

薄層要素-離散化波数法による半無限弾性体の波動解析

東平光生*

薄層要素-離散化波数法を用いて半無限弾性体の波動解析を行っている。薄層要素-離散化波数法では、剛基盤上の表層地盤の表面波モードの重ね合わせで弾性波動方程式の解を表現するが、この方法によっても有限な Time-window と空間領域を設定すれば、半無限弾性体の波動場の解を表現できることを実証している。具体的には、本手法による数値解と Pekeris による Lamb の問題の解および Olson の DWFE 法による解の比較を行っている。

Key Words : thin-layered element method, discrete wave number method, elastic half space

1. はじめに

著者は一連の研究で、薄層要素と離散化波数法を組み合わせた成層弾性体の衝撃応答解析手法（以下、薄層要素-離散化波数法）を示してきた^{1)~4)}。この手法では、マトリックスの固有値計算で得られた周波数-波数領域の表面波モードを因果性を考慮して重ね合わせ、時間-波数領域の解を構成する。そして、離散化波数法でこれらの解を重ね合わせることで時間-空間領域の波動関数を得る点に特色がある。

ところで、マトリックスの固有値計算で表面波モードを求めるためには、通常は剛基盤を設定しなければならない。しかし、波動解析を行う対象は剛基盤上の表層地盤だけとは限らず、場合によっては弾性基盤上の表層地盤を扱わねばならないこともある。

本研究は、こうした点を踏まえ、剛基盤上の表層地盤の表面波モードの重ね合わせで、半無限弾性体の波動解析を行う可能性を検討したものである。もちろん、剛基盤上の表面波モードの重ね合わせで半無限弾性体の解をすべての時間-空間領域にわたって厳密に表現することは、不可能である。しかし、因果性を考慮して表面波モードを重ね合わせる本手法では、剛基盤からの反射波が到達しない空間領域と Time-window を設定すれば、剛基盤の影響を受けない解を構成することが可能と考えられる。特に、その空間領域と Time-window では、表面波モードが基底として振舞い、表面波モードの和で解を一意に定めることが可能になると期待できる。本研究では、この可能性を実際に数値計算を通して検証する。

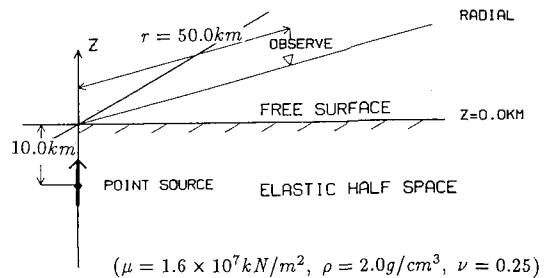


Fig.1 Point source in homogeneous elastic half space.

2. 薄層要素-離散化波数法の Lamb の問題への適用

まず、最も単純な半無限弾性体である、均質半無限弾性体の解析を行う。ここでは、Fig.1に示すように、地中の一点で鉛直方向に作用する荷重を与え、その影響を観測する問題（Lamb の問題）を扱う。媒質のポアソン比が0.25で、荷重の時間変動が単位階段関数で与えられる場合、解析解は Pekeris⁵⁾によって与えられている。また、Harvey は、表面波モードの重ね合わせで弾性波動方程式の解を表現する方法の妥当性を検討するために、Pekeris の解と比較を行っている⁶⁾。ここでは、薄層要素-離散化波数法による解と Pekeris の解を比較するとともに、Harvey の行った考察を基に、剛基盤上の表面波モードで半無限弾性体の解を表現することの妥当性について検討する。

Fig.1に示すように、震源の地表面からの深さを $H=10.0$ km とする。また、震源の荷重の大きさを $F=1.0 \times 10^7$ kN、地表面上の観測点の位置を $r=50.0$ km、弾性体の質量密度を $\rho=2.0$ g/cm³、せん断弾性係数を $\mu=1.6 \times 10^7$ kN/m²、ポアソン比 $\nu=0.25$ とする。また、仮定の剛基盤を地表面から深さ 100.0 km の位置に設定する。また、Fig.1 のモデルでは、S 波の伝播速度は 4.0

* 正会員 工博 東京理科大学講師 理工学部土木工学科
(〒278 千葉県野田市山崎 2641)

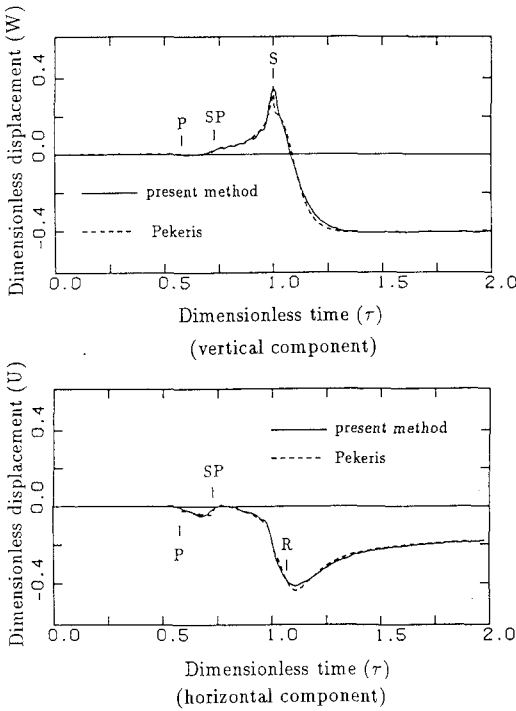


Fig.2 Comparison of time histories (Lamb's problem).

km/s, P波の伝播速度は6.9 km/sである。したがって、震源で発生したP波が仮想の基盤を反射し地表面に到達する最短の時間はおよそ27.5 secである。これより、解析のTime-windowを27.5 sec以内に設定すれば、地表面の解析結果は剛基盤の影響を受けないことになる。

Fig.2は、地表面と仮想の剛基盤の間を均等に40層に分割し、表面波モードを60次まで重ね合わせた結果の変位時刻歴である。ただし、離散化波数は2.6/kmまで重ね合わせている。本手法による結果と比較するために、Pekerisらの結果を破線で示している。この図では、時刻ならびに変位を次のように無次元化している。

$$\tau = \frac{\beta t}{L}, \quad W = -\frac{\pi^2 \mu L}{3F} w, \quad U = -\frac{\pi^2 \mu L}{3F} u \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 w と u は鉛直および水平変位、 β はS波の伝播速度、 L は観測点と振源との距離である。また、 τ , W および U はそれぞれ、無次元化された時間、鉛直変位および水平変位である。

Fig.2の時刻歴では、考察のため、波動論から求められるP波、SP波、S波ならびにRayleigh波の到着時刻を記号で図示している。参考までにこれらの波動の到着時刻を示すと、P波は $\tau=0.58$ 、SP波は $\tau=0.73$ 、S波は $\tau=1.0$ 、Rayleigh波は、 $\tau=1.07$ である。この時刻に付けた記号と数値計算結果を比べれば、数値計算結果は、それぞれの波動の到着を精度よく評価し、Pekeris

の解とも良く一致している。特に、数値解の永久変位の評価では、Harveyの結果が永久変位に収束していないことを考えると、精度が高いことが注目される。

なお、ここでの数値計算で用いた、表面波モードの重ね合わせの次数と重ね合わせに用いた最大の離散化波数の値は、いくつかのケーススタディの結果のうち、最も厳密解に近い値が得られた場合のものである。これまでの研究によれば、数値解が収束するために必要な最大の離散化波数はおよそ14/km程度であった¹¹⁻¹³。それに比較すれば、今回の最大の離散化波数は2.6/kmであり、いままでの値よりも大幅に小さな値で解の収束を見ている。この原因は、ソースの時間変動がデルタ関数でなく、単位階段関数で与えられることにより、高い振動数成分が応答に寄与しなくなり、それに従い大きな波数成分も不要となったためである。

なお、Harveyのモード合成法では、モード合成により周波数-空間領域の解を誘導し、それらを離散的に重ね合わせることで時間-空間領域の解を得ている。Harveyも指摘しているように、周波数-空間領域の解を離散的に重ね合わせて得る、時間-空間領域の波動には、地表面と基盤を多重反射する波動の影響が含まれている。これは、周波数領域の解が定常状態を示すために、地表面と基盤の間を多重反射する波の影響が避けられないことを示す。そして、Harveyはこの多重反射波の影響を除去するために、位相速度の大きな表面波モードを重ね合わせからカットするなどの工夫を行っている。位相速度の大きな表面波の多重反射への影響の大きさは、位相速度が無限大の表面波が、鉛直方向に伝播する平面波であることを考えれば、容易に理解できる。

しかし、Harveyの得たLambの問題の解では、鉛直方向の変位時刻歴に、P波が到着する以前から有限な変位振幅を生じ、また前述のように時刻歴の後半では、永久変位に収束しない誤差を生じている¹⁴。

一方、Fig.2で示した薄層要素-離散化波数法の解については、Harveyの解に見られた問題は見られなかったと考えてよい。そして、この理由としては、本手法が因果性を考慮して、表面波モードを重ね合わせ、時間-波数領域の解を誘導したことが上げられる。因果性を考慮して表面波モードを重ね合わせることで得られた時間領域の解は、波動が基盤から反射して戻ってくるまでは、解は基盤の影響を受けない。そのため、地表面と基盤を多重反射する波動の影響は有限なTime-windowの中では含まれていない。本手法による解とPekerisの解がほぼ一致しているのは、こうした理由に基づく。そして、薄層要素-離散化波数法で半無限弾性体の解を表現する場合には、Harveyが行った位相速度の大きな表面波モードのカットも不要となる。

換言すれば、有限な空間領域とTime-windowを設定

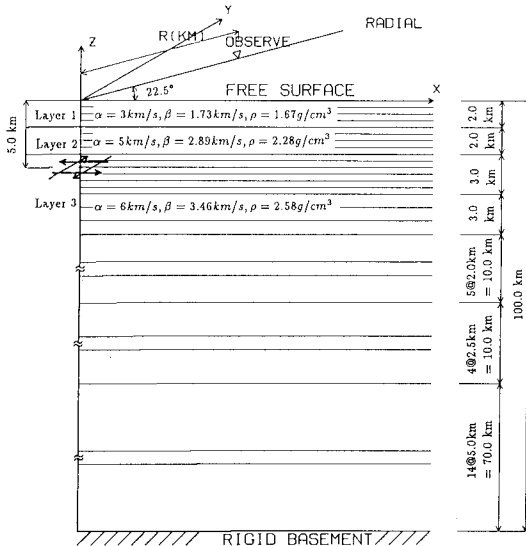


Fig.3 Thin-layered element model for source-observer geometry with virtual rigid basement

し、剛基盤上の表面波モードを因果性を考慮して重ね合わせる場合には、剛基盤上の表面波モードは、半無限弾性体の解を表現するための基底として振舞うことを示している。

3. 薄層要素-離散化波数法によるダブルカップル源の応答計算

次に、ダブルカップルで与えられるソースを半無限弾性体に加えた場合の応答を薄層要素-離散化波数法で計算する。解析モデルを Fig.3 に示す。この解析モデルは Olson らが DWFE 法の計算で用いたものと同じである。すなわち、2 km の厚さの 2 層の地盤が弾性基盤上に堆積しているモデルである。

Fig.3 に示すように、ここではダブルカップルの震源を地表面から深さ 5.0 km の位置に設定する。ただし、ダブルカップルの震源は z 平面に平行な面内にあるものとし、震源の時間変動は、立ち上がり時間が 1 秒の ramp 関数とする。また、観測点は x 軸と 22.5° なす直線上に分布させることにする。また、仮定の剛基盤を地表面から深さ 100 km の位置に設定する。Fig.3 では、 α は P 波の速度を表している。

Olson らの論文からは、解析モデルの有限要素分割の具体的な情報を読み取ることができなかった。しかし、Olson らの数値解に対する誤差の議論と、数値解に 0.5 Hz のローパスフィルターをかけていることを参考にすれば、表層付近での有限要素の層厚は本解析モデル程度と思われる。

なお、本数値計算では、前述の Lamb の問題での計算を参考に、表面波モードの重ね合わせは 60 次までと

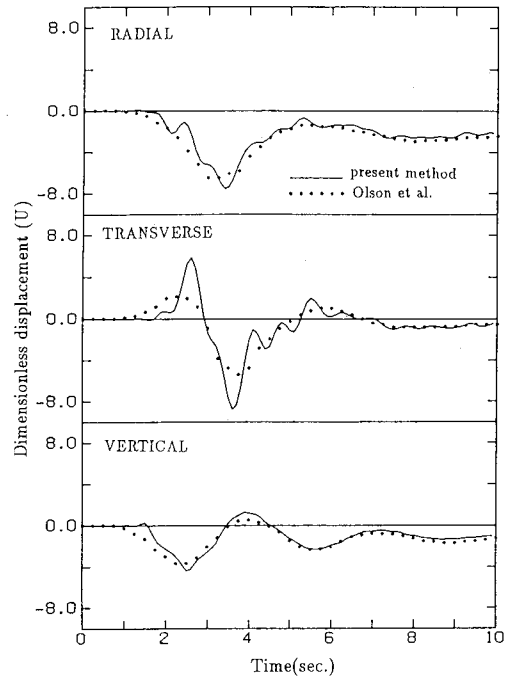


Fig.4 Comparison of displacement at 5 km epicentral distance.

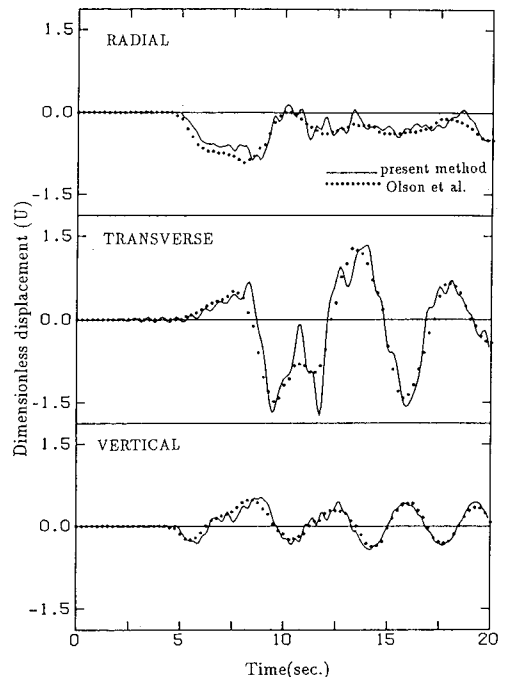


Fig.5 Comparison of displacement at 25 km epicentral distance.

し、離散化波数は 2.6/km まで重ね合わせることにする。

Fig.4 は震央距離 5 km の位置での変位時刻歴である。ここで、実線は本手法による結果を示し、点線は Olson らの結果をトレースしたものである。ただし、Fig.4 の縦軸は次式によって、変位を無次元化している。

$$U = \frac{\mu}{M_0} u \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 u は実際の変位、 M_0 は地震モーメント、 U は無次元化された変位を表す。 r 方向、 θ 方向ならびに z 方向のいずれの変位も式 (2) によって無次元化を行う。ただし、 u の単位は cm であるとして、無次元化を行うことにする。

Fig.4 の結果によると、 θ 方向の変位時刻歴の初期の部分を除いて、Olson らの結果と本手法による結果は概ね一致していると言える。ただし、両方の結果を注意深く観察すると、本手法による結果は、Olson の結果に比べ、高振動数成分の影響が現れている。本数値計算の結果は 0.5 Hz のローパスフィルターをかけていないことから、Olson の結果との差異はローパスフィルターの有無によるものと考えられる。

Fig.5 は震央距離 25 km の位置での変位時刻歴である。本手法による結果と Olson による結果は、ここでも概ね一致していると言える。特に、ここでは θ 方向の変位時刻歴も良く一致している。震央距離の増大によって、高振動数成分は急速に減衰する。Olson の結果と本研究結果の一致が震央距離 5 km の場合に比べさらに良好になったことは、この高振動数成分の減衰によるものと言える。

4. 結 論

本研究では、薄層要素-離散化波数法により、半無限弾性体の波動解析を行った。特にここでは、剛基盤上の表層地盤の表面波モードの重ね合わせで、半無限弾性体の解を表現することを試みた。数値計算結果より、精度

の高い結果を剛基盤上の表面波モードの和から得るためには、因果性を考慮することが重要であると言える。これは、因果性の考慮により、地表面と基盤の間を多重反射する波動の影響が除去できるためである。また、因果性を考慮し剛基盤上の表面波モードを重ね合わせる場合には、有限な空間領域と Time-window 上で、剛基盤上の表面波モードが半無限弾性体の波動場の基底として振舞うことも示すことができた。

参 考 文 献

- 1) 東平光生：離散化波数法と薄層要素法を組み合わせた成層弾性体の面外波動場での衝撃応答解析手法，土木学会論文集，No.459/I-22，pp.119-128，1993.1.
- 2) 東平光生：薄層要素-離散化波数法による成層弾性体の面内波動場での衝撃応答解析手法，土木学会論文集，No.465/I-23，pp.137-144，1993.4.
- 3) 東平光生：3次元弾性体の表面波動の性質に関する基礎的検討，土木学会論文集，No.483/I-26，pp.127-136，1994.1.
- 4) 東平光生：薄層要素-離散化波数法の3次元成層地盤への適用，第22回地震工学研究発表会，pp.151-154，1994.
- 5) Pekeris, C.C. and H. Lifson : Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried pulse, J. Acous. Soc. Am., Vol.29, pp.1233-1238, 1957.
- 6) Harvey, D.J. : Seismogram synthesis using normal mode superposition : the locked mode approximation, Geophys. J.R. astr. Soc., Vol.66, pp.37-69, 1981.
- 7) Olson, A.H., Orcutt, J.A. and G.A. Frizer : The discrete wavenumber/finite element method for synthetic seismograms, Geophys. J.R. astr. Soc., Vol.77, pp.421-460, 1984.

(1993.6.21 受付)

ANALYSIS OF WAVE PROPAGATION IN ELASTIC HALF SPACE USING A COUPLED THIN-LAYERED ELEMENT AND DISCRETE WAVE NUMBER METHOD

Terumi TOUHEI

A coupled thin-layered element and discrete wave number method is used for computing the complete elastic response of a homogeneous and vertically heterogeneous half space. This method is based on representing the solutions of wave motion in the wavenumber domain by superposition of the normal modes. A rigid basement is added to the bottom of the structure so as to obtain the normal modes. Causality arguments are used to define time windows for which the responses are not affected by the rigid basement. A comparison is made between the solutions of Cagniard de Hoop method, DWFE by Olson et al., the locked mode approximation by Harvey and the present method.