

Transfer Matrix法による移動荷重を受けた T型ラーメンの動的応答解析

岩瀬敏昭*・平島健一**

本研究は、主としてT型ラーメン構造を対象として、古典的なはり理論、Timoshenko理論およびLevinson理論の3理論を取り上げて、柱部の軸慣性を考慮する場合と考慮しない場合に対する固有振動数とモード形をtransfer matrix法で求め、動的応答解析を試みたものである。また、多くの数値例を通してtransfer matrixを用いる手法の実用性および有用性について考察し、多径間問題への適用性について検討したものである。

Key Words: dynamic responses, multispans rigid frame, transfer matrix method, classical, timoshenko's and levinson's theories, axial inertia

1. 緒 言

従来までに、はり構造要素を対象とした動的応答問題に関する論文が多くの研究者によって発表されて来た^{1)~6)}。例えば、はりを対象としたものとして古典的なはり理論を用いたはりの振動に対する微分方程式の一般解から任意の境界条件問題として、連続ばりの固有振動数と固有モードを決定し、連続ばりの動的応答を解析した論文がある⁷⁾。また、有限要素法を用いる数値的手法を利用したものとして多径間を有する連続ばりの動的応答について研究した論文がある⁸⁾。さらに、多径間を有する連続ばりの固有振動数とモードの決定にtransfer matrix法を用いる手法は支間数が増えてもtransferの階は増えないことから計算機の所要時間および容量の節約ができる。また、集中質量数を適切に選ぶことによって十分な精度が得られるといったような点で実用的な計算手法として適した方法である^{9)~11)}。この手法を用いて固有振動数とモード形が求められて、それらのモードの重ね合わせを行うことによって動的解析としての目的とする最終的な結果が得られる。1987年にWu & Daiらによりこの手法を用いて多径間を有する均一および不均一なはり断面について移動荷重の動的応答の解析結果が発表されているが¹²⁾、ここでは、Bernoulli-Eulerのはり理論に限定した解析がなされている。これに対して、はり構造の動的挙動に対する一般的傾向として、はり形状や支間とはり桁高の比の大きさによっては回転慣性およびせん断変形の影響を考慮しなくてはならなくなるがこれらの影響を考慮した理論としてTimoshenko理論が有名である。この理論では断面のせん断変形を断面にわたって一定と仮定するもので、このため古典理論を補

正するためのせん断補正係数を導入してやる必要がある、それらの具体的な断面形についての考察もいくつかなされている¹³⁾。他方、断面のせん断変形を一定と仮定することなく、また、上下表面の荷重条件を満足するような2次元変形の断面変形を考慮した新しいはり理論が1981年Levinsonにより提案された。この理論は支配方程式の次数や複雑さはTimoshenko理論とほぼ同程度であることから最近では、いわゆるLevinson理論¹⁴⁾という名称で各種の問題への適用が試みられている。著者らは多径間の連続ばりを対象として、古典的なはり理論、Timoshenko理論およびLevinson理論の3理論を取上げて、均一および不均一な断面を有するはりに対する固有振動数とモード形をtransfer matrix法で求めた動的応答解析の結果を発表している¹⁵⁾。

これに対し、はり-柱構造(以下、ラーメン構造)を対象とした動的応答問題に関する論文が多くの研究者によって発表され、幾つかの成書^{16)~18)}も刊行されてきたが、それらの解析における最大の困難性は多数の変数が含まれ、極めて複雑になることがある。そのために幾つかの制限を設けて単純化することが必要となるが、特に移動荷重の問題を取り扱う場合には相対的に、より単純な仮定速度として一定速度で動く集中荷重を考えると便利であり、それは、また、交通荷重のモデルとしても基本的な類似性がある、実用的な目的にもある程度合致するものである。ラーメン構造の動的応答問題の解決を体系的で幅広く導くための基本として、柱の縮みを考慮し、モード解析に基づいて、いくつかの変位と断面力に対する動的ならびに静的影響線を求めた結果を著者らは発表している¹⁹⁾。これと類似な問題を取り扱った論文としてKaraolides & Kounadisの柱の伸縮を考えない研究結果²⁰⁾およびKounadisの動的不安定性を議論したものなどが列挙できる^{21), 22)}。

本論文では、主としてT型ラーメン構造を対象とし

* 正会員 工修 日本理科大学教授 工学部土木工学科
(〒870-03 大分市大字一木田尾1727-162)

** 正会員 工博 山梨大学教授 工学部土木環境工学科

て上述した古典的はり理論, Timoshenko 理論および Levinson 理論の 3 理論を取り上げて, 柱部の軸慣性を考慮する場合と考慮しない場合について, はり部の支間長と桁高の比および柱部の断面積を変化する T 型ラーメンに対する固有振動数とモード形を transfer matrix 法で求め, 動的応答解析を試みたものである。

2. 理 論

(1) transfer matrix 法の概要

Fig.1 (a) に示した分布質量をもつラーメン構造を Fig.1 (b) のように幾つかの有限点に質量を分散集中させ, それらの集中質量間のはりおよび柱部分は剛性のみを有するような置換モデルのラーメン構造を考える。

Fig.1 (b) のはり部の集中質量 1, 2, 3, …… , n-1 および柱部の集中質量 $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \dots, \hat{j}$ の位置は station と呼ばれ, これらの station と station の間隔は field と呼ばれる。Fig.2 (a) は station i-1 と station i 間のはり部の 6 つのベクトル成分, 軸変位, たわみ, たわみ角, 曲げモーメント, せん断力および軸力をそれぞれ $u_i, y_i, \phi_i, M_i, V_i$ および N_i で表してある。また, station i-1 の右側の断面諸量の肩文字に R を, station i の左側のそれらに L をつけて表す。これらの要素につらひ条件を適用して行列表示すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} u \\ y \\ \phi \\ M \\ V \\ N \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_i/EA_i \\ 0 & 1 & -l_i & -I_i^2/2EI_i & -I_i^2/6EI_i + t_i + t_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i/EI_i & -I_i^2/2EI_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \\ \phi \\ M \\ V \\ N \end{bmatrix}_{i-1}^R \quad (1)$$

ここに, EI_i は曲げ剛性, CA_i はせん断剛性であり, A_i, κ, ν はそれぞれ断面積, せん断補正係数, ポアソン比を表す。また, $t_i = (\kappa l_i / GA_i)$, $t_i = \{(1 + \nu) l_i h^2 / 4EI_i\}$ であり, t_i はせん断変形の影響を考慮した場合で, t_i は断面奥行方向の変形の影響を考慮した場合を表す。 t_i, t_i を零とおけば古典理論の場合の field matrix, また, t_i のみ零とおけば Timoshenko 理論の場合に, また, t_i を零とおけば Levinson 理論の場合の field matrix がそれぞれ得られることになる。

Fig.2 (b) から定常振動状態を仮定すると station i での力のつらひと変位量が集中質量 m_i の左右で連続であることを考慮して行列表示式で表せば次のようになる。

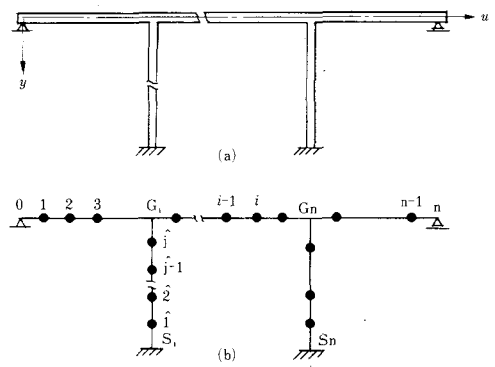


Fig.1 Actual and discrete systems of multispan rigid frame.

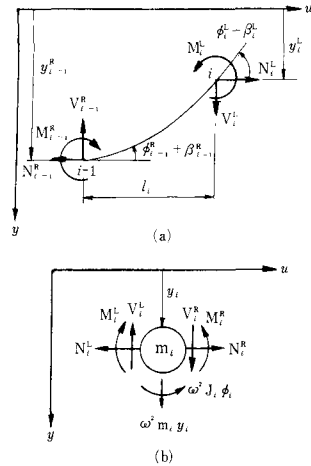


Fig.2 Free-body diagram for beam parts of i th station and i th field.

$$\begin{bmatrix} u \\ y \\ \phi \\ M \\ V \\ N \end{bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 m_i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \\ \phi \\ M \\ V \\ N \end{bmatrix}_i^L \quad (2)$$

ここに, m_i, J_i は, はりの集中質量, 回転慣性モーメント, $t_s = -\omega^2 J_i$ は, はり断面の回転慣性による効果を表す。また, $t_a = -\omega^2 m_i$ は, はり断面の軸慣性による効果を表す。 ω, m_i および J_i は固有円振動数, i 番目の station での質量および慣性モーメントを表す。式 (1), (2) で各はりの長さ l_i , 断面積 A_i , 断面二次モーメント I_i および各質点の質量 m_i をそれぞれの基準値 l_s, A_s, I_s および m_s との比を l_i, A_i, I_i および m_i' を用いて軸方向変位, たわみ, たわみ角, 曲げモーメント, せん断力および軸方向力を無次元化した行列関係式を次式のように書き表しておく。

$$\{\bar{Q}\}_i^L = [\bar{T}_R]_i \{\bar{Q}\}_{i-1}^R \quad (3)$$

$$\{\bar{Q}\}_i^R = [\bar{T}_S]_i \{\bar{Q}\}_i^L \quad (4)$$

Fig.3 (a) は、はり部と同様に station $\hat{j}-1$ と station \hat{j} 間の柱部の 6 つのベクトル成分として、軸方向変位、たわみ、たわみ角、曲げモーメント、せん断力および軸方向力をそれぞれ $\hat{u}_j, \hat{y}_j, \hat{\phi}_j, \hat{M}_j, \hat{V}_j$ および \hat{N}_j で表してある。また、station $\hat{j}-1$ の上側の断面諸量の肩文字に R を、station \hat{j} の下側のそれらに L をつけて表す。これらの要素につりあい条件を適用して、行列表示すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{y} \\ \hat{\phi} \\ \hat{M} \\ \hat{V} \\ \hat{N} \end{bmatrix}_j^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{h}_j/E\hat{A}_j \\ 0 & 1 & -\hat{h}_j & -\hat{h}_j^2/2E\hat{I}_j & -\hat{h}_j^3/6E\hat{I}_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \hat{h}_j/E\hat{I}_j & \hat{h}_j^2/2E\hat{I}_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \hat{h}_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{y} \\ \hat{\phi} \\ \hat{M} \\ \hat{V} \\ \hat{N} \end{bmatrix}_{j-1}^R \quad (5)$$

ここに、 $\hat{h}_j, \hat{A}_j, \hat{I}_j$ はそれぞれの柱の長さ、断面積、断面二次モーメントを表す。また、式 (5) を行列関係式に書き表す。

$$\{\hat{Q}\}_j^L = [\hat{T}_F]_j \{\hat{Q}\}_{j-1}^R \quad (6)$$

ここに、 $[\hat{T}_F]_j$ は station \hat{j} の field matrix である。

Fig.3 (b) から定常振動状態を仮定すると station \hat{j} での力のつり合いと変位量が集中質量点 \hat{m}_j の上下で連続であることを考慮して、行列表示式で表せば次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{y} \\ \hat{\phi} \\ \hat{M} \\ \hat{V} \\ \hat{N} \end{bmatrix}_j^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{y} \\ \hat{\phi} \\ \hat{M} \\ \hat{V} \\ \hat{N} \end{bmatrix}_j^L \quad (7)$$

ここに、 \hat{m}_j は柱の集中質量を表す。また、 $t_c = -\omega^2 \hat{m}_j$ は柱の軸慣性による効果を表す。また、式 (7) は次のような行列関係式に書き表せる。

$$\{\hat{Q}\}_j^R = [\hat{T}_S]_j \{\hat{Q}\}_j^L \quad (8)$$

ここに、 $[\hat{T}_S]_j$ は \hat{j} 番目の station における station matrix である。また、式 (5), (7) で基準値 l_s, A_s, I_s および m_s との比を $\hat{h}_j, \hat{A}_j, \hat{I}_j$ および \hat{m}_j を用いて軸変位、たわみ、たわみ角、曲げモーメント、せん断力および軸方向力を無次元化した行列関係式を書き表わしておく。

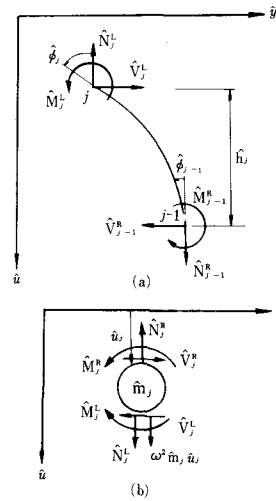


Fig.3 Free-body diagram for column parts of \hat{j} th station and \hat{j} th field.

$$\{\hat{Q}\}_j^L = [\hat{T}_F]_j \{\hat{Q}\}_{j-1}^R \quad (9)$$

$$\{\hat{Q}\}_j^R = [\hat{T}_S]_j \{\hat{Q}\}_j^L \quad (10)$$

Fig.1 (b) のようなモデル化した集中質量からなるラーメン系に対し、柱部については式 (9), (10) を組み合わせると式 (11) の関係式が得られる。

$$\{\hat{Q}\}_j^R = [\hat{T}_S]_j [\hat{T}_F]_j \{\hat{Q}\}_{j-1}^R = [\hat{T}_c]_j \{\hat{Q}\}_{j-1}^R \quad (11)$$

次に一般的な境界の場合について適用し得るように、はり と 柱 の 結 合 部 対 する station matrix を 求 め る²³⁾。

Fig.4 (a) に柱部上端の状態量ベクトル成分を示し、柱部の station matrix は次のようになる。

$$\{\hat{Q}\}_{Gk}^L = [\hat{T}_F]_{Gk} \prod_{S_k+1}^{Gk-1} [\hat{T}_r] \{\hat{Q}\}_{Gk}^R = [\hat{T}_R]_{Gk} \{\hat{Q}\}_{Gk}^R$$

ここに、

$$[\hat{T}_R]_{Gk} = [\hat{T}_F]_{Gk} \prod_{S_k+1}^{Gk-1} [\hat{T}_r] = \begin{bmatrix} \hat{T}_{11} & - & - & - & - & \hat{T}_{16} \\ \hat{T}_{21} & - & - & - & - & \hat{T}_{26} \\ \hat{T}_{31} & - & - & - & - & \hat{T}_{36} \\ \hat{T}_{41} & - & - & - & - & \hat{T}_{46} \\ \hat{T}_{51} & - & - & - & - & \hat{T}_{56} \\ \hat{T}_{61} & - & - & - & - & \hat{T}_{66} \end{bmatrix} \quad (12)$$

柱の基部 S_k の境界条件 $\hat{u}_s = \hat{y}_s = \hat{\phi}_s = 0$ を式 (12) に適用して、はり部と柱上部の結合点 G における断面力を消去すれば力と変位の関係が定まる。また、同図 (a) に示すように G 点でのはり部と柱部の力と変位成分を一致させ、同図 (b) に示すような断面力の平衡と変位の連続性を考慮すれば結合点 G での station matrix は次のようになる。

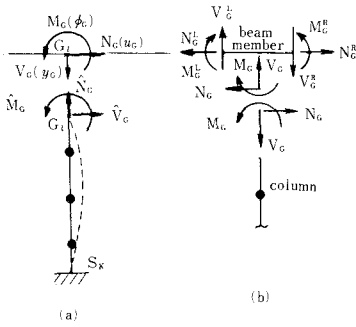


Fig.4 Force components at joint G.

また、水平移動のおこらないラーメン構造でははり部と柱部の結合断面の左側に境界条件 $u_6^0 = 0$ を設定してやればよい。式 (14), (15) に式 (16) の境界条件を適用してやれば最終的に次式が得られる。

$$\det \begin{bmatrix} 1-G_1 & 1-G_1 & 1-G_1 \\ \bar{T}_{13} & \bar{T}_{15} & \bar{T}_{16} \\ 0 & \bar{T}_{23} & 0 \\ \bar{T}_{43} & \bar{T}_{45} & \bar{T}_{46} \end{bmatrix} = 0 \dots \dots \dots (17)$$

上式が考えている問題に対する円振動数方程式である。したがって、式 (17) から固有円振動数 ω が得られるとともに 6 つの初期状態変数が上式と式 (15) から次のように決定される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_v^0 &= \bar{T}_v \cdot \bar{\phi}_v^0 \\ \text{ここに、} \\ \bar{T}_v &= \left(\bar{T}_{16} \ 0 \ \bar{T}_{43} - \bar{T}_{13} \ 0 \ \bar{T}_{46} \right) / \left(\bar{T}_{15} \ 0 \ \bar{T}_{45} - \bar{T}_{16} \ 0 \ \bar{T}_{46} \right) \\ \bar{N}_n^0 &= \bar{T}_n \bar{\phi}_n^0 \\ \text{ここに、} \\ \bar{T}_n &= \left(\bar{T}_{15} \ 0 \ \bar{T}_{43} - \bar{T}_{13} \ 0 \ \bar{T}_{46} \right) / \left(\bar{T}_{16} \ 0 \ \bar{T}_{45} - \bar{T}_{15} \ 0 \ \bar{T}_{46} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

いま、 $\bar{\phi}_v^0 = 1$ とおくと式 (18) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \{ \bar{Q} \}_0^0 &= \{ \bar{u}, \bar{y}, \bar{\phi}, \bar{M}, \bar{V}, \bar{N} \}_0^0 \\ &= \{ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \bar{T}_v \ \bar{T}_n \}_0^0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

(3) モードの解析

固有円振動数が式 (17) より求められ、次に質量 matrix に関するモードの基準直化を行う。前述のような方法に従って集中質量点 i の transfer matrix を求めると次式のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} \{ \bar{Q} \}_i^0 &= [\bar{T}_s]_i [\bar{T}_F]_i \dots [\bar{T}_s]_1 [\bar{T}_F]_1 \{ \bar{Q} \}_0^0 = \bar{\Pi}^{1-i} \{ \bar{Q} \}_0^0 \\ \text{ここに、} \\ \bar{\Pi}^{1-i} &= [\bar{T}_s]_i [\bar{T}_F]_i \dots [\bar{T}_s]_1 [\bar{T}_F]_1 = \begin{bmatrix} \bar{T}_{11} & - & - & - & - & \bar{T}_{16} \\ \bar{T}_{21} & - & - & - & - & \bar{T}_{26} \\ \bar{T}_{31} & - & - & - & - & \bar{T}_{36} \\ \bar{T}_{41} & - & - & - & - & \bar{T}_{46} \\ \bar{T}_{51} & - & - & - & - & \bar{T}_{56} \\ \bar{T}_{61} & - & - & - & - & \bar{T}_{66} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

また、式 (18) と (20) から変位モード matrix が次式から求まる。

$$\{ \bar{y} \}_{1-i} = [\bar{T}_{23} \ \bar{T}_{25} \ \bar{T}_{26}] \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{T}_v \\ \bar{T}_n \end{bmatrix} \dots \dots \dots (21)$$

集中質量に対する規準化係数は次式から得られる。

$$M = \sum_{i=1}^n \bar{y}_n^2 m_i \dots \dots \dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \{ Q \}_i^0 &= [D] \{ Q \}_0^0 \\ \text{ここに} \\ [D] &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ d & I \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

(2) 円振動数方程式

Fig.1 に示すような多径間ラーメンの両端に対する transfer matrix は最終的に次のような式になる。

$$\left. \begin{aligned} \{ \bar{Q} \}_n^0 &= [\bar{T}_F]_n \prod_{r=1}^{n-1} [\bar{T}_l]_r \{ \bar{Q} \}_0^0 = [\bar{T}_l]_0 \{ \bar{Q} \}_0^0 \\ \text{ここに、} \\ [\bar{T}_l]_0 &= [\bar{T}_F]_n \prod_{r=1}^{n-1} [\bar{T}_l]_r = \begin{bmatrix} 0 & \bar{T}_{11} & - & - & - & 0 & \bar{T}_{16} \\ 0 & \bar{T}_{21} & - & - & - & 0 & \bar{T}_{26} \\ 0 & \bar{T}_{31} & - & - & - & 0 & \bar{T}_{36} \\ 0 & \bar{T}_{41} & - & - & - & 0 & \bar{T}_{46} \\ 0 & \bar{T}_{51} & - & - & - & 0 & \bar{T}_{56} \\ 0 & \bar{T}_{61} & - & - & - & 0 & \bar{T}_{66} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

また、はり部の最左端支点の右側断面と次の柱部とはり部の結合点の左側断面の transfer matrix は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \{ \bar{Q} \}_1^0 &= [\bar{T}_F]_{G1} \prod_{r=1}^{G1-1} [\bar{T}_l]_r \{ \bar{Q} \}_0^0 = [\bar{T}_R] \{ \bar{Q} \}_0^0 \\ \text{ここに、} \\ [\bar{T}_R] &= [\bar{T}_F]_{G1} \prod_{r=1}^{G1-1} [\bar{T}_l]_r = \begin{bmatrix} 1-G_1 & - & - & - & - & 1-G_1 \\ \bar{T}_{11} & - & - & - & - & \bar{T}_{16} \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ 1-G_1 & - & - & - & - & 1-G_1 \\ \bar{T}_{61} & - & - & - & - & \bar{T}_{66} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

両端が単純支持の場合には次のような境界条件を設定してやればよい。

$$\bar{u}_6^0 = \bar{y}_6^0 = \bar{M}_6^0 = \bar{y}_n^0 = \bar{M}_n^0 = 0 \dots \dots \dots (16)$$

さらに、集中質量に対する規準直交化されたモード matrix は次式によって求められる。

$$[z] = M^{-1/2} (\bar{y})_{1 \sim i} \dots \dots \dots (23)$$

3. 動的応答解析

(1) 運動方程式とその解

振動系の一般的な運動方程式を行列表示で書くと次のようになる。

$$[m] \{\ddot{y}\} + [C] \{\dot{y}\} + [k] \{y\} = [F] \dots \dots \dots (24)$$

ここに、 $[m]$ 、 $[C]$ および $[k]$ は質量、減衰および剛性 matrix であり、 $\{\ddot{y}\}$ 、 $\{\dot{y}\}$ および $\{y\}$ は加速度、速度および変位ベクトルである。また、 $\{F\}$ は外力ベクトルである。式 (24) は文献 15) で示したと同様な考えで一般化座標 $q(t)$ を求めれば次式のように変形される。

$$\ddot{q}_r(t) + 2\zeta_r \omega_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = N_r(t) \dots \dots \dots (25)$$

式 (25) の解は一般に次式で与えられる。

$$q_r(t) = e^{-\zeta_r \omega_r t} \left[\frac{\dot{q}_r(0) + q_r(0) \zeta_r \omega_r}{\omega_{Dr}} \sin \omega_{Dr} t + q_r(0) \cos \omega_{Dr} t \right] + \frac{1}{\omega_{Dr}} \int_0^t N_r(\tau) e^{-\zeta_r \omega_r (t-\tau)} \sin \omega_{Dr} (t-\tau) d\tau \dots \dots (26)$$

ここに、 $\omega_r = \omega_{rr}$

$$\omega_{Dr} = \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \dots \dots \dots (27)$$

$$q_r(0) = \{z^r\}^T [m] \{y(0)\} \dots \dots \dots (28)$$

$$\dot{q}_r(0) = \{z^r\}^T [m] \{\dot{y}(0)\} \dots \dots \dots (29)$$

ここで、後述のように外力を次のように仮定する。

$$N_r(\tau) = R + S\tau, 0 \leq \tau \leq t \dots \dots \dots (30)$$

このとき式 (26) は次のように書き直される。

$$q_r(t) = e^{-\zeta_r \omega_r t} \left[\frac{\dot{q}_r(0) + q_r(0) \zeta_r \omega_r}{\omega_{Dr}} \sin \omega_{Dr} t + q_r(0) \cos \omega_{Dr} t \right] + \frac{1}{\omega_{Dr} \omega_r^2} \{ e^{-\zeta_r \omega_r t} [-S \sin(\omega_{Dr} t - 2\lambda_r) - R \omega_r \cos(\omega_{Dr} t - \lambda_r)] + (R + St) \omega_{Dr} - 2S \zeta_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \} \dots \dots \dots (31)$$

$$\dot{q}_r(t) = e^{-\zeta_r \omega_r t} \left[\dot{q}_r(0) \cos \omega_{Dr} t - \frac{\omega_r \dot{q}_r(0) + \zeta_r \dot{q}_r(0)}{\sqrt{1 - \zeta_r^2}} \sin \omega_{Dr} t \right] + \frac{1}{\omega_{Dr} \omega_r} \{ e^{-\zeta_r \omega_r t} [-S \cos(\omega_{Dr} t - \lambda_r) + R \omega_r \sin \omega_{Dr} t] + S \sqrt{1 - \zeta_r^2} \} \dots \dots \dots (32)$$

$$\ddot{q}_r(t) = e^{-\zeta_r \omega_r t} \left\{ \frac{\zeta_r \omega_r^2 \dot{q}_r(0) + (2\zeta_r^2 - 1) \omega_r \dot{q}_r(0)}{\sqrt{1 - \zeta_r^2}} \sin \omega_{Dr} t - [\omega_r^2 \dot{q}_r(0) + 2\zeta_r \omega_r \dot{q}_r(0)] \cos \omega_{Dr} t \right\}$$

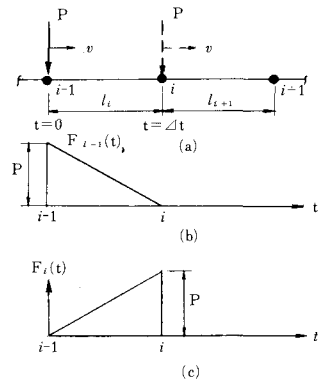


Fig.5 Diagram of constant moving load P from station to during $t=0 \sim \Delta t$.

$$+ \frac{1}{\omega_{Dr}} e^{-\zeta_r \omega_r t} [S \sin \omega_{Dr} t + R \omega_r \cos(\omega_{Dr} t + \lambda_r)] \dots \dots \dots (33)$$

ここに、 $\lambda_r = \tan^{-1} \zeta_r / \sqrt{1 - \zeta_r^2}$ である。

各モードごとの応答が式 (26) および (31) によって求められれば変位、速度および加速度が文献 15) で示した式 (31)~(33) によってモード重ね合わせ法による応答を表すことになる。

(2) 外力の時間軌跡

Fig.5 に示す単一集中荷重 P が一定速度 v で移動するものとすれば station $i-1$ から i に対し時間 $t=0 \sim \Delta t$ の間隔の時間軌跡は式 (30) の仮定を用いて次式で与えられる。

$$F_w(t) = R_w + S_w t \dots \dots \dots (34)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} F_{w-1}(t) &= P - \frac{P}{\Delta t} t : w = i-1 \\ F_w(t) &= \frac{P}{\Delta t} t : w = i \\ F_w(0) &= 0 : w \neq i-1, i : i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

解析を簡単にするために、いま、 $l_i = l$ 一定、 $\Delta t_i = l_i / v = \Delta t$ 一定とおくと式 (35) は次のような境界条件が成立する。

$$F_{i-1}(0) = P, F_i(0), F_{i-1}(\Delta t) = 0, F_i(\Delta t) = P \dots \dots (36)$$

すべての Station 上の P は station $i-1$ と i および時間間隔 $t=0 \sim \Delta t$ 間以外は零である。また、式 (35) は次のように書き直される。

$$\left. \begin{aligned} R_i &= P : S_{i-1} = -\frac{P}{\Delta t} \\ R_i &= 0 : S_i = \frac{P}{\Delta t} \\ R_w S_w &= 0 : w \neq i-1, i : i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

よって式 (35) は単一移動荷重 P による各々の station 上の P の時間軌跡を与えるものである。

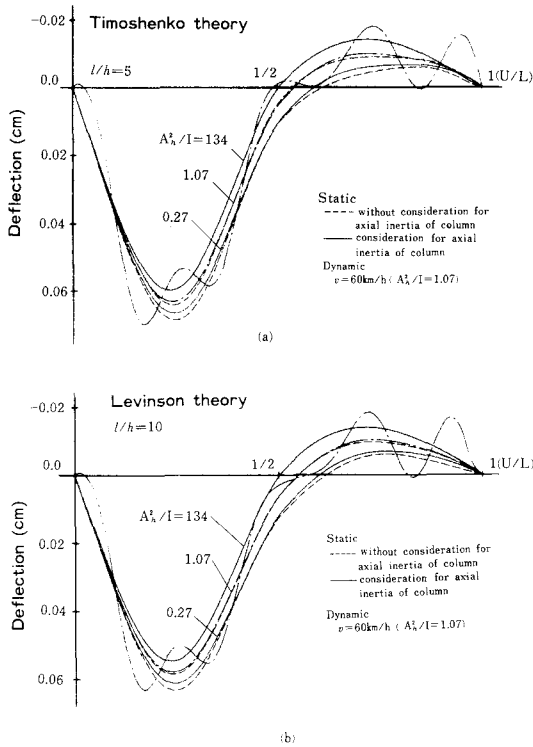


Fig.6 Responses of deflection at the center of first span for T-type rigid frame.

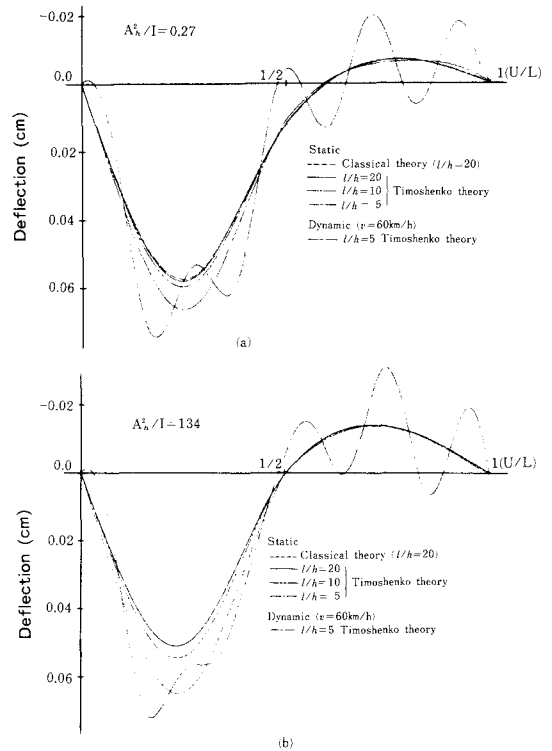


Fig.7 Responses of deflection at the center of first span for T-type rigid frame.

4. 数値計算例

本論文の計算例として、減衰を考慮しない場合で均一なはり断面で、柱の断面積を変化させて、柱の軸慣性を考慮しない場合と考慮する場合の L 型および T 型ラーメンを対象とし、単一集中荷重が一定速度で移動する場合の動的応答解析を行う。

はり部の集中質量数について文献(15)で採用したものと同一径間 17 個を用いた。柱部の集中質量数は 5 を採用した。なお、はり部の諸数値として $P=9.8 \times 10^3 \text{N}$, $L=40 \text{m}$ (各支間 20 m), $EI=1.96 \times 10^9 \text{Nm}^2$, 単位長さ当たりの質量 $\mu=1.0 \times 10^3 \text{kg/m}$, ポアソン比 $\nu=0.29$, せん断補正係数 $\kappa=5/6$, 柱部については高さ $H=20 \text{m}$, 断面積 $A_k=5000, 10000, 112000 \text{cm}^2$ の 3 種類で、曲げ剛性 EI および単位長さ当たりの質量 μ は、はり部と同じものを採用した。また、 μ および EI については一定として、はり部の l/h と柱の A_k^2/I を各種変化させて数値計算を実施した。

Fig.6 (a) は T 型ラーメンで、はり断面が $l/h=5$ を対象とし、Timoshenko 理論で柱の $A_k^2/I=0.27, 1.07, 134$ の 3 種類に対し、柱の軸慣性を考慮する場合としない場合について本法で求めた静的変位の比較を示したものである。また、 $A_k^2/I=1.07$ で柱の軸慣性を考慮し、

一定移動速度 $v=60 \text{kg/h}$ の場合を Timoshenko 理論による本法で求めた動的変位も示している。同図 (b) は $l/h=10$ を対象とし、Levinson 理論による本法で求めたものである。両図とも第一支間中央位置での変位を示しているが、 A_k^2/I の値を大きくとれば、柱の軸慣性を考慮する場合は考慮しない場合の結果に収束していくことが観察される。 A_k^2/I の値を小さくとれば、柱の軸慣性を考慮する場合は考慮しない場合より、柱の曲げ変形が軸慣性によって減少させられるため小さな値を示すことになる。したがって、 l/h の値に関係なく A_k^2/I の値が小さくなると柱の軸慣性の影響が現れ、ほぼ A_k^2/I が 134 になると柱の軸慣性の影響を考慮しなくてもよいことが推察される。軸慣性を考慮しない場合は考慮する場合より $A_k^2/I=0.27, l/h=5$ の Timoshenko 理論で 4.3%, $l/h=10$ の Levinson 理論で 4.8% それぞれ大きな変位を示している。動的変位は、両図とも静的変位を基準に上下に変動していることがわかる。

Fig.7 に、柱の軸慣性を考慮した場合の Timoshenko 理論で $l/h=5, 10, 20$ の 3 種類と古典理論で $l/h=20$ に対し、本法で求めた静的変位の比較を示したものである。また、 $l/h=5$ で一定移動速度 $v=60 \text{km/h}$ の場合を Timoshenko 理論による本法で求めた動的変位も示している。 $A_k^2/I=0.27$ の第一径間中央位置での変位を

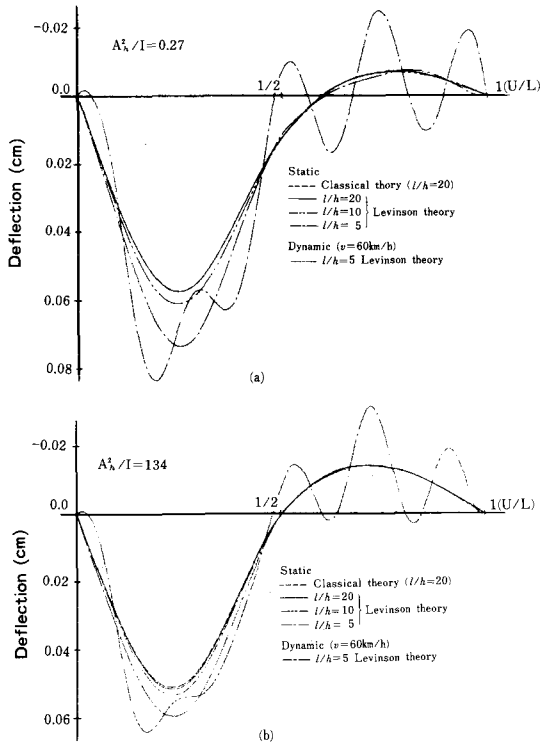


Fig.8 Responses of deflection at the center of first span for T-type rigid frame.

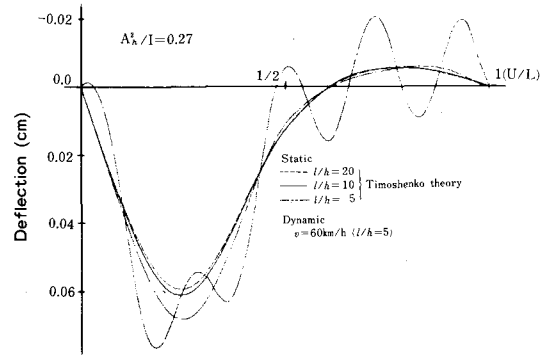


Fig.9 Responses of deflection at the center of first span for T-type rigid frame.

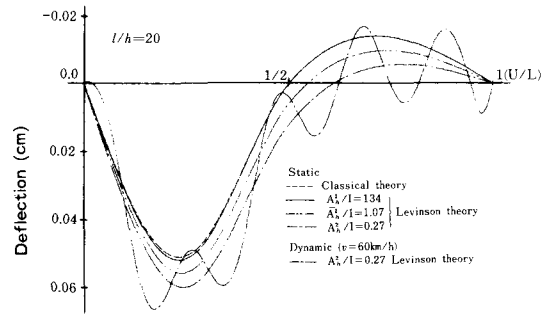


Fig.10 Responses of deflection at the center of first span for T-type rigid frame.

図 (a) に、 $A_k^2/I=134$ の第一径間中央位置での変位を図 (b) にそれぞれ示したが、両図とも l/h の値を大きくとれば古典理論の結果に収束していくことが観察でき、ほぼ $l/h=20$ 程度にとれば古典理論の結果に一致する。したがって、 $l/h=20$ 程度以上になるとはり部のせん断変形、回転慣性の影響は現れず、古典理論のレベルで考えてもよいことが推察される。逆に、 l/h が小さくなったいわゆる deep beam に近づくとこれらの影響は大きくなって、 $A_k^2/I=0.27$ 、 $l/h=5$ のとき古典理論で求めた結果の 15% 大きな変位を示している。第一径間中央位置の変位は、同図 (b) の $A_k^2/I=134$ ではりと柱の結合付近ではほぼ零を示すが、同図 (a) の $A_k^2/I=0.27$ ではいくらかの変位を示すことが観察される。また、動的変位は両図とも静的変位を基準に上下に変動していることがわかる。

Fig.8 は Fig.7 と同じ形状のもので、ここでは Timoshenko 理論の代わりに Levinson 理論を採用して本法によって求めた静的変位および動的変位を示したものである。この結果は、ほぼ Fig.7 の Timoshenko 理論のそれと同様の結果となるが、具体的に $A_k^2/I=0.27$ 、 $l/h=5$ のとき古典理論と比較して 27.5% 大きな変位を示し、この値は Timoshenko 理論のときよりある程度の大きな値となっている。

Fig.9 は、柱の軸慣性を考慮しない場合で Fig.7 (a) と同じ形状のものである。傾向としては Fig.7 (a) の場合に類似している。

Fig.10 は、柱の軸慣性を考慮しない場合の Levinson 理論で $l/h=20$ の $A_k^2/I=0.27$ 、1.07、134 の 3 種類に対し $A_k^2/I=134$ で古典理論に対し、本法で求めた静的変位の比較を示したものである。また、 $A_k^2/I=0.27$ で一定速度 $v=60$ km/h の場合を Levinson 理論による本法で求めた動的変位も示している。柱の軸慣性を考慮する場合と同じように A_k^2/I の値が大きくなると古典理論の結果に収束することが観察でき、ほぼ A_k^2/I が 134 程度になると古典理論レベルで求めてもよいことが推察される。また、 A_k^2/I の値を小さくとれば、柱の変位は増大することも確認される。動的変位は静的変位を基準に上下に変動していることがわかる。

以上までによって、T 型ラーメンに対し、本法による解析の妥当性、有効性を示したが、以下では、移動荷重が作用する場合の動的効果を評価するために通常よく用いられる次のような動的増幅率 δ を定義する。

$$\delta = \frac{W_{d, \max} - W_{s, \max}}{W_{s, \max}} \times 100 (\%) \dots \dots \dots (38)$$

ここに、 $W_{d, \max}$ および $W_{s, \max}$ はそれぞれ動的応答の最大値および静的応答の最大値を表す。

Fig.11 に質点数として 17 個に取った場合の L 型ラーメンについて横軸に移動速度 v を、また、パラメータと

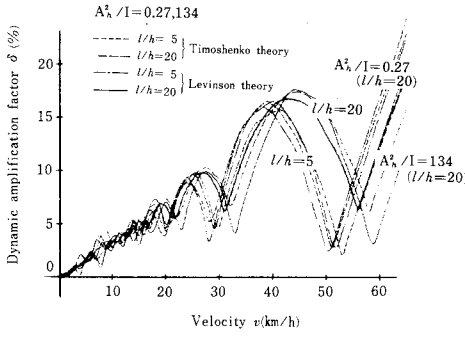


Fig.11 Relation between dynamic amplification factor δ and moving load velocity v for L-type rigid frame.

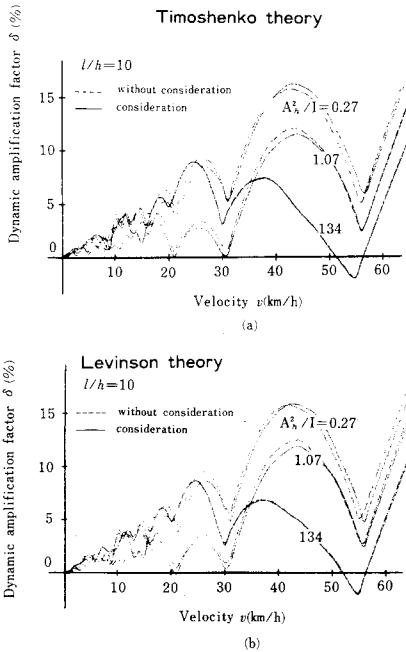


Fig.12 Relation between dynamic amplification factor δ and moving load velocity v at the center of first span of T-type rigid frame by Timoshenko and Levinson theories.

して l/h , A_k^2/I をとって Timoshenko 理論, Levinson 理論を本法で求めた動的増幅率の比較を示した. $l/h=5, 20$ とも A_k^2/I が 134 になると Timoshenko 理論と Levinson 理論の差が小さく, 特に, $l/h=20$ になるとほとんど一致することが確認される. また, 両理論とも時速 50 km/h までにピークの山がいくつも現れている.

Fig.12 に $l/h=10$ で柱の軸慣性を考慮する場合としない場合について, パラメータとして A_k^2/I の値を 0.27, 1.07, 134 の 3 種類に対する動的増幅率の比較を示した. 図 (a) に Timoshenko 理論を, 図 (b) に Levinson 理論を示したが, 両図とも A_k^2/I の値が大きくなれば柱の軸慣性を考慮する場合としない場合が接近して, ほぼ A_k^2/I が 134 程度になるとほとんど一致することが観察

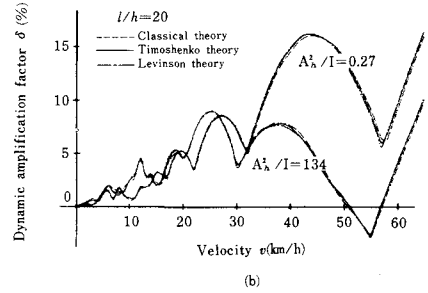
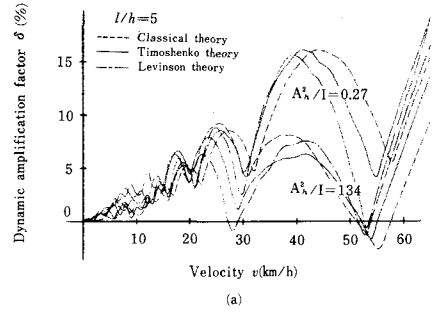


Fig.13 Relation between dynamic amplification factor δ and moving load velocity v for T-type rigid frame.

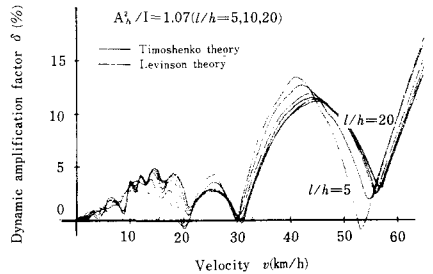


Fig.14 Relation between dynamic amplification factor δ and moving load velocity v for T-type rigid frame.

される. また, L 型ラーメンの場合と同様に時速 50 km/h までにピークの山がいくつも現れ, なかでも A_k^2/I の値が 0.27 場合が一番大きくなっている.

Fig.13 (a) は $l/h=5$ の軸慣性を考慮する場合で A_k^2/I の値を 0.27, 134 について古典理論, Timoshenko 理論および Levinson 理論の 3 理論に対し, 本法で求めた動的増幅率の比較を示した. この図から A_k^2/I の値が小さくなると増幅率が大きくなることが確認され, 3 理論とも同じような傾向を示している. また, 時速 50 km/h までにピークの山がいくつも現れる. 同図 (b) は $l/h=20$ に対し, 同図 (a) と同じ形状のものである. この図から l/h の値を 20 程度にすると 3 理論ともほぼ一致した動的増幅率を示すことが確認される.

Fig.14 は軸慣性を考慮する場合で A_k^2/I が 1.07 に対し, パラメータとして $l/h=5, 10, 20$ について本法で求めた動的増幅率を示したものである. 両理論とも同じような傾向を示し, 時速 50 km/h までにピークの山がいくつも現れる. なかでも Levinson 理論で $l/h=5$ の

場合が一番大きな値を示している。

5. 結 言

本論文は、多径間連続ラーメンの動的応答解析を目的として、transfer matrix を用いる手法の実用性および有用性について考察したものである。得られた数値結果から次のようなことが指摘できる。

(1) はり部の l/h が比較的小さい、いわゆる deep beam に近い場合は、せん断変形、回転慣性およびポアソン比の影響が大きく現れることを定量的に提示した。なかでも A_0^2/I が小さな値のときに影響は大きくなることも確認された。

(2) A_0^2/I の値を大きくとれば、はり部の変位に柱の軸慣性の影響は現れないことが確認された。すなわち、 A_0^2/I の値をほぼ 134 程度になると柱の軸慣性を考慮しなくてもよいことが推測される。

(3) $l/h=20$ 程度以上の細長いはり部になると古典理論、Timoshenko 理論および Levinson 理論の動的増幅率(式(38)参照)は著者らの既発表論文と同じように通常の予想どおり、ほとんど一致して差は見られない。

(4) 動的増幅率は、一般に荷重速度の増大につれて増加する傾向になる。また、 A_0^2/I の値が増大すれば動的増幅率の増大割合は、相対的に減少する傾向になる。

この論文の数値計算は、日本文理大学情報センターの大型電子計算機 M 770/20 を使用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Fryba, L. : Vibration of Solid and Structures under Moving Loads, Noordhoff International Publishing, Groningen, The Netherland, 1972.
- 2) Hirai, I. : Fundamental Equations of Beam Structures under the Moving Loads and Its Application, Proceedings of Japan Society of Civil Engineers, No.90, pp.29~36, Feb., 1963.
- 3) Yoshida, D.M. and Weaver, W. : Finite Element Analysis of Beam and Plates with Moving Loads, Publications, International Association for Bridges and Structural Engineering, Vol.31-I, pp.179~195, 1971.
- 4) Blezwas, T.E., Feng, C.C. and Ayre, R.S. : Dynamic Interaction of Moving Vehicles and Structures, Journal of Sound and Vibration, Vol.67, No.4, pp.513~521, Dec., 1979.
- 5) Timoshenko, S.P. and Young, D.H. : Vibration Problem in Engineering. John Wiley and Sons Inc., New York, N.Y., 1974.
- 6) Warburton, G.B. : The Dynamical Behavior of Structures.

- 2nd ed., Pergamon Press, Ltd., Oxford, England, 1976.
- 7) Hayashikawa, T. and Watanabe, N. : Dynamic Behavior of Continuous Beam with Moving Loads, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol.107, No.EM1, Feb., 1981.
- 8) Sridharam, N. and Malik, A.K. : Numerical Analysis of Vibration of Beam Subjected to Moving Loads, Journal of Sound and Vibration, Vol.65, No.1, pp.147~150, July, 1979.
- 9) Clough, R.W. and Penzien, J. : Dynamics of Structures, McGraw-Hill, International Book Company, New York, N.Y., 1979.
- 10) Meirovitch, L. : Analytical Methods in Vibrations, Macmillan Company, London, U.K., 1967.
- 11) Pilkey, W.D. and Chang, P.Y. : Modern Formulas for Statics and Dynamics, McGraw-Hill Book Company, New York, N.Y., 1978.
- 12) Wu, J.S. and Dai, C.W. : Dynamic Responses of Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.113, No.3, pp.458~474, 1987.
- 13) Cowper, G.R. : The Shear Coefficients in Timoshenko Beam Theory, J. Appl. Mech., pp.335~340, 1966.
- 14) Levinson, M. : A New Rectangular beam Theory, Journal of Sound and Vibration, Vol.74, No.1, pp.81~87, 1981.
- 15) 岩瀬敏昭・平島健一 : Transfer Matrix 法による移動荷重を受けた連続ばりの動的応答解析, 土木学会論文集, 第422号, 1990年10月.
- 16) Kolousek, V. : Dynamics in Engineering Structures, Butterworths, 1973.
- 17) Reismann, H. and P.S. Pawlik : Elastokinetics, An Introduction to the Dynamics of Elastic Systems, West Pub. Co., 1974.
- 18) Henrych, J. : The Dynamics of Arches and Frames, Elsevier, 1981.
- 19) 岩瀬敏昭・平島健一 : 移動集中荷重を受けたはり一柱構造の動的応答, 日本文理大学紀要, pp.26~36, 1985年.
- 20) Karaolides, Ch. K. and Kounadis, A.N. : Forced Motion of a Simple Frame Subjected to a Moving Force, J. Sound Vib., 88(1), pp.37~45, 1983.
- 21) Kounadis, A.N. : Nonlinear Sway-Buckling of an Eccentrically Loaded Frame of Two Timoshenko-Bars, Ing. Arch., 47(1978), pp.363~369.
- 22) Kounadis, A.N. : Dynamic Snap-Through Buckling of a Timoshenko Two Bar Frame under a Suddenly Applied Load, ZAMM, 59(1979), pp.523~531.
- 23) Pestel, E.C. and Leckie, F.A. : Matrix Methods in Elasto Mechanics, McGraw Hill, International Book Company, New York, N.Y., 1978.

(1993.4.5 受付)

TRANSFER MATRIX ANALYSIS OF DYNAMIC RESPONSES OF T-TYPE RIGID FRAME UNDER MOVING LOADS

Toshiaki IWASE and Ken-ichi HIRASHIMA

In the present paper, the analytical treatments of dynamic behavior of rigid frame with moving loads are shown by using of transfer matrix method to determine the natural frequencies and mode shapes of the rigid frames and application of the mode superposition technique.

We adopt the analytical theories such as Classical, Timoshenko's and Levinson's theories for the computations of dynamic behavior T-type and multispans rigid frame, in which the latter two theories take into consideration of the shear deformation and rotatory inertia for beam parts.

The accuracy, dynamic responses and dynamic magnification factor of multispans rigid frame are illustrated through several numerical results in the case of considering axial inertia for column parts and without considering it by use of the three theories.
