した雨量、流量および貯水量の確率分布関係の推定法^{3),4)}をそれらの自己および相互相関を考慮し改善したものである。まず雨量と流量の非線形関係を差分近似のもとに線形化し、この関係を用いた期待値計算により、雨量の変動特性が与えられた場合の流量および貯水量の条件付き期待値、分散および歪係数を理論的に誘導する。そして、この3つの積率を用いて流量および貯水量の確率分布形を推定しようとするものである。

また、この推定法の検証のため、降雨予測精度をパラメータとした降雨波形の設定方法である降雨予測精度に関する一般モデルを開発し、これを用いて検証を行うことにより検証の一般性を保持した。

2. 条件付き時間雨量、流量および貯水量の確率分布の理論的誘導

(1) 時間雨量 x の確率分布と相関係数

時間雨量は、3母数ガンマ分布をなすと考える。そのとき、現時点 t_0 までの資料が与えられた場合 (Ω) の t_0 から i 時間先の時点 ($t_i = t_0 + i\Delta t$, $i=1, 2, 3, \dots, n$) での条件付き期待値 $E[x_i|\Omega]$ まわりの時間雨量 x_i の分散 $V_L[x_i|\Omega]$ および歪係数 $C_L[x_i|\Omega]$ を以下のように定義する。

$$V_L[x_i|\Omega] = E\{[x_i - E[x_i|\Omega]]^2|\Omega\}$$

$$C_L[x_i|\Omega] = E\{[x_i - E[x_i|\Omega]]^3|\Omega\} / V_L[x_i|\Omega]^{3/2}$$

$$\dots\dots\dots (1)$$

ここで、本論文では、洪水調節への影響が大きい台風・低気圧等を想定するが、これらは1000 km程度の空間スケールを持つ中間規模擾乱であり半日程度の時間スケールを持つ⁵⁾ことから、時間雨量の期待値 $E[x_i|\Omega]$ を11時間移動平均雨量で近似する。式(1)で与えられる分散と歪係数は、通常用いられる母集団平均値 m まわりの分散と歪係数とは異なることに注意されたい

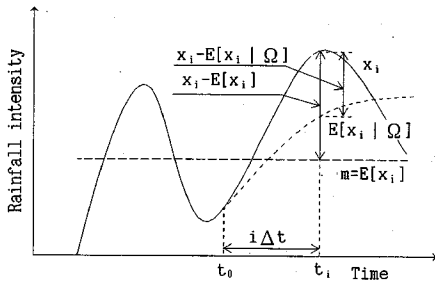


Fig.1 Schematic definition of x_i , $E[x_i|\Omega]$ and m .

(Fig.1 参照). これらの時間雨量に関する条件付き期待値 $E[x_i|\Omega]$, 分散 $V_L[x_i|\Omega]$ および歪係数 $C_L[x_i|\Omega]$ は, 後述の 3. (1) で示す降雨予測精度に関する一般モデルで与えるものとする.

また, ラグタイム j 時間の雨量の自己相関係数 r_{Lj} は, 期待値 $E[x_i|\Omega]$ まわりで考え, 次式で定義する.

$$r_{Lj} = R11/R12 \dots \dots \dots (2)$$

$$R11 = E[(x_i - E[x_i|\Omega])(x_{i+j} - E[x_{i+j}|\Omega])|\Omega]$$

$$R12 = \sqrt{E[(x_i - E[x_i|\Omega])^2|\Omega]} \cdot \sqrt{E[(x_{i+j} - E[x_{i+j}|\Omega])^2|\Omega]}$$

(2) 流量 q の確率分布

雨量と流量との関係は貯留関数法により記述する. 雨量と流量の関係は, k, p をパラメータ, x を時間雨量 (mm/hr), q を流出高 (mm/hr), f を流出率そして s を貯留高 (mm/hr) とすれば, 次式で示される.

$$ds/dt = fx - q \dots \dots \dots (3)$$

$$s = kq^p \dots \dots \dots (4)$$

式 (4) を式 (3) に代入することにより次式を得る.

$$ds/dt = kpq^{p-1}dq/dt = fx - q \dots \dots \dots (5)$$

ここで, 現時点 t_0 から i 時間先の時点 ($t_i = t_0 + i\Delta t, i = 1, 2, 3, \dots, n$) での流量 q_i について線形になるように

$$dq/dt = (q_i - q_{i-1})/\Delta t, \quad q = (q_i + q_{i-1})/2$$

$$q^{p-1} = q_{i-1}^{p-1}, \quad x = x_i \dots \dots \dots (6)$$

とおき, 差分化すると式 (5) はつぎのように表される.

$$kpq_{i-1}^{p-1}(q_i - q_{i-1})/\Delta t = fx_i - (q_i + q_{i-1})/2 \dots \dots \dots (7)$$

よって, 時点 t_i の流量 q_i で整理すると, 次式を得る.

$$q_i = f\phi_{i-1}x_i + (1 - \phi_{i-1})q_{i-1} \dots \dots \dots (8)$$

ここに,

$$\phi_{i-1} = 1/(kpq_{i-1}^{p-1}/\Delta t + 0.5) \dots \dots \dots (9)$$

ここで, 式 (9) に級数展開を施し, 第 3 項まで採用すると, 次式となる.

$$\phi_{i-1} \approx \kappa q_{i-1}^{(1-p)} - q_{i-1}^{2(1-p)}\kappa^2/2 + q_{i-1}^{3(1-p)}\kappa^3/4$$

$$(\kappa \equiv \Delta t/(kp)) \dots \dots \dots (10)$$

ところで, 上式で定義される流量の関数値 ϕ_{i-1} ($i \geq 1$) を計算する時に用いる q_{i-1} は, 式 (8) で i を $i-1$ と

して計算される時間雨量 x_{i-1} に対する q_{i-1} 値を用いる. すなわち, 時間雨量の期待値 $E[x_{i-1}|\Omega]$ から計算されるものでないことに注意されたい.

つぎに, 式 (8) の両辺の 1 ~ 3 次の積率から条件付き期待値, 分散および歪係数を求める.

まず流量の期待値は, 式 (8) より,

$$E[q_i|\Omega] = fE[\phi_{i-1}x_i|\Omega] + E[q_{i-1}|\Omega] - E[\phi_{i-1}q_{i-1}|\Omega] \dots \dots \dots (11)$$

である. ここで, 簡単のため, ϕ_{i-1} と x_i , ϕ_{i-1} と q_{i-1} を無相関と近似し, また $E[\phi_{i-1}|\Omega] \approx \phi_{i-1}$ と仮定すると, 流量の期待値は次式で与えられる.

$$E[q_i|\Omega] = f\phi_{i-1}E[x_i|\Omega] + (1 - \phi_{i-1})E[q_{i-1}|\Omega] \dots \dots \dots (12)$$

流量の分散を求めるため, $E[q_i^2|\Omega]$ を用意する.

$$E[q_i^2|\Omega] = (f\phi_{i-1})^2E[x_i^2|\Omega] + (1 - \phi_{i-1})^2E[q_{i-1}^2|\Omega] + 2f\phi_{i-1}(1 - \phi_{i-1})E[x_iq_{i-1}|\Omega] \dots \dots \dots (13)$$

よって, 流量の分散は, 次式で示される.

$$V[q_i|\Omega] \equiv E[(q_i - E[q_i|\Omega])^2|\Omega] = E[q_i^2|\Omega] - E[q_i|\Omega]^2 = (f\phi_{i-1})^2V_L[x_i|\Omega] + (1 - \phi_{i-1})^2V[q_{i-1}|\Omega] + 2f\phi_{i-1}(1 - \phi_{i-1})Cov(x_i, q_{i-1}) \dots \dots \dots (14)$$

流量の歪係数を求めるために, $E[q_i^3|\Omega]$ を用意する.

$$E[q_i^3|\Omega] = (f\phi_{i-1})^3E[x_i^3|\Omega] + (1 - \phi_{i-1})^3E[q_{i-1}^3|\Omega] + (3f\phi_{i-1})^2(1 - \phi_{i-1})E[x_i^2q_{i-1}|\Omega] + 3f\phi_{i-1}(1 - \phi_{i-1})^2E[x_iq_{i-1}^2|\Omega] \dots \dots \dots (15)$$

よって, 流量の歪係数は次式で示される.

$$C[q_i|\Omega]V[q_i|\Omega]^{3/2} \equiv E[(q_i - E[q_i|\Omega])^3|\Omega] = E[q_i^3|\Omega] - 3E[q_i|\Omega]E[q_i^2|\Omega] + 2E[q_i|\Omega]^3 = (f\phi_{i-1})^3C_L[x_i|\Omega]V_L[x_i|\Omega]^{3/2} + (1 - \phi_{i-1})^3C[q_{i-1}|\Omega]V[q_{i-1}|\Omega]^{3/2} - 6f\phi_{i-1}(1 - \phi_{i-1})E[q_i|\Omega]Cov(x_i, q_{i-1}) + 3f\phi_{i-1}(1 - \phi_{i-1})\{f\phi_{i-1}Cov(x_i^2, q_{i-1}) + (1 - \phi_{i-1})Cov(x_i, q_{i-1}^2)\} \dots \dots \dots (16)$$

ここで, x_i^2 と q_{i-1} , x_i と q_{i-1}^2 は無相関と近似し, $Cov(x_i^2, q_{i-1})$ と $Cov(x_i, q_{i-1}^2)$ を零とおく. また予測での安全性を配慮し, 負値である第 3 項は除いて考える. よって, 流量の歪係数算定式 (16) は, 次式となる.

$$C[q_i|\Omega]V[q_i|\Omega]^{3/2} \approx (f\phi_{i-1})^3C_L[x_i|\Omega]V_L[x_i|\Omega]^{3/2} + (1 - \phi_{i-1})^3C[q_{i-1}|\Omega]V[q_{i-1}|\Omega]^{3/2} \dots \dots \dots (17)$$

ここに, 流量の分散の計算式 (14) 中の雨量と流量の共分散は, つぎに示す漸化式により求める.

$$Cov(x_i, q_{i-1}) = \Phi_{i,i-1}V_L[x_i|\Omega] \dots \dots \dots (18)$$

$$\Phi_{i,i-1} = f\phi_{i-2}r_{L1} + (1-\phi_{i-2})\Phi_{i,i-2} \quad (i=2,3,\dots)$$

$$\Phi_{j,0} = 0 \quad (j=1,2,\dots,i)$$

ここに、 r_{L1} は、式 (2) で $j=1$ としたものである。

式 (12), (14) および (17) の積率計算の初期条件は、次式で与える。

$$E[q_i|\Omega] = fE[x_i|\Omega]\phi_0 + q_0(1-\phi_0),$$

$$V[q_i|\Omega] = (f\phi_0)^2 V_L[x_i|\Omega],$$

$$C[q_i|\Omega] = C_L[x_i|\Omega] \dots\dots\dots (19)$$

時点 t_i での流量の予測値 \hat{q}_i の条件付き確率分布は、以上に得られた期待値、分散および歪係数を持つ 3 母数ガンマ分布で近似する。

以上の式展開における雨量・流量間の遅滞時間を考慮するには、雨量 x または算出した流出量 q の時間ずらしにより対処し得る。

(3) 貯水量 S の確率分布

流入量 q (mm/hr), 貯水量 S (mm) および放流量 D (mm/hr) との関係式 (連続式) は、次式で示される。

$$dS/dt = q - D \dots\dots\dots (20)$$

また、この放流量 D は、次式のように流入量 q および貯水量 S によって決定されるとする。

$$D = \theta_q q + \theta_s S + D_0 \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 D_0 は定数、係数 θ_q , θ_s は時間間隔 Δt について一定と考える。すなわち、式 (21) は、いわばダム の操作規則と言えるものであり、ダムの操作規則に従い、時々刻々のダム流入量 q , 貯水量 S に対応した θ_q , θ_s および D_0 の値を設定することができる。

式 (21) を式 (20) に代入し、現時点 t_0 から i 時間先の時点 ($t_i = t_0 + i\Delta t$, $i=1, 2, 3, \dots, n$) で差分化すると、

$$S_i = \Delta t \cdot (1-\theta_{qi})/2 \cdot q_i + \Delta t \cdot (1-\theta_{qi})/2 \cdot q_{i-1}$$

$$+ (1-\theta_{si}\Delta t) S_{i-1} + D_0 \Delta t$$

$$= a_i q_i + b_i q_{i-1} + c_i S_{i-1} + D_0 \Delta t \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 a_i , b_i , c_i は、時点 t_i のパラメータであり、次式で定義する。

$$a_i = \Delta t \cdot (1-\theta_{qi})/2, \quad b_i = \Delta t \cdot (1-\theta_{qi})/2,$$

$$c_i = 1-\theta_{si}\Delta t \dots\dots\dots (23)$$

流量の条件付き期待値、分散、歪係数を導いたのと同様に、貯水量の条件付き期待値、分散、歪係数に関する次式を得る。

$$E[S_i|\Omega] = a_i E[q_i|\Omega] + b_i E[q_{i-1}|\Omega] + c_i E[S_{i-1}|\Omega]$$

$$+ D_0 \Delta t \dots\dots\dots (24)$$

$$V[S_i|\Omega] = E[(S_i - E[S_i|\Omega])^2|\Omega]$$

$$= a_i^2 V[q_i|\Omega] + b_i^2 V[q_{i-1}|\Omega] + c_i^2 V[S_{i-1}|\Omega]$$

$$+ 2a_i b_i Cov(q_i, q_{i-1}) + 2b_i c_i Cov(q_{i-1}, S_{i-1})$$

$$+ 2c_i a_i Cov(S_{i-1}, q_i) \dots\dots\dots (25)$$

$$C[S_i|\Omega] V[S_i|\Omega]^{3/2} = E[(S_i - E[S_i|\Omega])^3|\Omega]$$

$$= a_i^3 C[q_i|\Omega] V[q_i|\Omega]^{3/2}$$

$$+ b_i^3 C[q_{i-1}|\Omega] V[q_{i-1}|\Omega]^{3/2}$$

$$+ c_i^3 C[S_{i-1}|\Omega] V[S_{i-1}|\Omega]^{3/2}$$

$$- 6\{a_i b_i Cov(q_i, q_{i-1}) + b_i c_i Cov(q_{i-1}, S_{i-1})$$

$$+ c_i a_i Cov(S_{i-1}, q_i)\}$$

$$\cdot \{a_i E[q_i|\Omega] + b_i E[q_{i-1}|\Omega] + c_i E[S_{i-1}|\Omega]\}$$

$$+ 3a_i b_i \{a_i Cov(q_i^2, q_{i-1}) + b_i Cov(q_i, q_{i-1}^2)\}$$

$$+ 3b_i c_i \{b_i Cov(q_{i-1}^2, S_{i-1}) + c_i Cov(q_{i-1}, S_{i-1}^2)\}$$

$$+ 3c_i a_i \{c_i Cov(S_{i-1}^2, q_i) + a_i Cov(S_{i-1}, q_i^2)\}$$

$$+ 6a_i b_i c_i Cov(q_i, q_{i-1}, S_{i-1}) \dots\dots\dots (26)$$

ここで、上式中の共分散のうち 2 乗と 1 乗に関するものおよび 3 変数のものは近似的に零と置く。また、予測の安全性を配慮し、負値の項は除いて考える。よって、貯水量の歪係数算定式 (26) は、次式となる。

$$C[S_i|\Omega] V[S_i|\Omega]^{3/2} = a_i^3 C[q_i|\Omega] V[q_i|\Omega]^{3/2}$$

$$+ b_i^3 C[q_{i-1}|\Omega] V[q_{i-1}|\Omega]^{3/2}$$

$$+ c_i^3 C[S_{i-1}|\Omega] V[S_{i-1}|\Omega]^{3/2} \dots\dots\dots (27)$$

貯水量の分散の計算式 (25) 中の流量と貯水量の共分散は、つぎに示す漸化式により求める。

$$Cov(q_i, S_i) = a_i V[q_i|\Omega] + b_i Cov(q_i, q_{i-1})$$

$$+ c_i Cov(q_i, S_{i-1}),$$

$$Cov(q_i, S_{i-1}) = a_{i-1} Cov(q_i, q_{i-1})$$

$$+ (b_{i-1} + a_{i-2} c_{i-1}) Cov(q_i, q_{i-2}) + \dots$$

$$+ \left(\prod_{j=3}^{i-1} C_j\right) \cdot (b_2 + a_1 c_2) Cov(q_i, q_1),$$

$$Cov(q_i, S_0) = 0,$$

$$Cov(q_i, q_{i-j}) = f\phi_{i-1} \{Cov(x_i, q_{i-j})$$

$$+ E[x_i|\Omega] E[q_{i-j}|\Omega]\} + (1-\phi_{i-1})$$

$$\cdot \{Cov(q_{i-1}, q_{i-j}) + E[q_{i-1}|\Omega] E[q_{i-j}|\Omega]\}$$

$$- E[q_i|\Omega] E[q_{i-j}|\Omega] \quad (j=1, 2, 3, \dots, i-1),$$

$$Cov(q_i, q_0) = 0,$$

$$Cov(x_i, q_{i-j}) = \Phi_{i,i-j} V_L[x_i|\Omega] \dots\dots\dots (28)$$

$$\Phi_{i,i-j} = f\phi_{i-j-1} r_{Lj}$$

$$+ (1-\phi_{i-j-1}) \Phi_{i,i-j-1} \quad (i=2, 3, \dots)$$

$$\Phi_{j,0} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, i)$$

式 (24), (25) および (27) の積率計算の初期条件は、次式で与える。

$$E[S_1|\Omega] = a_1 E[q_1|\Omega] + b_1 q_0 + c_1 S_0 + d_1 D_0 \Delta t,$$

$$V[S_1|\Omega] = a_1^2 V[q_1|\Omega], \quad C[S_1|\Omega] = C[q_1|\Omega] \dots\dots (29)$$

時点 t_i での貯水量の予測値 \hat{S}_i の確率分布は、以上に得られた期待値、分散および歪係数を持つ 3 母数ガンマ分布で近似する。

この確率分布関係モデルを、以下『雨量・流量・貯水量の確率分布関係モデル』と呼ぶこととする。

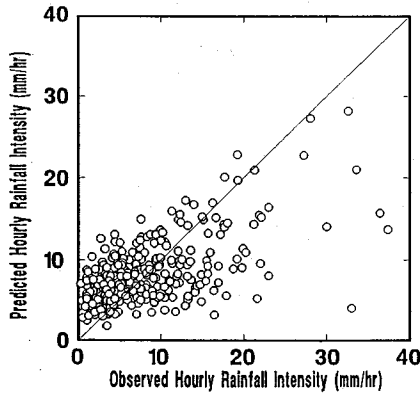


Fig.2 Relationship between actual value and forecasted value. The forecasted values are calculated 3-hour ahead by GMS and AMeDAS data.

3. 検証に用いる降雨予測精度のモデル

2. で示した『雨量・流量・貯水量の確率分布関係モデル』の検証に用いる降雨モデルは、特定の予測精度を持つ具体的な降雨予測モデルとせず、降雨予測精度をパラメータとして議論し得るように、与えられた予測精度に対する予測雨量の分布形（期待値、分散、歪係数）を設定できるモデルを考える。この降雨モデルは、著者らの開発した『実用的降雨予測法』の基本的考え方を参考として開発したものであり、以下『降雨予測精度に関する一般モデル』と呼ぶこととする。

(1) 降雨予測精度に関する一般モデル

『実用的降雨予測法』は説明変数として多地点の時間データを用いて流域平均雨量の予測を行うものであり、この予測法^{1),2)}を用いた3時間先の時間予測結果（16降雨）を Fig.2 に示す。これによると、予測値は大きい雨量強度では実績値より小さく、また小さな雨量強度では大きく推定されている。このような現象は、重回帰モデルにより得た予測値ではよく経験するところである。

ところで、現時点 t_0 から i 時間先の時点 ($t_i = t_0 + i\Delta t$, $i=1, 2, 3, \dots, n$) での時間雨量の予測値 \hat{x}_i は、誤差 ε_i を用いて、真値 x_i との関係で、

$$x_i = \hat{x}_i + \varepsilon_i \quad \dots \quad (30)$$

と表わされる。しかし、式 (30) では上記のような予測値の偏りを表すことはできない。そこで、次式のようなモデルを仮定する。

$$\hat{x}_i = Ax_i + B\eta_i + C \quad \dots \quad (31)$$

ここに、 A 、 B および C は係数、 η_i はランダム変数で、その平均、分散は次式のように真値 x_i と同じ値を取るものとする。

$$E[x_i] = E[\eta_i] = m, \quad V[x_i] = V[\eta_i] \quad \dots \quad (32)$$

式 (30) の両辺の2乗の期待値をとり、 x_i と \hat{x}_i の相

関係数を ρ_i とすると、 $V[\hat{x}_i]$ 、 $V[\varepsilon_i]$ は $V[x_i]$ と ρ_i を用いて次式で表される。

$$V[\hat{x}_i] = \rho_i^2 V[x_i] \quad \dots \quad (33)$$

$$V[\varepsilon_i] = (1 - \rho_i^2) V[x_i] \quad \dots \quad (34)$$

つぎに、式 (31) を式 (30) に代入し2乗の期待値、式 (31) の1乗および2乗の期待値の3式と式 (33)、(34) を用いて、係数 A 、 B および C を決定すると、 \hat{x}_i は次式で表される。

$$\hat{x}_i = \rho_i^2 x_i + \rho_i \sqrt{1 - \rho_i^2} \eta_i + \{1 - \rho_i^2 - \rho_i \sqrt{1 - \rho_i^2}\} m \quad \dots \quad (35)$$

『実用的降雨予測法』では、降雨 x_i は式 (36) のように長周期成分 \hat{x}_{Li} と短周期成分 x_{Si} との積で表されるものとする¹⁾。予測計算は長周期成分⇨短周期成分の順とし、このうち主要な長周期成分の予測は時間データを用いた11時間移動平均雨量の予測とする。なお、以下の式中に現れる添字“ L ”は長周期成分、“ s ”は短周期成分に関する記号であることを示す。

$$x_i = \hat{x}_{Li} x_{Si} \quad \dots \quad (36)$$

式 (35) は、長周期成分 \hat{x}_{Li} および短周期成分 \hat{x}_{Si} においても成り立つと考える。

$$\begin{aligned} \hat{x}_{Li} &= \rho_{Li}^2 x_{Li} + \rho_{Li} \sqrt{1 - \rho_{Li}^2} \eta_{Li} \\ &\quad + \{1 - \rho_{Li}^2 - \rho_{Li} \sqrt{1 - \rho_{Li}^2}\} m_L \\ \hat{x}_{Si} &= \rho_{Si}^2 x_{Si} + \rho_{Si} \sqrt{1 - \rho_{Si}^2} \eta_{Si} \\ &\quad + \{1 - \rho_{Si}^2 - \rho_{Si} \sqrt{1 - \rho_{Si}^2}\} m_s \quad \dots \quad (37) \end{aligned}$$

ここに、 $E[x_{Si}] = E[\eta_{Si}] = m_s = 1$ 、 $E[x_{Li}] = E[\eta_{Li}] = m_L = m$ であり、 ρ_{Li} および ρ_{Si} は長周期成分の予測精度 (\hat{x}_{Li} と x_{Li} との相関係数) および短周期成分の予測精度 (\hat{x}_{Si} と x_{Si} との相関係数) を示す。なお、この ρ_{Li} および ρ_{Si} と時間雨量の予測精度 ρ_i の関係は、後述の式 (47) で示される。そして時間雨量の予測値 \hat{x}_i は、式 (36) より、長周期成分 \hat{x}_{Li} と短周期成分 \hat{x}_{Si} の予測値の積で表され、 $x_{Si} = x_i / \hat{x}_{Li}$ および $\eta_{Si} = \eta_i / \hat{\eta}_{Li}$ であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= \hat{x}_{Li} \hat{x}_{Si} \\ &= \rho_{Si}^2 x_i + \rho_{Si} \sqrt{1 - \rho_{Si}^2} \eta_i + \{1 - \rho_{Si}^2 - \rho_{Si} \sqrt{1 - \rho_{Si}^2}\} \hat{x}_{Li} \quad \dots \quad (38) \end{aligned}$$

と表される。

式 (37) より時点 t_i における長周期成分の予測雨量 \hat{x}_{Li} の期待値 $E_i[\hat{x}_{Li}]$ は、次式で表される。

$$E_i[\hat{x}_{Li}] = \rho_{Li}^2 x_{Li} + (1 - \rho_{Li}^2) m \quad \dots \quad (39)$$

この式 (39) は、

$$(E_i[\hat{x}_{Li}] - m) / (x_{Li} - m) = \rho_{Li}^2 \leq 1 \quad \dots \quad (40)$$

のように変形できる。相関係数 ρ_{Li} は1より小さいことから、実績雨量 x_{Li} が平均値 m より大きい場合、予測値 $E_i[\hat{x}_{Li}]$ は実績値より小さく、逆に実績雨量 x_{Li} が平均

値 m より小さい場合、予測値 $E_i[\hat{x}_{Li}]$ は実績値より大きくなることを表しており、これは Fig.2 の実例と一致するものである。

同様に、時点 t_i での時間雨量の予測値 \hat{x}_i の期待値 $E_i[\hat{x}_i]$ は、式 (38) を用いて、次式を得る。

$$E_i[\hat{x}_i] = \rho_{Si}^2 x_i + (1 - \rho_{Si}^2) E_i[\hat{x}_{Li}]$$

$$= \rho_{Si}^2 x_i + (1 - \rho_{Si}^2) \{ \rho_{Li}^2 x_{Li} + (1 - \rho_{Li}^2) m \} \dots (41)$$

式 (41) から分かるように、時間雨量の予測値 $E_i[\hat{x}_i]$ の期待値は長周期成分の予測値 $E_i[\hat{x}_{Li}]$ に等しいとすることが出来る。よって、2. で示した時点 t_i の予測雨量の期待値 $E[x_i|\Omega]$ は、 $E_i[\hat{x}_{Li}]$ である。

つぎに、時点 t_i の予測雨量の期待値 $E[x_i|\Omega] = E_i[\hat{x}_{Li}]$ まわりの分散 $V_L[x_i|\Omega]$ は、次式第1式で定義されるが、第3式のように、時間雨量と長周期成分の偏差、時間雨量および長周期成分の予測誤差のそれぞれの2次の積率の和よりなると考える。つまり、第1項は実績による分散、第2項、第3項は誤差分散に係わると考える。同様に歪係数は3次の積率の和よりなると考える。ただ、ここで時間雨量と長周期成分の予測誤差は正規分布をなすとし、3次の積率を零とする。

$$V_L[x_i|\Omega] \equiv E_i[(\hat{x}_i - E_i[\hat{x}_{Li}])^2]$$

$$\equiv E_i[(\hat{x}_i - \hat{x}_{Li})^2]$$

$$\equiv E[(x_i - x_{Li})^2|\Omega] + E[(\hat{x}_i - x_i)^2|\Omega]$$

$$+ E[(x_{Li} - \hat{x}_{Li})^2|\Omega]$$

$$= E[(x_i - x_{Li})^2|\Omega] + (1 - \rho_i^2) E[(x_i - m)^2]$$

$$+ (1 - \rho_{Li}^2) E[(x_{Li} - m)^2]$$

$$= V_L[x_i] + (1 - \rho_i^2) V_m + (1 - \rho_{Li}^2) V_{mL} \dots (42)$$

$$C_L[x_i|\Omega] V_L[x_i|\Omega]^{3/2} \equiv E_i[(\hat{x}_i - E_i[\hat{x}_{Li}])^3]$$

$$\equiv E_i[(\hat{x}_i - \hat{x}_{Li})^3]$$

$$\equiv E[(x_i - x_{Li})^3|\Omega] + E[(\hat{x}_i - x_i)^3|\Omega]$$

$$+ E[(x_{Li} - \hat{x}_{Li})^3|\Omega]$$

$$\equiv C_L[x_i] V_L[x_i]^{3/2} \dots (43)$$

ここに、 $V_m = E[(x_i - m)^2]$ 、 $V_{mL} = E[(x_{Li} - m)^2]$ である。また、 ρ_i は、真値 x_i と時間雨量の予測値 \hat{x}_i との相関係数であり、次式で定義される。

$$\rho_i = \frac{E[(\hat{x}_i - m)(x_i - m)]}{\sqrt{E[(\hat{x}_i - m)^2]} \sqrt{V_m}} \dots (44)$$

式 (44) の分子は、時間雨量の予測値と真値の共分散であり、時間雨量の予測値が式 (38) で示されることより

$$E[(\hat{x}_i - m)(x_i - m)] = E[\hat{x}_i x_i] - m^2$$

$$= \rho_{Si}^2 V_m + (1 - \rho_{Si}^2 - \rho_{Si} \sqrt{1 - \rho_{Si}^2}) \rho_{Li}^2 V_{mL} \dots (45)$$

一方、式 (44) の分母の予測雨量の分散は、次式で与えられる。

$$E[(\hat{x}_i - m)^2] = \rho_{Si}^2 V_m + (1 - \rho_{Si}^2 - \rho_{Si} \sqrt{1 - \rho_{Si}^2})$$

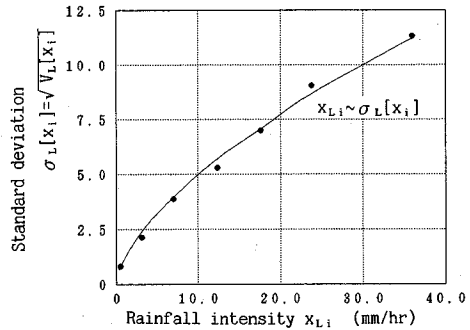


Fig.3 Relationship between rainfall intensity and standard deviation.

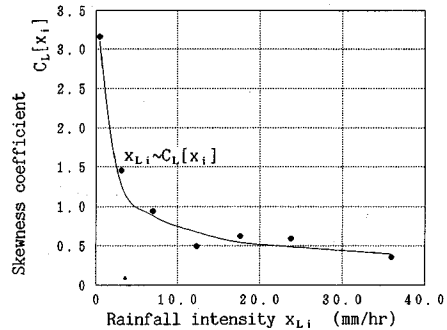


Fig.4 Relationship between rainfall intensity and skewness coefficient.

$$\cdot (1 + \rho_{Si}^2 - \rho_{Si} \sqrt{1 - \rho_{Si}^2}) \rho_{Li}^2 V_{mL} \dots (46)$$

よって、時間雨量の予測値と真値との相関係数、つまり予測精度 ρ_i は、次式で示される。

$$\rho_i = R21/R22 \dots (47)$$

$$R21 = \rho_{Si}^2 + (1 - \rho_{Si}^2 - \rho_{Si} \sqrt{1 - \rho_{Si}^2}) \rho_{Li}^2 V_{mL} / V_m$$

$$R22 = \{ \rho_{Si}^2 + (1 - \rho_{Si}^2 - \rho_{Si} \sqrt{1 - \rho_{Si}^2})$$

$$\cdot (1 + \rho_{Si}^2 - \rho_{Si} \sqrt{1 - \rho_{Si}^2}) \rho_{Li}^2 V_{mL} / V_m \}^{0.5}$$

(2) $V_L[x_i]$ と $C_L[x_i]$ の設定方法

予測値 \hat{x}_i の (長周期成分の予測値 \hat{x}_{Li} のまわりの) 分散 $V_L[x_i|\Omega]$ は、式 (42) で示されるように、実績雨量の期待値 x_{Li} まわりの分散 $V_L[x_i]$ 、実績雨量の分散 V_m 、長周期成分の分散 V_{mL} の相関係数で重み付けした和として表される。予測値 \hat{x}_i の歪係数 $C_L[x_i|\Omega]$ は、実績雨量の期待値 x_{Li} まわりの歪係数 $C_L[x_i]$ と分散 $V_L[x_i]$ の積により表される。まず、 $V_L[x_i]$ および $C_L[x_i]$ と x_{Li} との関係は、検証対象とする柳瀬ダムの流域平均雨量 (富郷地点上流域, 4.(1) 参照) 資料を採用し、長周期成分を 11 時間移動平均雨量 x_{Li} で近似して求め、結果を Fig.3, 4 に示す。そして、この図により、11 時間移動平均雨量と分散、歪係数の関係を次式のような関数形で近似する。

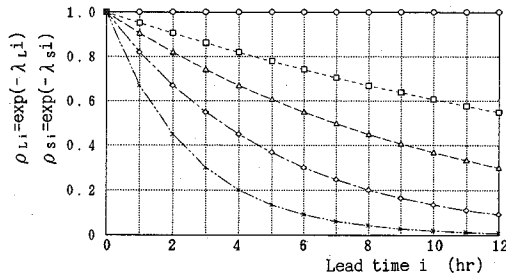


Fig.5 Variation of ρ with λ and i .
 Remarks: \bigcirc : $\lambda_L, \lambda_S=0.00$ \square : $\lambda_L, \lambda_S=0.05$
 \triangle : $\lambda_L, \lambda_S=0.10$ \diamond : $\lambda_L, \lambda_S=0.20$
 \times : $\lambda_L, \lambda_S=0.40$

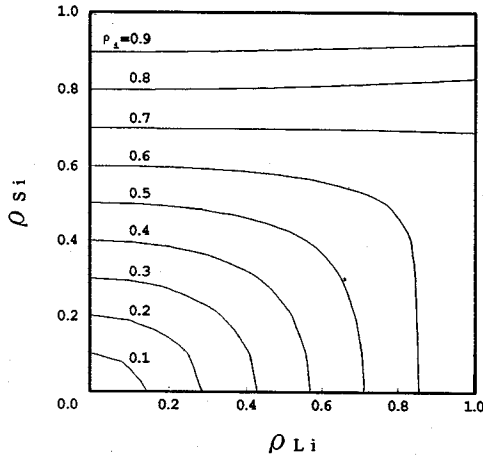


Fig.6 Variation of ρ_i with ρ_{Li} and ρ_{Si} .

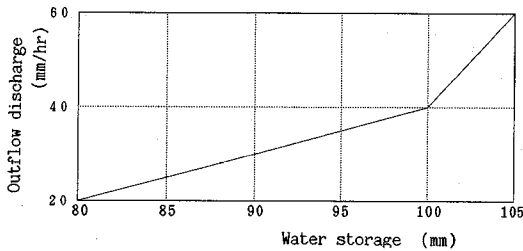


Fig.7 Relationship between water storage and outflow discharge.

$$\sigma_L[x_i] = \sqrt{V_L[x_i]} = 1.12x_{Li}^{0.65},$$

$$C_L[x_i] = 2.30x_{Li}^{-0.48} \dots \dots \dots (48)$$

また、 V_m と V_{mL} は、実績データの解析により、 $V_m = 62.49$ (mm^2/hr^2)、 $V_{mL} = 30.81$ (mm^2/hr^2) とする。

(3) ρ_{Li} 、 ρ_{Si} および ρ_i の設定方法

ρ_{Li} と ρ_{Si} はリードタイム i に従い指数低減すると仮定し、次式のように設定する。

$$\rho_{Li} = \exp(-\lambda_L i), \quad \rho_{Si} = \exp(-\lambda_S i) \dots \dots \dots (49)$$

ここに、 λ_L 、 λ_S は定数である。種々の λ_L 、 λ_S 値に対するリードタイム i での予測精度は Fig.5 で示される。ま

た、時間雨量の予測値と真値との相関係数 ρ_i は、式 (47) に示されるように、 ρ_{Li} および ρ_{Si} と関係付けられ、凶化すると Fig.6 のようになり、 ρ_{Si} が 0.7 以上となると $\rho_i \approx \rho_{Si}$ となるのが分かる。

4. モデルダムでの理論の検証

本節では、2. で示した『雨量・流量・貯水量の確率分布関係モデル』の検証を、3. で示した『降雨予測精度に関する一般モデル』で設定した予測雨量を用い、洪水調節モデルダムを想定して行う。

(1) 計算条件の設定

今回の検討で用いた雨量資料は、一級河川吉野川水系左支川銅山川中流部に位置する柳瀬ダム流域の流域平均雨量（富郷地点上流）である。対象降雨は、昭和50年8月の四国西南の足摺岬付近に上陸した台風5号による降雨とする。この降雨は、柳瀬上流域（富郷地点上流）で総雨量 641 mm、最大降雨強度 58.5 mm/hr に達する1山型波形の豪雨である。

降雨予測の精度は、式 (49) の λ で設定するものとし、長周期成分の予測精度は $\lambda_L = 0.05, 0.10, 0.40$ （リードタイム3時間で $\rho_L = 0.86, 0.74, 0.30$ ）の3ケースとする。また『実用的降雨予測法』による予測結果から、短周期成分の予測精度 ρ_{Si} は、長周期成分の予測精度 ρ_{Li} の0.3倍の値とする。

流量計算に用いる貯留関数法の定数は、木村の総合貯留関数法を参考に、 $k=40.0, p=0.5, f=1.0$ とする。つまり、流量観測誤差および流出モデル誤差は存在しないと仮定する。

対象とするモデルダムは洪水調節容量を集水面積当り 100 mm 相当とし、放流方式は洪水調節開始流量 10 mm/hr、最大放流量 20 mm/hr、カット率 $\alpha=0.3$ の一定率一定量方式を採用する。ただ、来襲する洪水が大洪水であると洪水調節容量が不足する場合も想定されるが、そのときには貯水量が洪水調節容量の8割（8割水位）に達した段階で、操作方法を変更し、放流量を貯水量との関係（Fig.7）から決定する『但し書き操作』⁹⁾に移行にする。

(2) 期待値と予測精度、リードタイムとの関係

雨量、流入量、放流量および貯水量の期待値と、予測精度、降雨規模およびリードタイムとの関係を求め、Fig.8 に示す。この図は実績値を実線で予測値を破線で示し、予測値は予測時点の実績値から12時間先まで連ね、予測時点を1時間毎変えて示す。これによると、3つの降雨予測精度のうち最も良好な $\lambda_L = 0.05$ （リードタイム3時間で $\rho_L = 0.86$ ）でも実線と破線の差はピーク付近とリードタイムが長くなると差が大きくなっているが、 $\lambda_L = 0.05$ では雨量・流量の予測値は傾向値の周

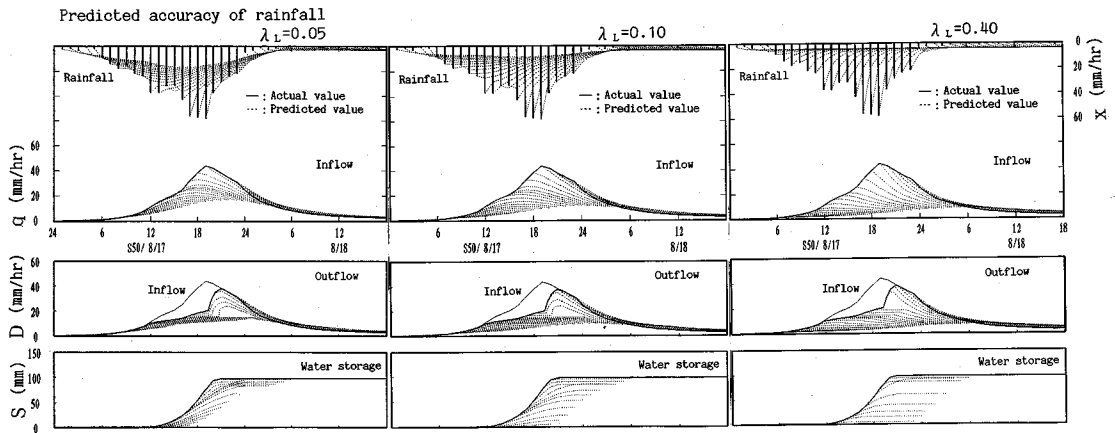


Fig.8 Prediction values of rainfall, inflow discharge and water storage for prediction accuracy of rainfall.

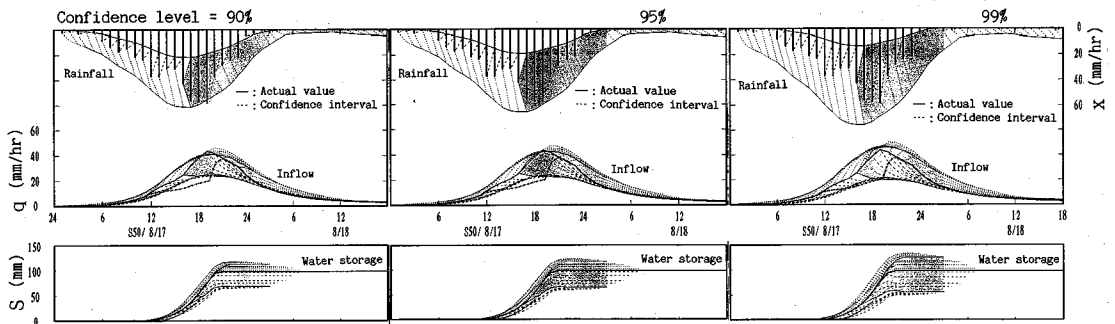


Fig.9 Predicted confidence intervals of rainfall, inflow discharge and water storage for confidence levels at the case of $\lambda_L=0.00$.

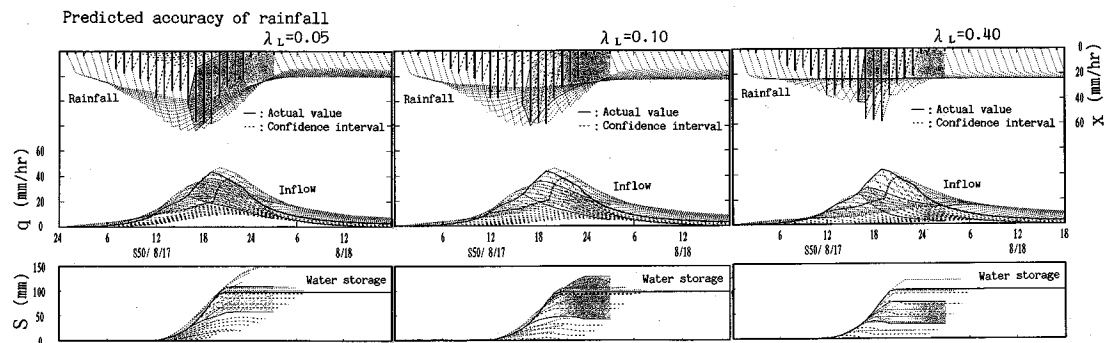


Fig.10 Predicted 95% confidence intervals of rainfall, inflow discharge and water storage for prediction accuracy of rainfall.

りに推定されている。このことから、あたりはづれの少ない予測値としての長周期成分の予測計算を主体においた予測法を採用することの有効性が窺える。なお、対象洪水は雨量規模が大きく、本則（一定率一定量）操作では洪水調節容量 100 mm では不足が生じることから、この洪水に対する操作方法は本則操作から但し書き操作に移行することが必要となる。これに対して、予測精度がこれより低下 ($\lambda_L > 0.05$) すると、予測雨量・流量がさらに小さく予測されることになり、来襲洪水に対し空容量が十分であると判断され、放流方式は本則操作のみの実施となり、予測値およびダムの操作方法が実績と離れた

結果となる。これは、リードタイムが伸びるほど顕著となる。

(3) 信頼区間と予測精度、リードタイムとの関係
信頼確率を 90%、95%、99% と変化させた場合の信頼区間と実績データとの関係を図化し、Fig. 9 に示す。これは、予測精度 $\lambda_L = 0.00$ の場合である。この図は、Fig. 8 と同様に、予測時点の実績値から 12 時間先までの予測値を連ね、予測時点を 1 時間毎変えて示した。実績線が実績値、破線が各信頼確率に対する信頼区間である。また信頼区間を明示するため、予測時点が昭和 50 年 8 月 17 日 16 時であるときの結果を、網かけで示した。こ

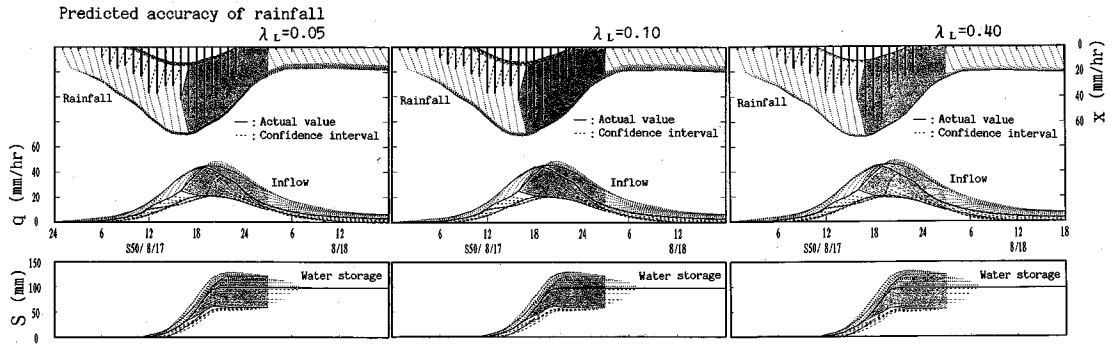


Fig.11 Predicted 95% confidence intervals of rainfall, inflow discharge and water storage based on the modified estimation of rainfall.

れによると、破線で示した信頼確率に対応する信頼区間は、信頼確率が大きくなるほど広くなり、特に雨量と貯水量で顕著であり、流量の信頼確率による信頼区間の変化は少ない。また、信頼確率95%とした信頼区間では、雨量、流量および貯水量の実績値をほぼカバーし得ようになる。そこで、信頼確率としては95%を採用する。

つぎに、信頼確率95%の場合の信頼区間と予測精度およびリードタイムの関係を Fig.10 に示す。図の表示は Fig.9 と同様である。これによると、Fig.8 でみたとように予測精度が低下するほど期待値が小さくなり、Fig.3 で示される期待値と分散との関係より分散が小さくなることから、信頼区間が狭まるという状況が生じている。これは Fig.2 の予測値の偏りによるものと考えられる。そこで、この予測値の偏りを補正することにより、信頼区間の変化をみる。予測値の偏りを表す式 (39) は変形すると、

$$\hat{x}_{Li} = \{E_i[\hat{x}_{Li}] - (1 - \rho_{Li}^2)m\} / \rho_{Li}^2 \dots\dots\dots (50)$$

となり、予測値 $E_i[\hat{x}_{Li}]$ は予測精度 ρ_{Li} によって補正が可能となる。そこで、予測雨量が補正された場合を想定し、信頼区間と予測精度との関係を、Fig.11 に示す。図の表示は Fig.9 と同様である。これによると、予測値を補正することにより、予測精度に対応した雨量、流量および貯水量の各分散が確に把握されることとなり、Fig.10 でみられた矛盾は解消され、予測精度が低下すると信頼区間は広がるという結果を得た。

以上より、今回提案した『確率分布関係モデル』により設定される信頼区間は、予測精度およびリードタイムとの関係が合理的に表現されていることが分かる。

(4) ピーク流量とその発生時刻、8割水位到達時刻

この『確率分布関係モデル』を用いて、降雨の予測精度が、流量および貯水量の推定精度にどのような影響を与えているか、また逆に、所要の流量および貯水量の予測精度を得るにはどの程度の降雨予測精度が必要かについて検討を行う。流量の予測精度はピーク値とその発生時刻、貯水量の推定精度は但し書きの開始水位である8

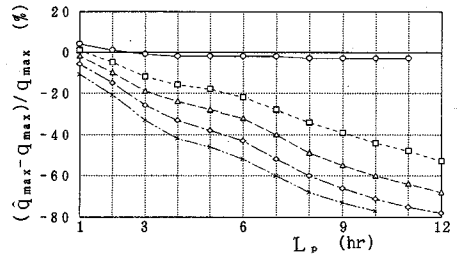


Fig.12 Prediction error of peak discharge.

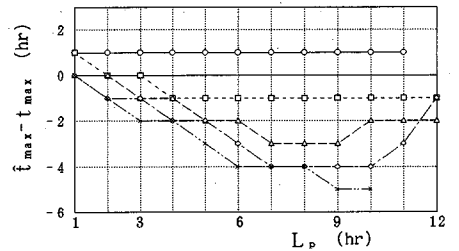


Fig.13 Time error of peak occurrence.

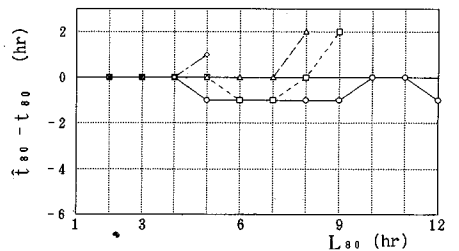


Fig.14 Time error of reaching 80% water level.
Remarks : \ominus : $\lambda_L=0.00$ \square : $\lambda_L=0.05$ \triangle : $\lambda_L=0.10$
 \diamond : $\lambda_L=0.20$ \times : $\lambda_L=0.40$

割水位に到達する時刻で評価する。なお、評価において治水上安全側をみて推定結果が大きめに求まる超過確率2.5%での評価とする。

a) ピーク流量とその発生時刻

実績流量のピーク値 q_{max} の発生時刻 t_{max} から L_p 時間前の時点予測時点とし、この時点から12時間先までの予測計算を行い、この間の予測値のピーク値 \hat{q}_{max} お

よびその発生時刻 \hat{t}_{80} を求める。予測時点とピーク発生時刻との時間差 L_p とピーク流量予測精度としてのピーク流量誤差率 $(=\hat{q}_{\max} - q_{\max})/q_{\max} \times 100(\%)$ との関係を対比図として、Fig. 12 に示す。これによると、予測精度が悪化するほど、また L_p が長くなるにつれ、誤差は大きくなり、降雨予測精度が $\lambda_L = 0.1$ ($\rho = 0.74$, $L_p = 3$ hr のとき) で、ピーク流量に対する予測誤差率は 20% である。

つぎに、ピーク発生時刻の予測精度について、リードタイムとピーク時間誤差 $(=\hat{t}_{\max} - t_{\max})$ との対比図を作成し、Fig. 13 に示す。これによると、予測結果は全て実績より遅く生じており、 L_p が長くなるほど、また降雨予測精度が劣るほど、流量の予測結果を小さく見積もることから、ピーク発生時刻は早く生ずるようになる。予測精度 λ_L が 0.1 ($L_p = 3$ hr で $\rho_L = 0.74$) を確保できていれば、ピーク流量発生時刻の 3 時間に迫った時点でのピーク発生の予測は、実績ピークとの時間差で ± 1 時間以内に収まる。

b) 8 割水位到達時刻

実績貯水量の 8 割水位到達時刻 t_{80} から L_{80} 時間前の時点を実績予測時点とし、この時点から 12 時間先までの予測計算を行い、この間の予測値の 8 割水位到達時刻 \hat{t}_{80} を求める。予測時点と 8 割水位到達時刻との時間差 L_{80} と 8 割水位の到達時間誤差 $(=\hat{t}_{80} - t_{80})$ との関係を対比図として、Fig. 14 に示す。これによると、8 割水位到達時間誤差は L_{80} が長くなるほど、また降雨予測精度が劣るほど、大きな値を持つ。そして、この時間誤差は、ピーク時間誤差と比べると小さめである。また超過確率 2.5% として 8 割水位到達時間誤差を求めたことにより、予測値は実績より早く 8 割水位に到達することがわかる。なお、図中で L_{80} が長くなると途中で描点が消えている場合が存在するが、これは、実績の貯水量が 8 割水位に到達する時点の L_{80} 時間前を予測時点として、計算を行ったが、その予測時点からの予測計算では 8 割水位に到達することがなかったことを示す。予測精度 λ_L が 0.1 ($L_{80} = 3$ hr で $\rho_L = 0.74$) を確保できていれば、リ-

ドタイム 3 時間までの 8 割水位到達時間誤差は生じない。

5. 結論

以上の検討結果をとりまとめ以下に示す。

- 雨量の確率分布から、流量そして貯水量へ至る条件付き確率分布関係を、正規分布の仮定を行わず、理論的に誘導し、モデルダムにて理論の検証を信頼区間と期待値について行い、理論の有効性を確認した。
- 洪水管理を念頭に置いた降雨予測モデルは、精度としては $\lambda_L = 0.10$ ($L_p = L_{80} = 3$ hr で $\rho_L = 0.74$) 程度が確保できれば、昭和 50 年 8 月洪水においては、リードタイム 3 時間で最大ピーク流量誤差が 2 割、ピーク時間誤差は 1 時間の遅れでまた 8 割水位到達時差は生じず、実用に寄与し得ると判断される。
- 通常使われている回帰モデルによる降雨予測式には偏りがみられるが、これを補正することにより、予測精度と信頼区間の関係が改善されることが期待できる。

参考文献

- 1) 國方美規義・端野道夫・大下勲：多地点データを用いた時系列モデルによる降雨予測手法に関する研究，水工学論文集，第 37 卷，pp. 39-44, 1993.
- 2) 端野道夫・國方美規義・大下勲・小田二郎：GMS と AMeDAS のデータを用いた豪雨の一日先までの時系列予測，水文・水資源学会 1993 年研究発表会要旨集，pp. 224-225, 1993.
- 3) 國方美規義・端野道夫：洪水調節用ダムにおける n 時間先予測降雨・流量・貯水量の条件付き確率分布関係について，水工学論文集，第 37 卷，pp. 57-62, 1993.
- 4) Kunikata, M. and Hashino, M.: Estimation of Conditional Probability Distribution of Runoff and Water Storage Given Several Hour Lead Forecasted Rainfall, Proc. of XXV Cong. of IAHR, Vol. II, IAHR, pp. 509-516, 1993.
- 5) 沖大幹：水文・水資源学のための気象予測概論，気象予測とその水文・水資源学への応用，水文・水資源学会企画・事業委員会，p. 6, 1992.
- 6) 建設省河川局開発課監修：改定新版ダムの管理例規集—平成 5 年版—，山海堂，pp. 532-540, 1994.

(1993. 9. 13 受付)

PREDICTION OF CONDITIONAL PROBABILITIES OF RUNOFF AND WATER STORAGE AT A FLOOD CONTROL RESERVOIR GIVEN SEVERAL HOUR LEAD FORECASTED RAINFALL

Mikiyoshi KUNIKATA and Michio HASHINO

Conditional probability distributions of runoff discharge and water storage at a flood control reservoir given several hour lead forecasted rainfall intensities are theoretically derived using expectation techniques based on the linearized relationship of storage function between rainfall and runoff intensities and on the continuity equation between runoff (inflow), outflow, and water storage of the flood control reservoir. By this theory, significance of rainfall forecasts with various levels of accuracy is investigated.