

膜構造におけるリンクリング現象評価に関する一考察

遠藤典男*・瀬川信哉**・笹川 明***・
三井康司***

本文は近年注目されている膜構造物の中でもエア・ビームを対象を絞り、膜材料特有の崩壊現象であるリンクリング（しわ状座屈）現象を定式化し、有限要素法に導入した数値解析手法を提案するものである。すなわち、要素内に引張応力のみが存在するときには等方弾性体として、圧縮応力が存在する場合には異方性、非線形材料を考慮した解析を行うものである。また、エア・ビームに剛性を付与するための内圧に対する言及も併せて行っている。解析例としてエア・ビーム曲げ実験に対する数値シミュレーションを行い、実験結果との比較検討によりその有効性を検証している。

Key Words : membranes, air-beam, wrinkling phenomena, non-linear analysis, inner pressure, FEM

1. 緒 論

構造工学の分野において軽量化を考慮した膜構造¹⁾は、経済性、機能性の面で優れているという観点から注目されている。土木工学の分野においても、コンクリート打設時の型枠、あるいは雨水防止、冬季寒冷地で保温用の囲い等が考えられている。

膜構造は、種々の方法で張力を導入することにより剛性が与えられる構造形式である。このような膜構造は張力の導入法により、1) 膜材を拡張させ骨組構造物等に取り付けて、張力を与えるタイプと、2) 膜材により密閉された空間に内圧を作用させて、張力を発生させるタイプの2種に大別される。本研究ではこれら膜構造物の中でも2)の範疇に属する、エア・ビーム^{2),3)}（細長い円筒状の膜材に内圧を加え、はりとしての剛性を与えたもの）を対象とし、膜構造物に特有な崩壊形態であるリンクリング（しわ状座屈）現象に注目し、これを有限要素解析に取り込み定式化を行ったうえで、力学的挙動を解析的に考察している。また、提案した手法の妥当性を検証するために、実験結果との比較検討も行っている。

従来、数値解析におけるリンクリング現象発生時の対処としては、通常の平面応力場に基づいた弾性解析を行い、得られた最小主応力が負値に転じたとき、これを等大異符号な節点力に変換し、負の主応力が存在しなくなるまで取れん計算を行う（引張応力に抵抗力を有さない材料の解析に適用された no-tension 法⁴⁾を、圧縮応力に抵抗力を有さない膜材料等に導入したもので、修正 Newton-Raphson 法に基づく応力遷移法に属する）ものである⁵⁾。また、西村等はリンクリング現象の発生に

伴う圧縮応力の大きさに応じ、段階的に変化する剛性低下法を提案し⁶⁾、Miller等は一軸応力状態を仮定し、新たな応力マトリクスを導出しており⁷⁾、さらに Rodde-man 等は要素内におけるリンクリング現象の発生している面積をパラメータとし、新たなひずみ-変位関係を導出^{8),9)}することにより対処している。

一方、先に著者らはこのエア・ビームを工学的はり理論に基づいたうえで、“エア・ビームの見掛け上の弾性係数”の評価を実験的、解析的に考察している¹⁰⁾。また、はり要素を用いてリンクリング現象の定式化を行った有限要素解析手法を提案している^{11),12)}。

これらのことをふまえ、本文において提起する手法は、エア・ビームを平面シェル要素の集合体と位置付け、さらに、内圧の影響を考慮した三次元薄膜構造解析を行うものである。ここで、一般的に膜材自身の面外曲げに対する抵抗力は小さいが、膜厚が大きな場合ではこれらの影響を無視できない。このため、本文で提起する手法は面外曲げに対する影響をも考慮した解析を行う。したがって、本法を用いた数値解析により、エア・ビームに対する厳密な力学的挙動の照査、ならびに設計・保守等における補強・修繕箇所への言及が可能になるものと考えられる。さらに本解析は、エア・ビームを平面シェル要素を用いて離散化し、応力状態に依存する剛性評価に関するパラメータを設定し、最小主応力が負値に転じた場合、このパラメータにより要素内主応力方向の剛性低減を計り、圧縮応力が存在しなくなるよう取れん計算を行うものである。したがって、本文で提案した手法は、引張応力のみが存在している状態においては、等方線形材料とし、リンクリング現象の発生に伴い、材料非線形性、ならびに材料異方性の考慮を行うものである。さらに、内圧の影響を考慮した三次元薄膜構造解析を行うため、後述するようなより現実に即した解析であると考えられる。また、応力に依存するパラメータを適用しているた

* 正会員 工修 長野工業高等専門学校助手 土木工学科
(〒381 長野市徳間 716)

** 太陽工業(株) 空間技術研究所主幹研究員

*** 正会員 工博 信州大学教授 工学部社会開発工学科

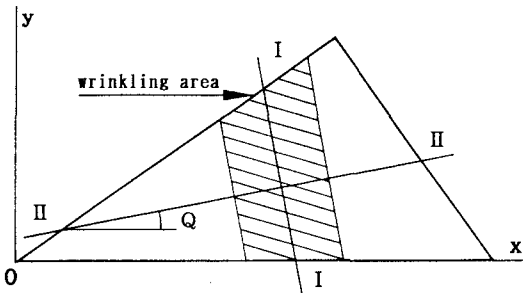


図-1 要素内の局所座標系と主応力座標系

め、膜材料の応力状態に対応した要素内の剛性を設定することが可能となり、線形解析により算定されたリンクリング現象発生時の圧縮応力に対し、的確な剛性評価が期待できる。

2. 数値解析手法

(1) 解析概要

本研究における数値解析には有限要素法を適用しており、また膜構造解析を行うために三角形平面シェル要素（平面応力問題に対しては一定要素、板曲げ問題に対しては Zienkiewicz らが提案した非適合要素）を用いてエア・ビームの離散化を行う。また、数値解析により算定された要素の主応力 σ_1 , σ_2 の関係に対し、次の仮定を設ける。すなわち、

$\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ ……タウト

$\sigma_1 > 0 \geq \sigma_2$ ……リンクリング

$0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$ ……スラック

である。本法では、タウト状態において等方弾性体の解析を行うものとし、リンクリング状態においては、提案された数値解析手法を適用している。さらに、解析対象であるエア・ビームにおいて、スラック状態が存在するような場合、構造系として機能しないという特性から、スラック状態の考慮は行わない。ただし、このような状態の考慮が必要な場合、等方弾性体に比べ非常に小さな剛性を設定することにより、数値計算は可能である。

ここでリンクリング状態にある要素に対して、

1) 主応力方向は一軸的であり引張応力のみが存在する、

2) 主応力方向における引張方向としわの発生する方向（図-1におけるI-Iと同一方向）は一致する、と仮定する。この仮定により、リンクリング現象が発生した要素における弾性係数マトリクスが、等方性から異方性を有するものへと遷移するものである。

(2) リンクリング現象の発生に伴う非線形解析

従来、有限要素法によるリンクリング現象発生後の数値計算における対処としては、たとえば、岩盤、コンクリート等の材料が引張力に対して抵抗力を有さないとい

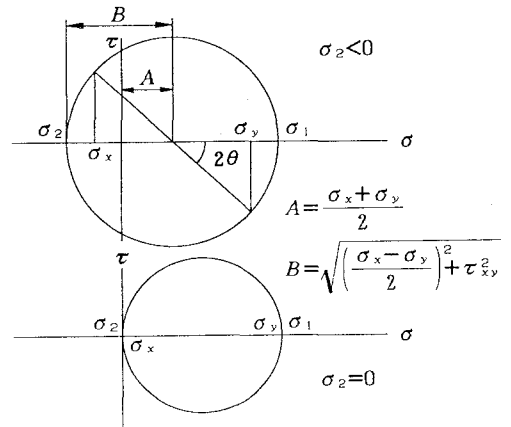


図-2 リンクリング現象における応力状態

う性質から no-tension 法（修正 Newton-Raphson 法に基づく応力遷移法）が適用されている⁴⁾。これと同様の理由により、膜材が圧縮力、せん断力に対する抵抗力を有さないため、no-tension 法を变形した no-compression 法が適用されている⁵⁾。これを簡単に述べると、主応力を算定し、リンクリング現象が発生（リンクリング現象の発生条件： $\sigma_2 < 0$ あるいは、 $\sigma_x \cdot \sigma_y < \tau_{xy}^2$ ）した場合、圧縮主応力と等大・異符号な節点力を作用させ、圧縮応力が存在しなくなるよう取れん計算を行うものである。ただし、 σ_x , σ_y , τ_{xy} は局所座標系における応力である。この場合非線形性は荷重項のみで、要素剛性が一定のためその逆行列の計算は一回で済み、また有限要素定式化も比較的容易である。反面、リンクリング現象のような一種の座屈現象（しわ状座屈）の評価に対しては、材料非線形問題へのアプローチが不可避であり、no-compression 法はこの点の評価が成されていない。

これに対し、本解析手法はリンクリング現象の発生に伴う材料非線形性、並びに材料異方性を加味した剛性低減を計るものであり、以下にその概要を述べる。

局所座標系 $x-y$ において、図-1 に示すような三角形要素（要素面積： A_0 ）を考える。図中、I-II は、弾性解析により得られた主応力座標系であり、また各々の座標系がなす角は Q である。いま、弾性解析において II 方向の主応力 σ_2 が圧縮に転じた다고すると、先の仮定により I 方向に沿ってリンクリング現象が発生することになる。ここで、リンクリング現象による剛性低下を定量的に評価するため、応力の関数となるパラメータ ϕ を次式のように定義する。

$$\phi = \frac{A}{B} = \frac{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 A , B は図-2 に示すモールの応力円における各々の値である。

いま、図-2の上部のように $\sigma_2 < 0$ なる応力状態においては、式(1)で与えられたパラメータ ϕ を用いることにより弾性係数マトリクスを低下させ、その結果同図下部のように $\sigma_2 = 0$ とすることを考える。そこでまず等方弾性体の場合、応力-ひずみ関係は

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \dots\dots\dots (2)$$

である。ただし、 $\{\varepsilon\}$ はひずみ、 $\{\sigma\}$ は応力、 $[D]$ は弾性係数マトリクスである。また、局所座標系から主応力座標系への変換マトリクスを、応力に対して $[Ts]$ 、ひずみに対して $[Te]$ とすると、

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma_{I\parallel}\} &= [Ts]\{\sigma_{xy}\} \\ \{\varepsilon_{I\parallel}\} &= [Te]\{\varepsilon_{xy}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

の関係がある。ただし、 $\{\sigma_{xy}\}$ 、 $\{\varepsilon_{xy}\}$ および $\{\sigma_{I\parallel}\}$ 、 $\{\varepsilon_{I\parallel}\}$ は各々局所座標系 $x-y$ 、ならびに主応力座標系I-IIにおける応力、ひずみである。いま、図-2に示すように σ_2 が負値であるため、II方向においては圧縮力に対する抵抗力が存在しておらず、先に定義した ϕ を用いてこの方向の弾性係数マトリクスを次式のように低減する。

$$[D'_{I\parallel}(\phi)] = \begin{bmatrix} E_I & v_{II}E_I & 0 \\ 1-v_Iv_{II} & 1-v_Iv_{II} & 0 \\ v_I E_{II} & E_{II} & 0 \\ 1-v_Iv_{II} & 1-v_Iv_{II} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 $E_I = E$ 、 $E_{II} = \phi E$ 、 $v_I = v$ 、 $v_{II} = \phi v$ であり、 E 、 v は一軸引張実験により与えられる弾性係数とポアソン比、また G はせん断弾性係数である。ここで、リンクリング現象発生後の G の値は、膜材料の性質上極端に小さく、数値計算時にはこのことを考慮した値を設定した。したがって、式(4)は主応力方向の圧縮応力を0とするよう剛性を低下させ、また膜材料が応力状態に依存して一種の異方性を有する材料へと遷移していることにもなる。式(3)と式(4)の関係を用いると、局所座標系におけるリンクリング現象が発生した要素の新たな弾性係数マトリクスは、

$$[D'_{xy}(\phi)] = [Ts]^{-1}[D'_{I\parallel}(\phi)][Te] \dots\dots\dots (5)$$

のように与えられる。

つぎに、材料非線形問題に対する定式化¹³⁾を概略する。すなわち、線形応力-ひずみ関係は式(2)で与えられており、また、ひずみ-変位関係は

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \dots\dots\dots (6)$$

である。ただし、 $\{u\}$ は節点変位、 $[B]$ は要素内変位補間関数である。

仮想仕事の原理に従い、非線形の釣合方程式は

$$\left. \begin{aligned} \{F(\phi)\} &= \{K(\phi)\} - \{P\} = 0 \\ \{K(\phi)\} &= \int [B]^T \{\sigma(\phi)\} dV \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となる。ただし、 $\{F(\phi)\}$ は残差力であり、 $\{P\}$ は節点

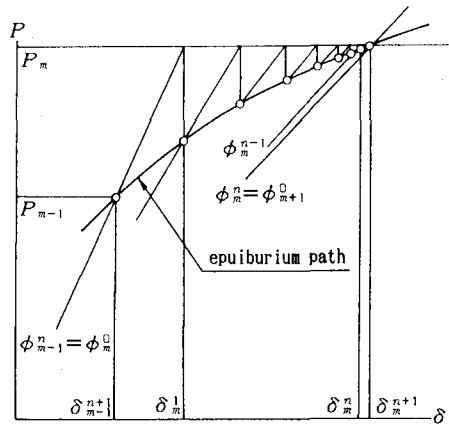


図-3 直接反復法

荷重である。式(7)を変位に関して微分すると次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d\{F(\phi)\}}{du} &= \frac{d\{K(\phi)\}}{du} \\ &= \int [B]^T \frac{d\{\sigma(\phi)\}}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{du} dV \\ &= \int [B]^T \left([D'_{xy}(\phi)] + \frac{d[D'_{xy}(\phi)]}{d\varepsilon}(\varepsilon) \right) \frac{d\varepsilon}{du} dV \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

しかしながら応力に対する変位の微分、すなわち接線弾性係数マトリクスが式(8)で示されているように陽表示できない。

そこで、図-3に示すように本解析では直接反復法を改良し非線形方程式の解を求めており、以下にその解析手順を示す。

1) 初期近似解の算定： ϕ_m^0 の値に応じた剛性を与え、変位 δ_m^0 を算定する。ただし、第1番目の荷重の第1近似値の算定に際し、全要素で ϕ_m^0 は1.0であり、また ϕ の上付き添え字は近似回数、下付き添え字は荷重段階を意味する。

2) リンクリング現象発生の有無の判定： $\sigma_2 < 0$ なる要素が存在しなければ1)を繰り返す。存在していれば、

$$\phi_m^{n+1} = \phi_m^n \cdot \phi \dots\dots\dots (9)$$

とする。ただし、 ϕ は式(1)により n 回目に算定された剛性低減率を意味している。

3) 反復計算：2)で得られた ϕ_m^{n+1} に対し新たな弾性係数マトリクスを作成し、有限要素解析を行う。

4) 収束判定： $\sigma_2 < 0$ なる要素に対し、

$$\frac{\phi_m^{n+1}}{\phi_m^n} \geq 1.0 - \alpha \dots\dots\dots (10)$$

が満足されるまで計算を継続する。ただし、 α は許容誤差である。

5) 荷重段階の変化：4)で収束が満足されたとき、次の荷重段階へ移行する。ただし、 m 段階の荷重にお

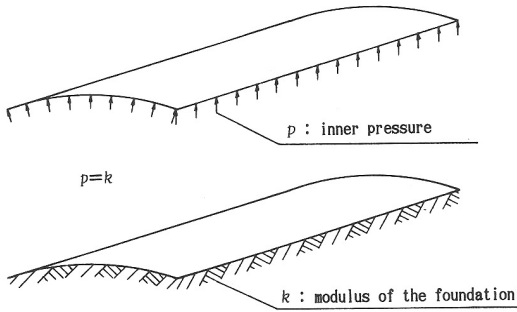


図-4 内圧と弾性基礎

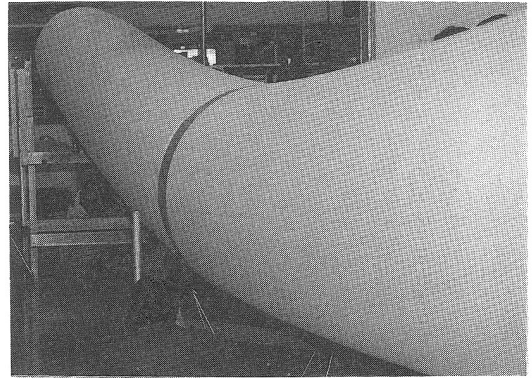


写真-1 エア・ビーム曲げ実験概要

いて算定されている ϕ_m^{n+1} を次の荷重段階における ϕ_m^0 とし、順次1)~4)を繰り返す。

(3) エア・ビームの内圧に対する定式化

一般には、エア・ビームに対する内圧の影響はフープテンション問題となる。また内圧の影響により、エア・ビームのはりとしての見かけ上の剛性が左右される。ところが、内圧の導入により剛性が与えられるエア・ビームでは、膜材自身の剛性が小さく、内圧を等価な節点外力として作用させ解析を行うと、載荷点近傍の変形のみが局部的に増大し、はりとしての挙動が適切に表現できない。そこで、本解析では内圧と膜材の関係に弾性基礎上の板曲げの考え方を適用^{14)~16)}したが、以下にその概要を記す。

まず、図-4に示すように、内圧 p を弾性基礎における地盤反力係数 k と等価なものと思なすと、単位面積あたりの板を単位長さ変位させ得る力は p である。また内圧による剛性は、板曲げ問題における鉛直方向変位にのみ寄与するものと仮定する。このような条件の下で、単位面積の板を w だけ変位させ得る力 q は

$$q = p \cdot w \dots\dots\dots (11)$$

である。いま、この平衡状態において、仮想変位 δw が生じたものとし、式 (11) の両辺に掛け合わせると、

$$q \cdot \delta w = p \cdot w \cdot \delta w = \delta \left(\frac{1}{2} p w^2 \right) \dots\dots\dots (12)$$

となり、要素面積 A_e に関して積分を行うと、ひずみエネルギー δU は

$$\delta U = \int \delta \left(\frac{1}{2} p w^2 \right) dA_e \dots\dots\dots (13)$$

のように得られる。式 (13) のひずみエネルギーに関し、ポテンシャルエネルギー停留原理を適用すると、内圧に対する剛性マトリクス $[K_{ef}]$ は

$$[K_{ef}] = \frac{\partial \delta U}{\partial w} \dots\dots\dots (14)$$

と与えられる。式 (14) における w を三角形平面シェル要素における板曲げ問題で仮定した変位: w^* ($w^* = [N]\{\theta^*\} = [N][T]\{w\}$), ただし、 $[N]$ は面積座標 $[L]$ と

節点座標 $[\beta]$ の関数で、 $[N] = [L][\beta]$ と表される。また、 $[T]$ は $\{w\}$ から $\{\theta^*\}$ への変換マトリクスである。詳細は付録参照)に書き直してマトリクス表示すると、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} [K_{ef}] &= [T]^T [\beta]^T [C] [\beta] [T] \\ [C] &= \int [L]^T [p] [L] dA_e \\ [p] &= p [I] \\ [I] &: 6 \times 6 \text{ の単位行列} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

これにより、内圧による剛性マトリクス $[K_{ef}]$ と、平面シェル要素の要素剛性マトリクス $[K_s]$ を各々対応する項に関して重ね合わせると、最終的なエア・ビームに対する要素剛性マトリクス $[K]$ は次式のようになる。

$$[K] = [K_s] + [K_{ef}] \dots\dots\dots (16)$$

さて、内圧を剛性の一部として要素剛性マトリクスに組み込んだため、内圧によって要素に生じる初期応力の影響が考慮されていないことになる。そこで、外力により生じた応力 $\{\sigma_{xy}\}$ と、薄膜理論より算定され、全体座標系で与えられる初期応力 $\{\sigma_0\}$ を局所座標系へ変換し、これを重ね合わせた応力 $\{\sigma_{xy}\}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \{\sigma_{xy}\} &= \{\sigma_{xy}\} + [Ts] \{\sigma_0\} \\ \{\sigma_0\}^T &= \left\{ \frac{pr}{2t}, \frac{pr}{t}, 0 \right\} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

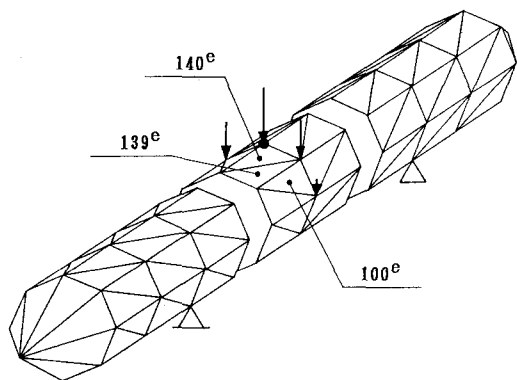
ここに、 r : ビーム半径、 t : 膜厚である。したがって、 $\{\sigma_{xy}\}$ を本解析で扱う要素応力とし、2.(2)で述べたリンクリング現象の評価を行う。

3. 数値解析例

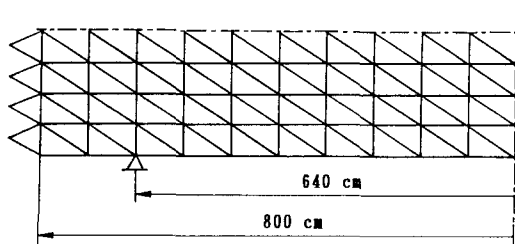
本解析の有効性を検証するため、エア・ビーム曲げ実験を行った。数値解析で用いられた材料定数等は、この実験モデルのものを使用する。なお、本解析は平面シェル要素を用いて離散化しているため、汎用性のある3次元薄膜構造解析が可能であるが、実験結果との詳細な比較検討を行うために、解析対象をエア・ビーム曲げ実験

表一 膜素材の材料定数

弾性係数	$E = 6035.3 \text{ kgf/cm}^2$
せん断弾性係数	$G = 603.5 \text{ kgf/cm}^2$
ポアソン比	0.25
膜厚	0.085 cm



(a)



(b)

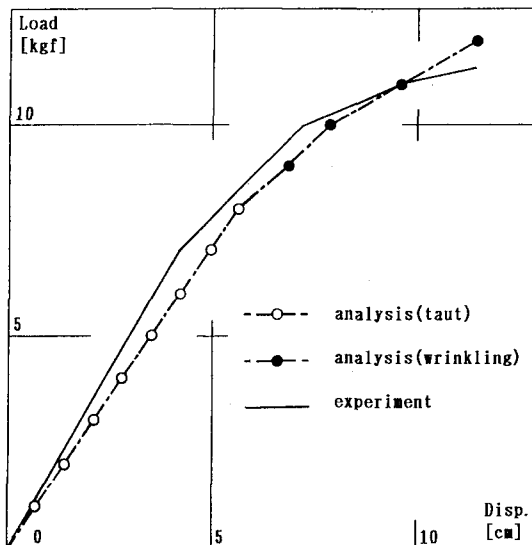
図一五 エア・ビームの離散化状態

とし、これを数値シミュレーションした。

写真一にエア・ビーム曲げ実験概要を示す。なお、本文では実験に関する詳細は割愛するが、参考文献10)を参照されたい。

表一に解析に用いた膜材の材料定数を示す。ここで、表一に示す弾性係数は、膜材の一軸引張実験により得られた結果¹⁾であり、また、タウトな状態のせん断弾性係数は、弾性係数の10分の1程度であるため、弾性解析時においてはこれを用いた。さらに、リンクリング現象の発生に伴い異方性材料へと遷移すると、せん断弾性係数は非常に小さなものとなるため、非線形解析時には、一軸引張実験より得られた弾性係数の100分の1とした。

図一五に離散化状態を示す。図一五(a)は、シェル要素による3次元的な離散化状態を、幾何学的境界(拘束)条件、力学的境界(荷重)条件に関して図示したものである。図一五(b)は、立体的なエア・ビームを平面の膜材として要素分割した場合を図示したものである。図一五に示すように、エア・ビームの径は40cm、



図一六 スパン中央節点の荷重-たわみ曲線

全長は800cm、スパン長が640cmの張り出しばりであり、これを節点数170、要素数336(軸方向に20分割、周方向に8分割)により、はりの端部まで離散化した。

なお、本数値解析例における要素分割に関しては、周方向の分割が粗いと載荷重時の断面変形の挙動を、また軸方向の分割が粗いと、はりとしての挙動が十分表現し得ない。先に示した離散化によりエア・ビームとしての挙動を精度良く近似でき、収束性も向上した。また、拘束条件に関しては、単純支持を設定する。荷重条件に関してはスパン中央上部5点を指定し、荷重項に対する重み付けは、各要素の単位法線ベクトルの鉛直方向成分とした。内圧は 0.1 kgf/cm^2 とし、2.(3)で記した手法により離散化を行う。なお、反復計算に対する許容誤差は、式(17)で与えられる初期応力とリンクリング現象が発生する応力状態(図一2参照)、ならびに式(1)により与えられる剛性低減係数とを勘案し、収束が満足されたときの圧縮応力は初期応力に比し微少でなければならず、このため式(10)において $\alpha=0.05$ とした。

図一六は、本解析手法によりエア・ビーム曲げ実験の数値シミュレーションを行ったときの荷重-たわみ関係である。比較のため、実験により得られたたわみについても図示する。ここで、載荷状態を考慮し、リンクリング現象が発生し易いと考えられる、載荷点最上部節点(図一五(a)において●で示した節点)のたわみをプロットした。図中縦軸は荷重、横軸は変位であり、また、一点破線は本手法より得られた解析値であり、実線は実験により得られた結果である。さらに、数値解析に際しては、1kgfピッチで荷重を増加させ、またリンクリング現象が発生し、剛性低減を考慮した解析値を黒丸、弾性解析のみの値は白丸でプロットした。本解析におけるリ

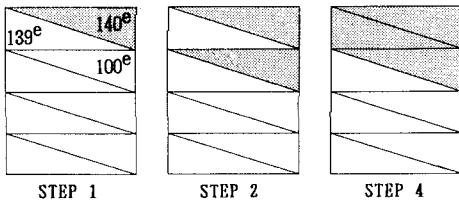


図-7 リンクリング現象が発生する要素の拡大

リンクリング現象発生前の等方弾性解析では、幾何学的非線形性を考慮していないため実験値と多少の差がみられるが、変位に関しその最大のものでも10%以下であり、スパン長、ビーム径等の形状寸法及び実験と解析における载荷方法の相違等を考慮すると、この差は十分許容できる範囲であると考えられる。载荷重が増加するにしたがい、荷重—たわみ曲線の傾きが徐々に増加してゆくが、これはリンクリング現象の発生した要素が一種の塑性ヒンジのような形態になったためと考えられる。

一方、実験においてリンクリング現象発生の厳密な判定は困難であるが、本手法によりリンクリング現象発生がある程度予測可能となる。さらに、荷重が増加し、リンクリング現象発生後の非線形性が強いところに関しても、実験値と解析値はよく似た挙動を示しており、本解析による剛性低減法が妥当なものであると考えられる。

また、写真-1に示す荷重載荷状態において、エア・ビームの断面は、内圧の作用により初期状態と同様円形断面であり、はりとしての挙動を示している。本研究で提案した手法では、内圧の影響を有限要素により定式化しているため、著しい局所変形が発生することなく、エア・ビームの全スパンにわたり、断面内ではほぼ同等の鉛直変位が得られた。したがって、本解析手法はエア・ビーム曲げ実験を精度よくシミュレーションしており、本法の有効性が検証されたものと考えられる。

図-7は、荷重が11 kgfのときの取れん計算の過程において、リンクリング現象が発生する要素の拡大状況を示したものである。弾性解析においては、最上部の要素でリンクリング現象の発生が確認できる。このとき、圧縮応力が発生した要素で剛性が低減され、これに伴い他の要素へ応力再配分が行われる。このため、リンクリング現象はまず下部の要素へ、そののち両端の要素へ拡大してゆく。したがって本解析を用いることにより、リンクリング現象の拡大状況が詳細に把握でき、さらにこれらのことを勘案すると、空気膜構造系に対する崩壊現象をもある程度把握することができるものと考えられる。なお、実験において荷重が12 kgf近傍で本構造系が崩壊に達したと判断し、载荷を終了している。

図-8は、荷重が11 kgfのとき、反復計算過程でリンクリング現象が発生する要素140, 139, 100(図-5参照)の最小主応力 σ_2 と剛性低減係数 ϕ を、反復回数の推移

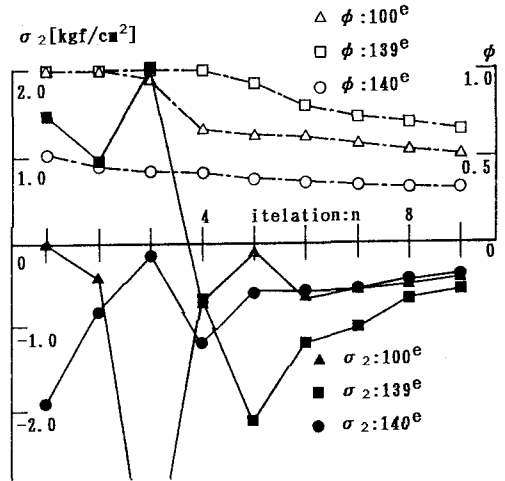


図-8 リンクリング現象の発生した要素における反復回数*n*に対する最小主応力 σ_2 の変化

に関してプロットしたものである。リンクリング現象が発生すると同時に剛性が低減され、応力の平衡が一担は崩れ、大きな圧縮応力が発生することになる。しかしながら、さらに剛性が低下するにしたがい、収束へと向かう。また要素140に対しては、 $P=10$ kgfにおいて、すでにリンクリング現象が発生しているため、 $\phi < 1.0$ であり、 $P=11$ kgfにおいて、 ϕ の値はさらに低下する。このため、要素100, 139に対しては、 $\phi=1.0$ であったものが、応力配分に伴い圧縮応力が現れ、リンクリング現象が発生すると同時に ϕ の値も低下する。一方、反復回数が3回目において要素100では圧縮応力が、要素139では引張応力が最も大きい。これは要素140の圧縮応力が小さくなった分、これらの要素へ応力が配分され、一時的に応力の不均衡が生じているが、反復回数が増すにつれ徐々に小さな圧縮応力に遷移してゆく。このように、リンクリング現象が発生した要素では剛性低減がなされるため、応力遷移法と同様圧縮応力が他の要素へ再配分される。このため、数値解析により算定される、膜構造物において存在し得ない要素内の圧縮応力は、他の要素の引張応力により相殺され、リンクリング現象が発生した要素は一軸応力状態へと遷移してゆく。

なお、9回目の取れん計算において、式(10)の条件を満足したため、次の载荷重へと移行した。

4. 結 論

本文は、膜構造物に特有なリンクリング現象を有限要素により定式化した数値解析手法を提起せんとするものである。本解析手法の有用性を述べると、以下のようになる。

1) 張力の導入により与えられる剛性は、リンクリング現象が発生する主応力方向において低下するため、本

文中提起したような膜材の非線形性，異方性等を考慮した数値解析手法が必要となる。

2) リンクリング現象が発生した場合，本解析手法では膜材の剛性低減，収束判定に応力に係わるパラメータ ϕ を新たに設定し，収れん計算を実行しているが，実験解析値と比較して妥当なものと考えられる。

3) 本文では，エア・ビームに剛性を与えるための内圧と膜材の関係を，弾性基礎上の板曲げ問題に類似させ定式化した結果，荷重作用点においても局所的な変形増大が発生することなく，断面内ではほぼ均等な変位が得られ，はりとしての挙動が表現できた。

最後に，本解析では非線形解析手法において重要な接線剛性マトリクスが陽表現不可能であるため，直接反復法を用いて収れん計算を行った。しかしながら，計算機使用上，ならびに解の収束に対する安定性に対し考慮すべきことも多い。今後これらを加味したうえ，リンクリング現象に対する塑性理論の導入を行いたい。さらに，膜材料自身の特質を鑑み，幾何学的非線形問題への対応も考えられ，今後の課題としたい。

謝 辞

本研究の一部は膜構造技術振興財団の援助を受けたものであり，関係各位に深甚なる謝意を表する。

付 録

Zienkiewicz 等は板曲げ問題に対する変位 w^* を次式のように仮定した。

$$w^* = [N]^T \{\theta^*\} \dots\dots\dots (A.1)$$

ただし，

$$[N]^T = [N_{ix} \ N_{iy} \ N_{jx} \ N_{jy} \ N_{kx} \ N_{ky}]$$

$$\{\theta^*\}^T = \{\theta_{ix}^* \ \theta_{iy}^* \ \theta_{jx}^* \ \theta_{jy}^* \ \theta_{kx}^* \ \theta_{ky}^*\} \dots\dots\dots (A.2)$$

また， $[M]$ は次のように表される。

$$[M] = [L][\beta] \dots\dots\dots (A.3)$$

$$[L]^T = \begin{bmatrix} L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k \\ L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k \\ L_j^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_k \\ L_j^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k \\ L_k^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k \\ L_k^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_k \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A.4)$$

$$[\beta] = \begin{bmatrix} b_j & c_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_k & -c_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_k & c_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_i & -c_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_i & c_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_j & -c_j \end{bmatrix} \dots\dots (A.5)$$

ここで， L_i, L_j, L_k は面積座標であり， $b_j = y_k - y_i, c_j = x_i - x_k$ 等である。

さて，2.(3) で仮定したように，内圧 p による剛性は板曲げ問題において，鉛直方向変位のみに寄与すると仮定すると，次式の関係が得られる。

$$\{\theta^*\} = [T] \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \\ w_k \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (A.6)$$

ただし，

$$[T] = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} -c_i & -c_j & -c_k \\ b_i & b_j & b_k \\ -c_i & -c_j & -c_k \\ b_i & b_j & b_k \\ -c_i & -c_j & -c_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A.7)$$

である。式 (A.6) の関係を用い，さらに，内圧 p と弾性基礎の地盤反力係数 k が等しいとし，ポテンシャルエネルギー停留原理を適用すると，最終的な内圧に対する剛性マトリクスは，次式で与えられる。

$$[K_{ef}] = [T]^T \left(\int [M]^T [p] [M] dA_e \right) [T] \dots\dots\dots (A.8)$$

参 考 文 献

- 1) J.W. Leonard : Tension Structures — Behavior and Analysis—, McGraw · Hill, 1988.
- 2) 植村益次: wrinkle したエアビームの耐荷能力，テント構造協会，1969.
- 3) 河端昌也: エア・ビームの構造性状について，膜構造研究論文集 '92，日本膜構造協会，pp.25~31, 1992.
- 4) 川本眺万・林 正夫: 地盤工学における有限要素解析，培風館，1978.
- 5) 正岡典夫・石井一夫: 低次四辺形要素による応力変形解析，膜構造研究論文集 '91，日本膜構造協会，pp.1~12, 1991.
- 6) 西村敏雄・登坂宣好・本間俊雄: 有限要素法による平面張力場解析，日本建築学会構造系論文報告集，第 368 号，pp.27~36, 1986.
- 7) R.K. Miller et al. : Finite Element Analysis of Partly Wrinkled Membranes J. Computer & Structures, Vol.20, pp.631~639, 1987.
- 8) D.G. Roddeman et al. : The Wrinkling of Thin membranes, ASME J. Applied Mechanics, 5, pp.884~892, 1987.
- 9) D.G. Roddeman : Finite Element Analysis of Wrinkling Membranes, Communi. in Applied Num.

- 10) 遠藤典男・瀬川信哉・三井康司・笹川 明：エア・ビーム構造物の剛性評価に関する考察，構造工学論文集，Vol. 38 A, pp.1329~1342, 1992.
- 11) 永谷秀樹・瀬川信哉・遠藤典男・三井康司・笹川 明：エア・ビーム構造物の簡易数値解析手法に関する研究，日本建築学会構造系論文報告集，第 449 号，pp. 133~141, 1993.
- 12) S. Segawa et al. : Experimental and Numerical Examination of Air Beam Structures, Proc. of the IASS-MSU Int. Symposium, Istanbul-TURKIYE, pp.605 ~ 614, 1993. Meth. Vol.7, pp.299~307, 1991.
- 13) O. C. Zienkiewicz (吉武雅夫・山田嘉昭監訳)：マトリクス有限要素法，培風館，1984.
- 14) F. Tin-Loi et al. : BEF Analogy Axisymmetrically Loaded Cylindrical Shells, J. Computer & Structures, Vol.34, pp.281~285, 1990.
- 15) S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger : Theory of Plate and Shells, McGraw・Hill, 2nd ed., 1959.
- 16) 原口忠次郎：弾性基礎上の矩形板，山海堂，1964.
- 17) 南 宏和：膜構造物用膜材料の力学的特性，形成加工，第 2 巻，第 3 号，pp.198~202, 1990.

(1993. 8. 3 受付)

SOME APPROCHES TO EVALUATION OF WRINKLED PHENOMENA IN MEMBRANE STRUCTURES USING FINITE ELEMENTS

Norio ENDOH, Shinya SEGAWA, Akira SASAGAWA and Yasushi MITSUI

Membrane structures seem to be increasingly constructed for their own characters in the future. In these structures made of flexible membrane, wrinkled phenomena are very complicated and important in their numerical calculations.

In this research some efficient procedure are examined for these numerical analyses using usual finite elements.

To reduce the bending rigidity by wrinkled phenomena, the method proposed here is found to be appropriate by experimental illustrations.