

# 支点が動きうるサグ比の小さいケーブルの動的安定性

高橋和雄\*・鎌田智之\*\*・町田健一郎\*\*\*・松野 進\*\*\*\*

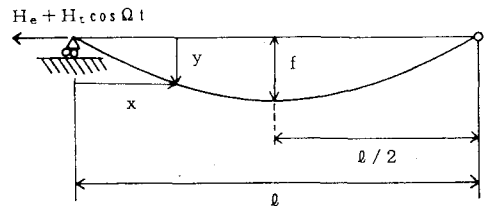
斜張橋の桁や塔の振動によってケーブルに振幅の大きな局部振動が発生する可能性があることが指摘されている。この振動の原因の一つに係数励振振動が考えられており、いくつかの研究が見られる。本研究では、ケーブルの支点が動きうる場合の動的安定の解析を行い、支点の変位が拘束された偏平ケーブルとの比較を行い、ケーブルに及ぼすサグ比、励振力、減衰力の影響を示した。

**Key Words** : vibration, cable, dynamic stability, forced vibration

## 1. まえがき

斜張橋の主桁あるいは塔が風荷重や交通荷重などによって振動するとケーブルに振幅の大きな局部振動が発生する可能性があることが指摘されている。この振動の原因に内部振動あるいは係数励振振動が考えられている。ケーブルと桁の連成振動の内部共振に関していくつかの研究<sup>1),2)</sup>が見られる。一方、著者らはIrvineらの偏平ケーブル理論<sup>3)</sup>を基礎とした単一ケーブルの動的安定性について解析している<sup>4),5)</sup>。これによって、ケーブルの動特性に及ぼすパラメータをもとに動的不安定領域を評価している。解析に用いた力学モデルはケーブルの支点が拘束されていると仮定している。しかし、構造物においてはケーブルの支点は完全拘束ではなく、ケーブルの支点が動くことによって、ケーブルに変動張力が与えられることが実態より近いので、ケーブルの支点が動きうる場合の解析が必要である<sup>6)</sup>。

そこで、本研究では、サグ比の小さいケーブル（以下、偏平ケーブルという）の支点が軸方向に動きうることを考慮して線形化した運動方程式を用いて動的安定解析を行う。まず運動方程式に Galerkin 法を適用して離散化を行い常微分方程式に変換する。この場合の運動方程式が非同次の Mathieu 方程式となるため、これまで著者が提案してきた解析的手法<sup>7)</sup>では対応が困難なため、数値シミュレーションを行う。ケーブルの支点が動きうる場合のケーブルの対称 1 次振動について、サグ比、励振力、減衰定数をパラメータとしての動的不安定領域を明らかにするとともに、支点の変位が拘束された場合の解析結果との比較検討を行う。



図一 支点が動きうる偏平ケーブルの一般図

## 2. 運動方程式

図一に示すような左支点のみが水平方向に動きうる偏平ケーブル（サグ比  $\gamma=f/l < 1/8$ ）の左支点に水平方向に変動軸力を受ける場合のケーブル張力の動的成分は、 $T_a = H_t \cos \Omega t$  で与えられる。このときのケーブルの運動方程式はケーブルの非線形運動方程式<sup>8)</sup>を線形化した次式で与えられる<sup>9)</sup>。

$$L(w) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (H_e + H_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_e H_t \cos \Omega t = 0 \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $w$  : 垂直方向の変位、 $t$  : 時間、 $m$  : ケーブルの単位長さあたりの質量、 $H_e$  : 初期水平張力、 $H_t$  : 変動水平張力の振幅、 $K_e = 8f/l^2$  : 放物線ケーブルの曲率、 $f$  : ケーブルのサグ、 $l$  : ケーブルのスパン、 $\Omega$  : 変動水平張力の円振動数。なお、鉛直方向の変位の境界条件は、 $w(0) = 0, w(l) = 0$  で与えられる。

支点が動きうる場合の変動軸力を受けるケーブルの運動方程式 (1) には、係数励振振動の項 (第 2 項) とケーブルのサグに起因する強制力の項 (第 3 項) が含まれる。つまり、式 (1) は非同次の Mathieu 方程式で与えられる。

## 3. 解 法

式 (1) の解を、次のように変数分離形に仮定する。

\* 正会員 工博 長崎大学工学部社会開発工学科教授 (〒852 長崎市文教町 1-14)  
 \*\* 学生員 長崎大学工学研究科  
 \*\*\* 正会員 工修 三菱重工業 (株)  
 \*\*\*\* 学生員 長崎大学工学研究科

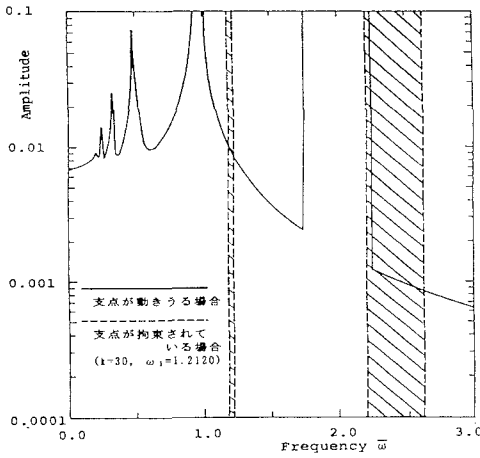


図-2 応答曲線 ( $\gamma=0.01, \bar{H}_l=0.3, h=0.005$ )

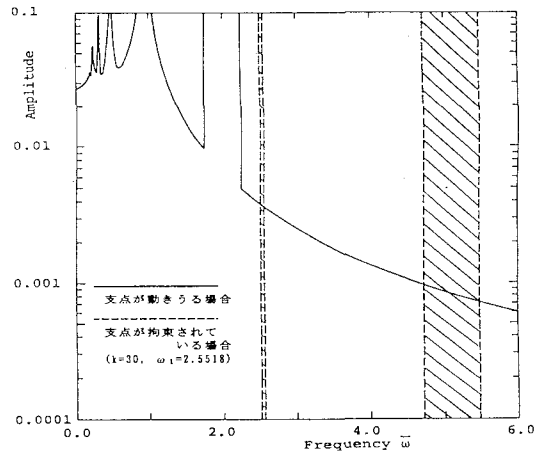


図-3 応答曲線 ( $\gamma=0.04, \bar{H}_l=0.3, h=0.005$ )

$$w = l \sum_{n=1} T_n(t) W_n(x) \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $T_n(t)$ ：未知の時間関数、 $W_n(x)$ ：境界条件を満足する座標関数。

上式の座標関数  $W_n$  として、支点が動きうるケーブルの固有モードを用いる。これは、式(1)において  $H_l=0$  とした固有振動解析より得られる。すなわち、

$$W_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots \dots \dots (3)$$

支点が動きうる場合のケーブルの固有振動形は、サグ比に無関係に弦の固有振動形と同じ正弦波で与えられる。また、固有振動数もサグ比に無関係に弦の固有振動数に一致する。一方、支点の変位が拘束された場合には、対称振動の固有振動数がサグ比によって変化して、固有振動数は特定のサグ比で増大し、振動モードが一段階高次のモードに遷移する。モードの遷移状況は縦波一横波伝播速度比  $k$  によって異なる<sup>9)</sup>。つまり、支点が動きうる場合と支点の変位が拘束された場合は全く固有振動特性が異なっている。

式(1)に式(2)を代入した方程式に Galerkin 法を適用し離散化した後、粘性減衰力を考慮すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \ddot{T}_n + 2h\omega_n \dot{T}_n + \omega_n^2 (1 + \bar{H}_l \cos \bar{\omega} \tau) T_n \\ + \frac{16(-1)^{n-1}}{n\pi^3} \gamma \bar{H}_l \cos \bar{\omega} \tau = 0 \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

ここに、 $\omega_n = n_n / \pi n_0$ ： $n$  次の無次元固有円振動数、 $n_0 = \sqrt{H_e \pi^2 / ml^2}$ ：弦の1次固有円振動数、 $n_n$ ：ケーブルの  $n$  次の固有円振動数、 $\gamma = f/l$ ：サグ比、 $\bar{\omega} = \Omega / n_0$ ：無次元加振振動数、 $\tau = n_0 t$ ：無次元時間、 $H_l = \bar{H}_l / H_e$ 、 $h$ ：減衰定数。

式(4)は各  $n$  について成立する1自由度系の非同次の Mathieu 方程式である。

式(4)より明らかなように、サグ比  $\gamma$  が0または逆

対称振動 ( $n=2, 4, 6, \dots$ ) の場合においては、強制振動の項(第4項)が0となり、サグのない弦の係数励振振動の場合と一致する。本研究では係数励振振動と強制振動の両方の効果をもつ対称1次振動について解析を行う。このとき、式(4)は次式ようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{T}_1 + 2h\omega_1 \dot{T}_1 + \omega_1^2 (1 + \bar{H}_l \cos \bar{\omega} \tau) T_1 \\ + \frac{32}{\pi^3} \gamma \bar{H}_l \cos \bar{\omega} \tau = 0 \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

式(5)は従来の動的安定解析<sup>9)</sup>を用いて解析的に解くことは不可能であるで、本研究では Runge-Kutta-Gill 法を用いて、初期変位0および初期速度0のもとに時間応答解析を行う。

#### 4. 数値結果

##### (1) 支点が動きうる場合の応答特性

支点が動きうる場合と文献4)、5)に示した支点の変位が拘束された場合の力学的特性の比較を行う。

図-2、3にサグ比  $\gamma=0.01, 0.04$ 、励振力  $\bar{H}_l=0.3$ 、減衰定数  $h=0.005$  について支点が動きうる場合と文献4)、5)の支点の変位が拘束されている場合の応答の比較を示す。縦軸はスパン長で無次元化した無次元応答振幅で、横軸は弦の1次の固有円振動数で無次元化した無次元加振振動数  $\bar{\omega}$  である。支点が動きうる場合では、強制項が存在するため、あらゆる振動数領域で振動が生じる。無次元加振振動数  $\bar{\omega}$  が無次元固有振動数  $\omega_1=1.0$  の2倍である2.0付近に発散振動が生じ、共振振動数  $\bar{\omega}=\omega_1=1.0$  および0.5付近などで応答振幅が大きくなる。 $\bar{\omega}=2\omega_1 (=2.0)$  付近の応答は単純共振の主不安定領域に対応し、 $\bar{\omega}=\omega_1=1.0$  付近の応答は強制振動による共振に対応している。

これに対して、支点の変位が拘束された場合では同次の Mathieu 方程式となる。このため、特定の振動数領

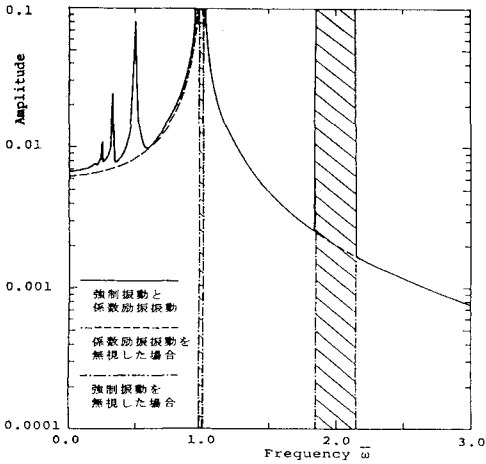


図-4 応答曲線 ( $\gamma=0.02, \bar{H}_1=0.3, h=0.005$ )

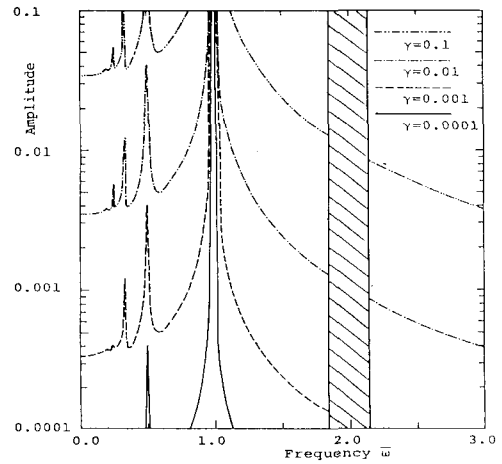


図-5 応答曲線 ( $\bar{H}_1=0.3, h=0.005$ )

域でのみ、係数励振振動が生じる。つまり、 $\bar{\omega}$ が固有振動数  $\omega_1$  および 2倍  $2\omega_1$  付近の加振振動数でのみ発散振動が生じ (図中の斜線部で振幅が $\infty$ )、それら以外の振動数領域では振動は発生しない。 $\bar{\omega}=2\omega_1$  付近で主不安定領域が存在し、 $\bar{\omega}=\omega_1$  付近に副不安定領域が存在している<sup>4),5)</sup>。なお、支点が拘束された場合は、サグ比および縦波横波伝播速度比  $k$  によって固有振動数が変化するため<sup>9)</sup>、これら主不安定領域および副不安定領域は、発生する領域の幅も変動する。また、式(5)と異なって運動方程式が多自由度系となるので支点が動きうる場合に現れない結合共振が現れる。図-4に、支点が動きうる場合の応答、係数励振振動の項(式(1)の第3項)を無視した場合の応答および強制振動の項(式(1)の第4項)を無視した場合の応答の比較を示す。係数励振振動の項(式(1)の第3項)を無視した応答は固有振動数 1.0 付近で応答振幅が大きくなる。強制振動の項を無視した応答は、 $\bar{\omega}$ が固有振動数 1.0 およびその2倍 2.0 付近でのみ発散振動が生じ、それら以外の振動数領域では振動は発散しない。支点が動きうる場合の全応答は、係数励振振動と強制振動の両方の特性を合わせた結果が現れる。さらに、両方の効果を考慮した場合に加えて  $\bar{\omega}=0.5, 0.33, 0.25$  付近で幅の狭い共振が生じる。

(2) サグ比の影響

図-5に、励振力  $\bar{H}_1=0.3$ 、減衰定数  $h=0.005$  の場合の応答振幅と無次元加振振動数との関係をサグ比をパラメータに示す。サグ比が極めて小さい場合は、 $\bar{\omega}=2.0$  付近の主不安定領域および  $\bar{\omega}=1.0, 0.5$  付近の副不安定領域において振幅が成長する。それら以外の無次元加振振動数では応答振幅は極めて小さい。サグ比が大きくなると、固有振動数の2倍の 2.0 付近および 1.0 付近で発散振動が生じるのに加え、それら以外の加振振動

数においても応答が生じる。特に、固有振動数近傍での応答振幅が大きくなる。サグ比が変化しても固有振動数の2倍 2.0 付近の発散振動が発生する振動数領域は変化しない。サグ比が大きくなると強制振動による応答が大きくなる。この原因は運動方程式に含まれる強制力の項が、サグ比の大きさに比例するためである。

(3) 励振力の影響

図-6に、サグ比  $\gamma=0.02$ 、減衰定数  $h=0.005$  の場合について応答振幅と無次元加振振動数  $\bar{\omega}$  との関係励振力  $\bar{H}_1$  をパラメータに示す。励振力  $\bar{H}_1$  が大きくなると、主不安定領域の幅が広がる。共振点近傍の応答振幅も増大する。

(4) 減衰力の影響

図-7に、サグ比  $\gamma=0.02$ 、励振力  $\bar{H}_1=0.3$  について応答振幅と加振振動数の関係を減衰定数  $h$  をパラメータ ( $h=0.0, 0.005, 0.05$ ) に示す。減衰力の影響は加振振動数  $\bar{\omega}$  が固有振動数 1.0 付近の強制振動の応答に現れる。しかし、固有振動数の2倍 2.0 付近の主不安定領域の幅を狭くする効果をもつが、振幅には減衰力の影響は現れない。

5. まとめ

本研究では、支点が軸方向に変位することを考慮した偏平ケーブルの動的安定を微小変形の範囲で解析を行ったものである。

得られた結果をまとめると次のとおりである。

1. サグがある偏平ケーブルでは軸方向の励振力によって強制振動と係数励振振動が同時に起こる。このため、あらゆる振動数領域で振動が生じる。係数励振振動と強制振動により、固有振動数の2倍付近で単純共振の主不安定領域において発散振動が発生し、固有振動数付近では共振により応答振幅が大きくなる。

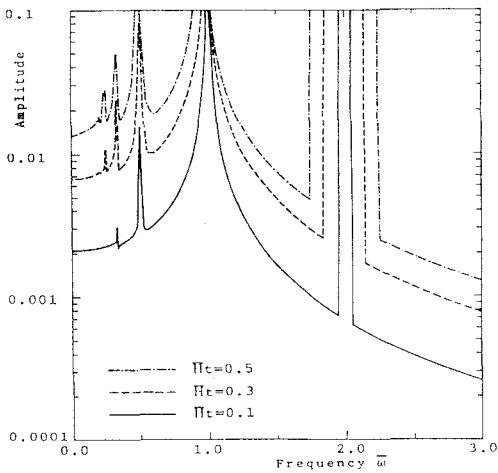


図-6 応答曲線 ( $\gamma=0.02, h=0.005$ )

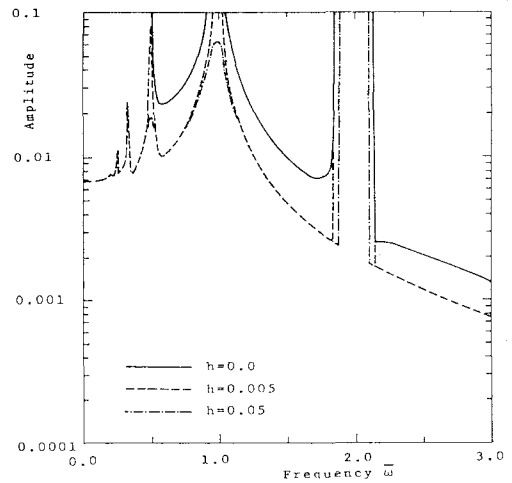


図-7 応答曲線 ( $\gamma=0.02, \bar{H}_l=0.3$ )

2. サグ比が変化しても主不安定領域が発生する振動数は変動しない。この結果は支点が動かない場合に不安定領域の位置や幅がサグ比によって変動する結果と著しく異なる。サグ比が大きくなると強制振動による応答振幅が大きくなる。

3. 減衰力は、固有振動数付近の応答振幅に影響を及ぼす。しかし、主不安定領域の振幅には、減衰力の影響があまり現われない。

ケーブルの力学特性は、本質的に幾何学的非線形性を有することである。したがって今後の課題は、支点が動くる偏平ケーブルの場合の安定を失った後の応答を明らかにするために、たわみによる非線形性を考慮して解析する必要がある。

なお、数値計算には長崎大学情報処理センターのVP-1200を使用したことを付記する。

参 考 文 献

1) 藤野・Warnitchai, P.・Pacheco, B.M. : ケーブル・はりモデルを用いた斜張橋の内部共振に関する実験と解析, 土木学会論文集, No.432/I-16, pp.109~118, 1991.  
 2) 長井・川畑・岸本・奥井・菊地 : ケーブルにモード座標

を用いた桁・ケーブル系の固有値および応答解析, 構造工学論文集, Vol.38 A, pp.63~72, 1992.

3) Irvine, H.M. and Caughey, T.K. : The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable, Proc. R. Soc. Lond, A 341, pp.299~315, 1974.  
 4) 高橋・瀬ノ瀬・町田・夏秋 : 変動軸力を受けるケーブルの動的安定性, 構造工学論文集, Vol.37 A, pp.921~928, 1992.  
 5) Takahashi, K. : Dynamic Stability of Cables Subjected to an Axial Periodic Load, Journal of Sound and Vibration, Vol.144, pp.323~330, 1991.  
 6) Perkins, N.C. : Discussion of Dynamic Stability of Cables Subjected to an Axial Periodic Load, Journal of Sound and Vibration, Vol.156, No.2, pp.363~365, 1992.  
 7) Takahashi, K. : Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol.85, No.2, pp.257~262, 1982.  
 8) Perkins, N.C. and More, C.D. : Three-dimensional Vibration of Travelling Elastic Cables, Journal of Sound and Vibration, Vol.114, No.2, pp.325~340, 1987.  
 9) 山口・伊藤 : 単一ケーブルの三次元線形自由振動, 土木学会論文集, 第286号, pp.29~36, 1979.

(1993.7.29 受付)

DYNAMIC STABILITY OF A SMALL-SAG CABLE WITH MOVABLE END

Kazuo TAKAHASHI, Tomoyuki KAMATA, Kenichiro MACHIDA and Susumu MATSUNO

Dynamic stability of planar, linear response of a suspended small-sag cable driven by harmonic end-load are presented. The basic equation is solved by a Galerkin method and the Runge-Kutta-Gill method. Unstable regions and response curves are shown for various sag-to-ratio and damping constants.