

複数の揚水試験結果を用いた透水係数の空間分布推定と地下水流動の将来予測

奥野哲夫*・鈴木 誠**・市川康明***

本論文では複数の揚水試験結果を用いて透水係数の空間分布を推定する手法を提案する。この手法はカルマンフィルタ理論がベイズ推定法に基づく手法であることを利用して、1回の揚水試験から求まる透水係数の推定値と推定誤差共分散を次の揚水試験の初期値として用い、逐次推定値を更新する手法である。また、推定結果を利用して将来の地下水流動の予測値と予測誤差共分散を求める手法も示す。

Key Words : groundwater, hydraulic conductivity, identification, Kalman filter, pumping test

1. 序 論

最近では地下空間利用の観点から地下構造物の多用化や高度化が進み、施工段階はもとより、施工後の構造物の機能に影響を及ぼす要因として、止水条件や排水条件など透水性に関わる地盤環境の確保がより切実に求められている。そのため、ジオトモグラフィに代表されるような地盤物性値の不均質性の調査技術は、自然地盤の調査をはじめ、施工状況の確認に応用されている。同様に透水係数の不均質性の調査においても、止水性の改良範囲の確認技術は今後の研究開発が期待される分野である。

また、一般に地盤物性値の推定には不確実性が伴い、対象とする構造物により要求される推定精度は異なるものと考えられる。確率論的な推定手法を用いれば、推定値と推定誤差により地盤物性値の不均質性を評価することが可能であり、これらを利用して将来の挙動を予測し予測誤差を評価することも可能である。

以上の点を考慮して、本論文では透水係数の不均質性(空間分布)の評価を目的として、特に対象領域内で独立に実施された複数の揚水試験結果を利用した推定法を提案し、その妥当性を検討する。筆者ら¹⁾は不圧地下水を対象とした透水係数の空間分布推定法を示しており、ここではこれを用いる。この推定法では非定常地下水流動の数値解析には有限要素法を、透水係数の推定(逆解析)には拡張カルマンフィルタを用いており、観測値として地下水位のみならず揚水量や透水係数も利用可能である。

カルマンフィルタ理論は観測更新アルゴリズムと時間更新アルゴリズムからなり、観測更新アルゴリズムはベイズ推定法を用いたフィルタリング理論である。地盤工

学分野でベイズ推定法を用いた研究には、Asaoka and Matsuo²⁾や Cividini et al.³⁾の研究があり、石油工学分野では Gavalas et al.⁴⁾の貯油層の推定の研究がある。また、環境衛生工学分野では米田ら⁵⁾が透水量係数の推定と地下水汚染の浄化法の選定を目的とした意思決定問題に適用している。

今回提案する推定法は、1回の揚水試験の逆解析から求まる透水係数の推定値と推定誤差共分散を次の試験の逆解析の初期値として利用し、これを独立した複数の試験について逐次繰り返すものである。この方法は、カルマンフィルタ理論がベイズ推定に基づく推定法であることを積極的に利用し、1回の試験結果から推定される状態ベクトルの推定値と推定誤差共分散マトリクスを次の試験の事前情報として利用することでさらに信頼できるものに更新する方法である。

一方、時間更新アルゴリズムを用いると、それまでの推定値から状態ベクトルの最適予測値を求めることができる。したがって、先の推定を行ったのち、その推定結果を用いて地下水流動の将来予測が可能であり、予測値と予測誤差共分散を求めることができる。

以下では提案する手法を示すとともに、仮想地盤モデルを用いて同手法の妥当性を検討する。なお、透水係数の空間分布推定に必要な統計的特性は既知と仮定する。

2. 透水係数の空間分布推定法

はじめに拡張カルマンフィルタを用いた推定法¹⁾の概要を述べ、次に複数の揚水試験結果を用いた推定法を示す。

(1) 拡張カルマンフィルタを用いた推定法

非定常状態の不圧地下水を対象として、質量保存則、ダルシー則、Dupuitの仮定を用いて平面2次元状態の有限要素法が定式化される。この時、空間的な領域の離散化に加えて時間領域の離散化を行い、漸化式として定式化される。各時間ステップにおいて、透水量係数から作

* 正会員 博(工) 清水建設(株)大崎研究室
(〒100 千代田区内幸町 2-2-2 富国生命ビル)

** 正会員 工博 同上

*** 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学研究科 地圏環境工学専攻

成される透水マトリクスが求めるべき次期ステップの地下水位の関数となるため、繰り返し計算を行う。この繰り返し計算が収束したのち、求めた地下水位を用いて流量が算定される。次期ステップの未知地下水位と未知流量は、拡張カルマンフィルタのシステム状態方程式において状態量の時間更新に用いられる。

実際に地下水流動を調査する場合、井戸やボーリング孔における地下水位や揚水量（あるいは注水量）が指定あるいは観測される。井戸の水位や揚水量は数値解析において境界条件としてモデル化でき、観測も容易である。地下水位と揚水量の制御（指定）と観測の関係は、揚水量が指定される境界の一部で地下水位が観測され、地下水位が指定される境界の一部で揚水量が観測される。したがって、有限要素法で求められる未知地下水位と未知流量の一部が観測されることになる。この条件は拡張カルマンフィルタの観測方程式に導入される。

さて、時刻 t ステップにおける状態ベクトルを X_t 、観測ベクトルを Y_t として、拡張カルマンフィルタのシステム状態方程式と観測方程式を以下のように設定する。

$$\begin{aligned}
 X_{t+1} &\equiv \begin{Bmatrix} h_{t+1}^1 \\ L_{t+1} \\ q_{t+1}^2 \end{Bmatrix} \\
 &= f_t(X_t) + w_t \\
 &= \begin{Bmatrix} f_t^h(X_t) \\ L_t \\ f_t^q(X_t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w_t^h \\ w_t^L \\ w_t^q \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_t &\equiv \begin{Bmatrix} \tilde{h}_t^1 \\ \tilde{L}_t \\ \tilde{q}_t^2 \end{Bmatrix} \\
 &= G_t X_t + v_t \\
 &= \begin{bmatrix} G_t^h & 0 & 0 \\ 0 & G_t^L & 0 \\ 0 & 0 & G_t^q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_t^1 \\ L_t \\ q_t^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_t^h \\ v_t^L \\ v_t^q \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

式 (1) に示すシステム状態方程式は、有限要素解析から求められる地下水位 h_{t+1}^1 と流量 q_{t+1}^2 から構成される。ここで肩文字の 1 あるいは 2 は、地下水位と流量に関して有限要素法における未知量であることを示す。また、状態ベクトルには透水係数の常用対数をとった値 L_t も用いる。 w_t はシステム誤差であり、正規白色性を有するものとする。このうち w_t^h と w_t^q は、有限要素法による地盤のモデル化や離散化の過程などで生じる誤差である。このようにシステム状態方程式では非線形計算を有限要素法で実施し、透水係数に関しては時間的な変化がないものとする。一方、観測方程式は線形とし、 \tilde{h}_t^1 は観測される地下水位、 \tilde{L}_t は調査や試験により測定される一部領域の透水係数の常用対数をとった値、 \tilde{q}_t^2 は観測される流量である。 G_t^h 、 G_t^L 、 G_t^q はそれぞれ地下水位、透水係数、流量が観測されている成分のみ 1、他は 0 のマトリクスで

ある。また、 v_t は観測誤差で、正規白色性の誤差とする。

以上のシステム状態方程式と観測方程式を基に、状態ベクトルの初期値 $\hat{X}_{0/-1}$ と推定誤差共分散マトリクスの初期値 $P_{0/-1}$ が与えられた後、カルマンゲイン K_t 、状態ベクトルの推定値 $\hat{X}_{t/t}$ 、 $\hat{X}_{t+1/t}$ 、推定誤差共分散マトリクス $P_{t/t}$ 、 $P_{t+1/t}$ 、状態遷移マトリクス（Jacobian 行列） F_t が拡張カルマンフィルタのアルゴリズムに従って計算される⁶⁾。なお、システム誤差共分散マトリクス Q_t と観測誤差共分散マトリクス R_t は既知量とする。この計算により、観測値から状態量の推定と更新が逐次なされ、状態ベクトルの一部を構成する透水係数（常用対数值）の推定が行われる。

(2) 複数の揚水試験結果を用いた推定法

カルマンフィルタ理論はベイズ推定法に基づくフィルタリング理論である⁶⁾⁷⁾⁸⁾⁹⁾。ここではある時刻における観測データが得られた場合の 1 ステップ中の推定過程に着目して式展開を行い、時間ステップの表示は省略する。まず、 n 次元の状態ベクトル X と m 次元の観測誤差ベクトル v の確率密度関数は、事前分布として以下のガウス分布で与えられるものとする。

$$p_1(X) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \bar{X})^T P^{-1} (X - \bar{X}) \right\} \quad (3)$$

$$p_2(v) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |R|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} v^T R^{-1} v \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで—は期待値を表わし、 $\bar{v} = 0$ とする。また、 $| |$ は行列式を、肩文字 T は転置を表わす。状態ベクトル X が与えられたときの観測ベクトル Y の条件付き確率密度関数は式 (2) の関係を用いて式 (5) で与えられ、また観測ベクトル Y の周辺確率密度関数は式 (6) で与えられる。

$$p_2(Y|X) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |R|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Y - GX)^T R^{-1} (Y - GX) \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$p_3(Y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |R + GXG^T|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Y - \bar{Y})^T (R + GXG^T)^{-1} (Y - \bar{Y}) \right\} \quad (6)$$

式 (3)、(5)、(6) を式 (7) のベイズの定理に代入し、観測ベクトル Y が得られたときの状態ベクトル X の条件付き確率密度関数を求めると式 (8) となる⁸⁾。

$$p(X|Y) = \frac{p_1(X)p_2(Y|X)}{p_3(Y)} \dots\dots\dots (7)$$

$$p(X|Y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P'|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \hat{X})^T (P')^{-1} (X - \hat{X}) \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\hat{X} = \bar{X} + K [Y - G\bar{X}] \dots\dots\dots (9)$$

$$P' = [P^{-1} + G^T R^{-1} G]^{-1} = P - KGP \dots\dots\dots (10)$$

$$K = [G^T R^{-1} G + P^{-1}]^{-1} G^T R^{-1} = PG^T [GPG^T + R]^{-1} \dots\dots\dots (11)$$

式(8)より条件付き期待値は \hat{X} となり、損失関数として二乗誤差を用いた場合、式(8)から求まる条件付きベイズリスクは X が条件付き期待値 \hat{X} に一致する場合に最小となる⁶⁾。したがって、ベイズ推定値は条件付き期待値 \hat{X} と一致し、式(9)はカルマンフィルタのフィルタ方程式となる。また、 $X = \hat{X}$ のとき式(8)の条件付き確率密度関数は最大値となることから、ベイズ推定値 \hat{X} は最尤推定値に一致することがわかる。一方、推定誤差共分散マトリクス P は式(10)により P' に更新され、式(11)で示される K はカルマンゲインとなる。なお、以上の \bar{X} と \hat{X} 、 P と P' は、時間ステップを考慮したアルゴリズムにおいてそれぞれ $\bar{X}_{i/t-1}$ と $\hat{X}_{i/t}$ 、 $P_{i/t-1}$ と $P_{i/t}$ に相当する。

以上の式(9)と式(10)は観測更新アルゴリズムと呼ばれ、1回の試験中の観測データが時系列データとして得られている場合、これを用いて逐次推定値が更新され、最終ステップの推定値は1回の試験の観測データを全て利用したベイズ推定値となる。

2回の揚水試験が独立に実施されている場合、1回の揚水試験の観測データを使用して推定を行ったのち、その結果を事前情報(初期値)として次の揚水試験の観測データを用いて推定を行えば、2回の試験の観測データを利用できる。これを複数の試験に対して順次繰り返すことで、さらに多くの揚水試験の観測データを用いて推定を行うことが可能となる。ただし、状態ベクトルの初期値 $\hat{X}_{0/t-1}$ のうち透水系数の初期値と推定誤差共分散マトリクスの初期値 $P_{0/t-1}$ はそれまでの推定値を用いるが、地下水位と流量の初期値は各揚水試験開始時の初期条件を設定する。

ベイズの定理によると、複数の揚水試験が独立に実施されているものとすれば、試験を実施する順序によって観測データは影響を受けず、試験の組み合わせが同一であれば、この組み合わせに従って観測データの生起確率は一致する¹⁰⁾。したがって、推定に用いる観測データの順番を任意に設定しても、最終的な推定結果は全ての観測データを網羅した同一の結果が得られることになる。しかし、本手法においては拡張カルマンフィルタを用いており、一般にシステム状態方程式と観測方程式を線形化したことによる誤差が生じる。このため使用する観測データの順番によって最終的に得られる推定値に影響を与えることが考えられる。ただし、ここでの定式化は式(2)の観測方程式が線形であるため、システム状態方程式の線形化の誤差のみ影響するものと考えられる。

一般に境界条件は地下水位を指定する境界と流量を指定する境界の2種類に分類され、試験ごとで境界条件の種類が異なる境界が存在する場合は、それらの観測データを共に利用して推定を行うことはできない。この理由として、境界条件の種類が異なると式(1)において未知地下水位と未知流量の設定が異なり、それぞれの試験で状態ベクトルが異なるためである。これは推定する確率場が異なることを意味する。以上の点に注意すれば、複数の試験結果を利用して透水系数の空間分布が推定できるものと考えられる。

3. 地下水流動の将来予測手法

ある時刻での状態ベクトルの推定値 $\hat{X}_{i/t}$ と推定誤差共分散マトリクス $P_{i/t}$ が先の観測更新アルゴリズムで与えられている場合、将来の状態ベクトルの最適予測値 $\hat{X}_{i+t/s}$ と予測誤差共分散マトリクス $P_{i+t/s}$ を求める時間更新アルゴリズムは式(12)、(13)で与えられる。この時間更新アルゴリズムはカルマンフィルタにおいて観測更新した推定値と推定誤差共分散マトリクスから、次の観測値が与えられる時間ステップの最適予測値と予測誤差共分散マトリクスを算定する場合にも用いられる⁶⁾。

$$\hat{X}_{i+t/s} = \Phi(t+s, t) \cdot \hat{X}_{i/t} \dots\dots\dots (12)$$

$$P_{i+t/s} = \Phi(t+s, t) \cdot P_{i/t} \cdot \Phi^T(t+s, t) + \sum_{k=t}^{t+s-1} \Phi(t+s, k+1) \cdot Q_k \cdot \Phi^T(t+s, k+1) \dots (13)$$

$s = 1, 2, \dots$

$$\Phi(t, \tau) = F_{t-1} \dots F_{\tau}, \quad t > \tau \dots\dots\dots (14)$$

$$F_t = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_{i+1}^1}{\partial h_i^1} \right)_{h_i^1 = \hat{h}_{i/r}^1} & \left(\frac{\partial h_{i+1}^1}{\partial L_t} \right)_{L_t = \hat{L}_{i/r}} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \left(\frac{\partial q_{i+1}^2}{\partial h_i^1} \right)_{h_i^1 = \hat{h}_{i/r}^1} & \left(\frac{\partial q_{i+1}^2}{\partial L_t} \right)_{L_t = \hat{L}_{i/r}} & \frac{\theta-1}{\theta} I \end{bmatrix} \dots (15)$$

ここで状態遷移マトリクス F_t はシステム状態方程式をテーラー展開して一次近似することで式(15)のように与えられる¹⁾。式(12)、(13)の地下水位と流量に対応する値からそれぞれの予測値と予測誤差分散が求まる。

このとき、地下水流動を予測する場合の境界条件と透水系数の推定を行った場合の境界条件の種類が異なることを確認する必要がある。この理由は先の複数の揚水試験を利用した推定で述べた理由と同様で、式(1)の状態ベクトルの設定が異なると、推定した確率場と予測を行う確率場が異なることになるためである。

4. 仮想地盤モデルを用いた妥当性の検討と地下水流動の将来予測結果

本論文で提案した透水系数の空間分布推定法について、その妥当性を検討するため仮想地盤モデルを用いた推定

表一 設定した透水係数の空間分布特性

透水係数 (単位cm/s) の常用対数値に対する
平均値と共分散関数

平均値	共分散関数
-2 (1.0×10^{-2} cm/s)	$C(d) = \sigma^2 \cdot \exp \left[- \left\{ \left(\frac{d_x}{a_x} \right)^2 + \left(\frac{d_y}{a_y} \right)^2 \right\}^{1/2} \right]$ $\sigma^2 = 1.0, \quad a_x = a_y = 200m, \quad d = (d_x^2 + d_y^2)^{1/2}$

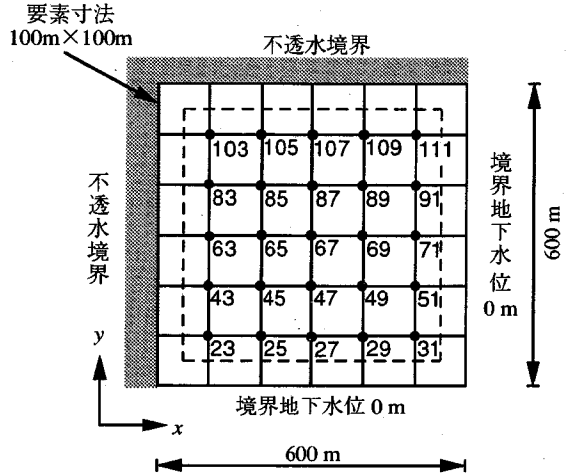
を行う。また、その推定結果を用いて地下水流動の将来予測を行う。

(1) 仮想地盤モデルと解析条件

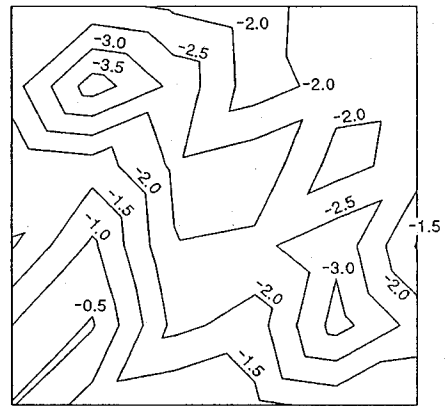
ここで用いる仮想地盤モデルは、先に筆者ら⁹⁾が用いたものと同様である。透水係数は等方性を仮定し、その空間分布特性を表一のように設定する。すなわち、透水係数分布は対数正規分布に従うものとし、cm/sの単位の透水係数に対して常用対数をとった値の平均値が-2.0、分散が1.0の母集団を設定する。また、共分散関数としては2次元の指数型の関数を仮定した¹¹⁾。共分散関数の変数である d_x, d_y はそれぞれ x, y 方向の距離、パラメータ a_x, a_y はそれぞれ x, y 方向の相関距離である。なお、実際の現場において共分散関数を設定するには、表一のような共分散関数の関数形を設定したのち、その関数に含まれるパラメータを最尤法などで推定することになる。

図一には要素分割を示しており、対象とする平面領域は600m×600mの正方領域で、不透水基盤までの深さは一律50mとする。要素の寸法は100m×100mで、8節点のアイソパラメトリック要素を用いおり、領域全体の要素数は36、節点数は133である。このモデルに先の透水係数の空間分布特性を有する母集団から標本を1つ発生させ、各要素に一定の透水係数を割り当てる。こうして作成したモデルを図二に示す。図二は透水係数の常用対数をとった値を示しており、便宜的に要素中心位置に透水係数を割り当てて描いたコンターで、図一の破線で示した正方領域(500m×500m)の透水係数の巨視的な分布傾向を示している。なお、有効間隙率は全要素とも6.0%とする。

次に、複数の揚水試験において地下水位のみ観測する場合を対象として模擬観測データを作成する。まず、対象とする複数の揚水試験としてA~Eまでの5回の試験を考え、それぞれの揚水井と観測井の配置を表二のように設定した。各試験の井戸配置は図一の節点番号で示しており、各試験は揚水井1点と観測井9点からなり、試験ごとに井戸の集中する領域を変えて5回の試験全部



図一 仮想地盤モデルの要素分割



図二 設定した透水係数の空間分布モデル (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)

で仮想地盤全体を網羅する配置としている。図一の仮想地盤領域で揚水試験A, B, C, D, Eの順に、それぞれ左上, 右上, 中央, 左下, 右下の領域を中心に揚水井と観測井を配置している。その一例として揚水試験Cの井戸配置を図三に示す。このような井戸配置の基で、各試験とも揚水井から1200l/min(2.0×10^{-2} m³/s)の一定流量を揚水するものとし、この場合の各観測井位置の地下水位の経時変化を有限要素法の順解析により求め、これを模擬観測データとする。なお、初期水位はいずれも深さ0.0mで一律とする。

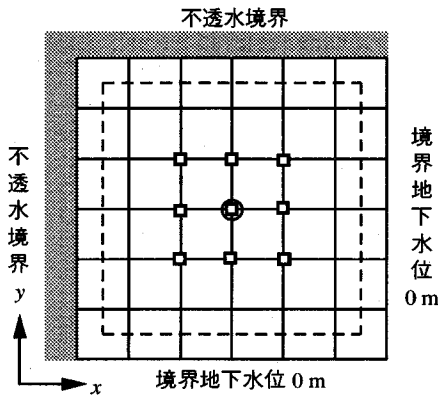
また、模擬観測データは各揚水試験とも約1ヶ月間のデータを観測するものとし、サンプリングの頻度を変えて2ケースの模擬観測データを作成する。ここでは対数時間軸上で1オーダーを50ステップに等分割し、観測期間の1ヶ月を合計225ステップに分割した。この時間ス

表—2 各揚水試験の観測点配置

(図—1の節点番号参照)

揚水試験	揚水井	観測井
A	103	63,65,67,83,85,87,103,105,107
B	111	67,69,71,87,89,91,107,109,111
C	67	45,47,49,65,67,69,85,87,89
D	23	23,25,27,43,45,47,63,65,67
E	31	27,29,31,47,49,51,67,69,71

- 揚水位置 (1点: 1200 l/min)
- 地下水位観測位置 (9点)

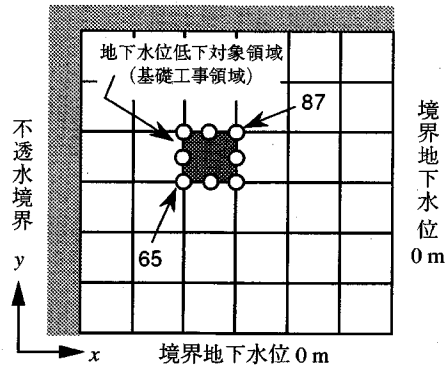


図—3 揚水試験 C の観測点配置

表—3 観測誤差分散, システム誤差分散および推定誤差共分散の初期値

分散	関係する状態量	地下水位 (m ²)	透水係数:	流量
			単位(cm/s)の透水係数の常用対数に対する分散	上段: (m ³ /s) ² 下段: (l/min) ²
推定誤差共分散の初期値		4.0×10 ⁻² (分散のみ)	表—1の共分散関数から求まる値	7.7×10 ⁻⁸ 2.7×10 ² (分散のみ)
観測誤差分散		4.0×10 ⁻⁴	4.4×10 ⁻³	7.7×10 ⁻¹⁰ 2.8
システム誤差分散 I		1.0×10 ⁻⁴	1.1×10 ⁻³	1.9×10 ⁻¹⁰ 6.8×10 ⁻¹
システム誤差分散 II		3.0×10 ⁻⁴	3.3×10 ⁻³	5.8×10 ⁻¹⁰ 2.1

- 揚水位置 (8点; 各点1200 l/min)



図—4 地下水位の将来予測の解析条件

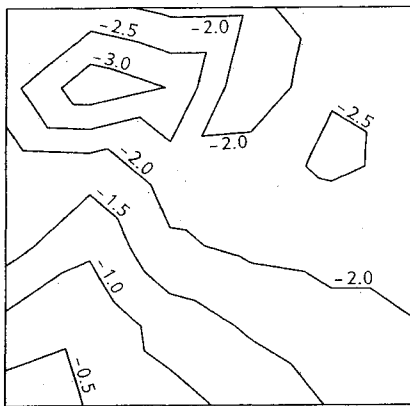
トップの順解析で地下水位を計算し、5ステップごとに各観測井の地下水位が観測されるものを CASE-1 とし、時間軸上に合計 46 点の観測データを設定した。これに対して 10 ステップごとに各観測井の地下水位が観測されるケースを CASE-2 とし、時間軸上に合計 23 点の観測データを設定した。このような時間軸上の観測データの頻度の差は、推定過程における拡張カルマンフィルタの線形化の誤差に差を生じさせるものと考えられる。すなわち、サンプリング間隔が短いほど線形化の誤差は小さく、長いほど大きくなるものと考えられる。以上の 2 ケースの模擬観測データを用いた推定結果を比較することで、線形化の誤差の影響について検討を行う。

さて、本解析では表—3のように観測誤差共分散、システム誤差共分散、推定誤差共分散の初期値を設定する。なお、今回の推定では観測誤差とシステム誤差の共分散マトリクスは、分散(対角成分)のみ下記の方法で仮定し、共分散(非対角成分)は 0 と仮定した。

観測誤差分散は実際の観測精度を参考に、地下水位の観測誤差分散を $\pm 3\sigma = \pm 6.0\text{cm}$ (σ^2 : 分散)、流量の観測誤差分散を $\pm 3\sigma = \pm 5.0\text{l/min}$ と想定して設定した。また、透水係数の観測誤差分散は $\pm 3\sigma = \pm 0.2$ オーダーを仮定した。なお、今回の推定では流量と透水係数の観測

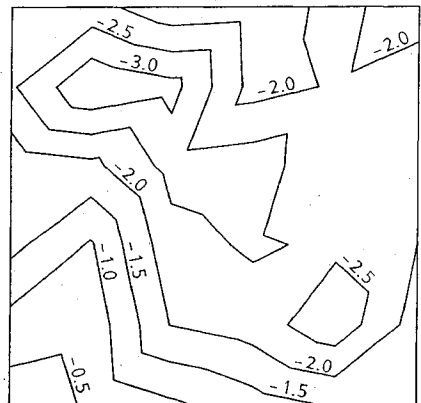
値は存在しないため、これらの値は直接は利用しない。システム誤差分散は有限要素法による離散化の誤差や拡張カルマンフィルタの線形化の誤差などからなる。今回は観測データを離散化した仮想地盤から作成しており離散化の誤差は少ないものと考えられ、主に拡張カルマンフィルタの線形化の誤差を対象に設定する。推定を実施する前にこの線形化の誤差を正確に評価することは難しいため、ここでは観測誤差分散を基準として以下の 2 ケースのシステム誤差分散を仮定した。その 1 つは地下水位、透水係数、流量とも観測誤差分散の 1/4 の値を仮定した場合で、これをシステム誤差分散 I として比較のため CASE-1 と CASE-2 の観測データに用いる。また、システム誤差分散 II として観測誤差分散の 3/4 の値を仮定し、CASE-2 の観測データに対して用いる。したがって、観測データのサンプリング間隔が長く線形化の誤差が大きくなると考えられる CASE-2 に対して、大きなシステム誤差分散を設定している。

推定誤差共分散の初期値は、透水係数に関しては先の表—1の共分散関数により決まる値とする。また、地下水位と流量に関する推定誤差共分散は分散のみ考慮し、共に観測誤差分散の 100 倍の値を仮定する。



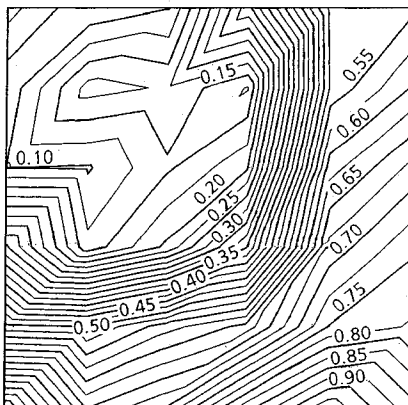
観測データCASE-1 システム誤差分散 I

図-5 推定 A の透水係数の推定値 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)



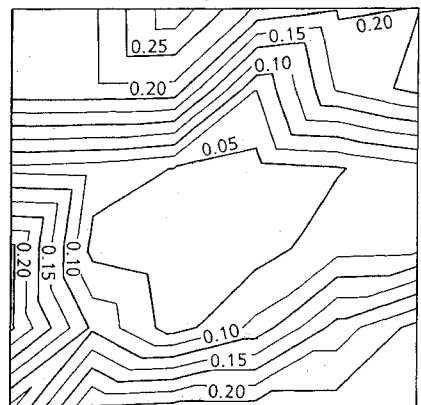
観測データCASE-1 システム誤差分散 I

図-7 推定 ABC の透水係数の推定値 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)



観測データCASE-1 システム誤差分散 I

図-6 推定 A の透水係数の推定誤差 (標準偏差; 単位 cm/s の透水係数の常用対数値)



観測データCASE-1 システム誤差分散 I

図-8 推定 ABC の透水係数の推定誤差 (標準偏差; 単位 cm/s の透水係数の常用対数値)

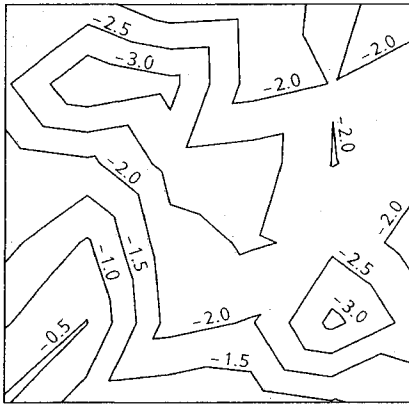
推定結果を用いて地下水位の将来予測を行うモデルを図-4に示す。ここでは図中の $100m \times 100m$ の領域で建設基礎工事を行うものとし、工事期間中にこの領域内の地下水位を低下させることを目的として予測解析を行う。地下水位低下のため周辺の8点で一定流量の揚水を行い、地下水位の低下を予測する。揚水流量は各揚水井とも $1200l/min$ とする。

(2) 推定結果と妥当性の検討

はじめに、複数の試験結果を順次用いて推定が行えることを確認し、その後観測データを用いる順番を変えた結果を比較する。推定結果は用いた観測データとその順番により表示するものとし、例えば試験 A, B, C の観測データをこの順番に用いた場合は推定 ABC と表示することにする。推定結果は設定した図-2の透水係数分布と比較して評価する。なお、推定を開始する際の透水係数(常用対数値)の初期値は平均値を用いた。

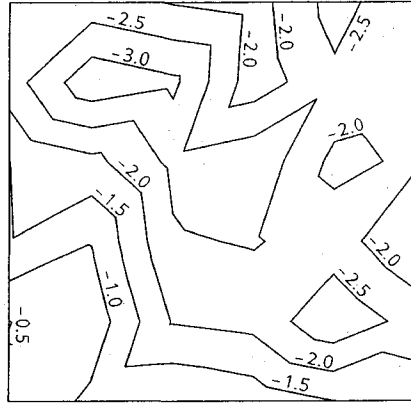
まず、サンプリング間隔が短い CASE-1 の観測データ

を用いた結果を示す。5回の揚水試験結果は後述するように A, B, C, E, D の順番で用いるものとし、推定 A, 推定 ABC, 推定 ABCED の3段階での推定結果を、図-5~10に示す。なお、CASE-1 の推定結果はシステム誤差分散 I を用いたものである。これらの図の推定値は透水係数の常用対数値を、推定誤差は推定誤差分散の平方根をとった標準偏差で示している。推定 A の結果である図-5, 6は、観測井を配置した左上領域がよく推定されている。また、推定誤差も揚水試験 A の観測井が配置されている領域が小さくなっている。推定 ABC では推定結果が更新され図中の領域中央より上部領域がよく推定されており、これはこの段階までに用いた揚水試験が領域中央より上部領域に集中していることによる。この段階での推定誤差の分布は領域中央部が小さくなっている。5回の揚水試験結果を全て用いた推定 ABCED では、領域全体の透水係数の分布がほぼ推定されているが、地下水位を指定した境界付近では設定した透水係数分布が正



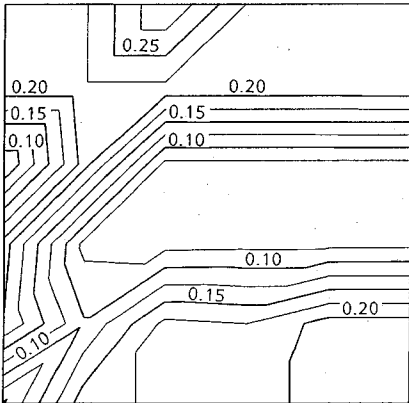
観測データCASE-1 システム誤差分散 I

図-9 推定 ABCED の透水係数の推定値 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)



観測データCASE-1 システム誤差分散 I

図-11 推定 DECBA の透水係数の推定値 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)



観測データCASE-1 システム誤差分散 I

図-10 推定 ABCED の透水係数の推定誤差 (標準偏差; 単位 cm/s の透水係数の常用対数値)

確には推定されていない。地下水位を指定した境界付近では揚水試験による地下水位の低下が小さく、微量の地下水変動は観測誤差やシステム誤差と同様に処理されるため、十分な推定を行うことができない。また、推定誤差分散は全般的に小さくなっており、特に中央から中央右領域で小さくなっている。以上のように複数の揚水試験を用いて推定が順次更新されていくことが確認できる。

次に、推定に用いる観測データの順番を変えた結果を図-11に示す。これは5回の観測データの順番を先の順番の逆にした推定 DECBA である。推定 ABCED (図-9) と推定 DECBA (図-11) の結果を比較すると、ほぼ一致する結果が得られている。

以上のように試験結果を用いる順番として2種類の順番を設定したが、この順番は相互情報量に基づき設定したものである。相互情報量はエントロピーに基づいて定義される情報量で、測定前(事前分布)の状態ベクトルのエントロピー(あいまいさ)から測定後(事後分布)の

エントロピーを差し引いた値で定義され、測定の持つ情報量の多さを示す指標である⁸⁾¹²⁾¹³⁾。したがって、事前分布としてあいまいな推定値が揚水試験結果を用いてより確かに推定できるほど、相互情報量は大きくなる。カルマンフィルタの推定過程におけるkステップまでの相互情報量 $I[X_{[0,k]}Y_{[0,k]}]$ は、推定誤差共分散マトリクスを用いて次式で算定される⁸⁾。

$$I[X_{[0,k]}Y_{[0,k]}] = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^k [\log|P_{t/t-1}| - \log|P_{t/t}|] \quad (16)$$

ある推定を行ったのち、次に用いる揚水試験結果として最も相互情報量が大きくなる観測データを選んだものが推定 ABCED であり、逆に相互情報量が最も小さくなる順番を選んだものが推定 DECBA である。すなわち、推定 ABCED では推定結果のあいまいさが減少する(確かな推定結果が得られる)のが最も早く、逆に推定 DECBA では最も遅い順番となる。ただし、初期値として同一の推定誤差共分散マトリクスを用い、同一の5回の揚水試験を用いることから、順番が異なっても5回の揚水試験結果を全て用いた最終段階では相互情報量の総和は一致する。この状況を示したものが図-12で、先の相互情報量 $I[X_{[0,k]}Y_{[0,k]}]$ の総和を各観測データを用いた推定過程で示したものである。このように各揚水試験結果により個々の情報は異なるが、全ての観測データを用いたのちの情報量の総和は一致する。したがって、異なる順番で推定を行っても情報量は同一であることが確認できる。

次にサンプリング間隔が長い CASE-2 の観測データを用いた推定結果を図-13~16に示す。これらの図は CASE-1 と同様に推定 ABCED と推定 DECBA の結果を比較している。ここでは大小2種類のシステム誤差分散(表-3)を用いており、サンプリング間隔が長くなることによる拡張カルマンフィルタの線形化の誤差が除去できるか検討する。図-13, 14は CASE-2 の観測データ

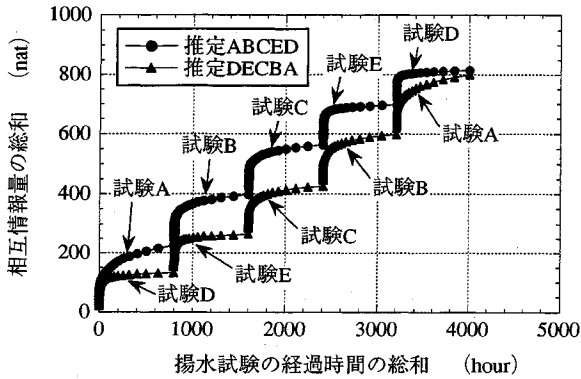
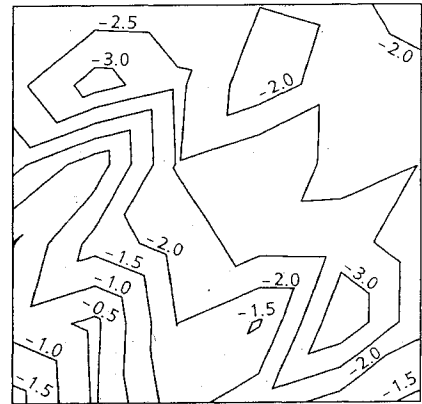


図-12 推定過程における相互情報量の総和の推移



観測データCASE-2 システム誤差分散 I

図-13 推定 ABCED の透水係数の推定値 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)

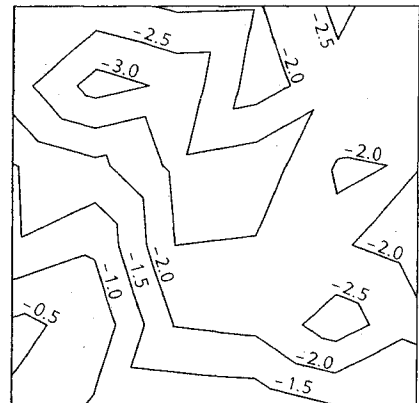
に対して CASE-1 と同様のシステム誤差分散 I を適用した結果である。また、図-15, 16 は CASE-2 の観測データに対してシステム誤差分散 II を適用した結果である。その結果、図-13 と 14 では推定値が異なり、同一の観測データを用いても用いる順番により推定結果が異なっている。これに対して図-15 と 16 の推定値はほぼ一致し、観測データを用いる順番による影響は少ない。以上のことから、CASE-2 では拡張カルマンフィルタの線形化の誤差が CASE-1 より大きくなり、システム誤差分散を大きく評価することにより適切な推定が行われたものと考えられる。

Appendix に示すようにカルマンフィルタにおけるカルマンゲイン K_t は、状態ベクトルの最適修正量を最小二乗法により求めるための正則化一般逆マトリクスと解釈できる。さらに、推定誤差共分散マトリクス $P_{t+1/t}$ は悪条件のマトリクスの正則化を行い、解の安定化に寄与していると言える。推定誤差共分散マトリクスの時間更新は一般に式 (13) で与えられ、拡張カルマンフィルタの推定過程においても観測値が得られる次期ステップへの時間更新として次式の漸化式の形で用いられる⁶⁾。

$$P_{t+1/t} = F_t P_{t/t} F_t^T + Q_t \dots \dots \dots (17)$$

したがって、システム誤差共分散マトリクス Q_t は推定誤差共分散マトリクス $P_{t/t}$ や状態遷移マトリクス F_t と共に、正則化と解の安定に寄与することになる。この意味でシステム誤差共分散を適切に設定することが必要になる。

以上に示したように、拡張カルマンフィルタでは観測データのサンプリング間隔が長くなると線形化の誤差が生じ、システム誤差共分散を適切に設定することで良好な推定を行うことが可能である。特に、ベイズ推定では観測データを用いる順番に影響されないことを利用すれば、順番を変えた推定結果を比較することで最終的に求まった推定結果が妥当であるか確認することができる。



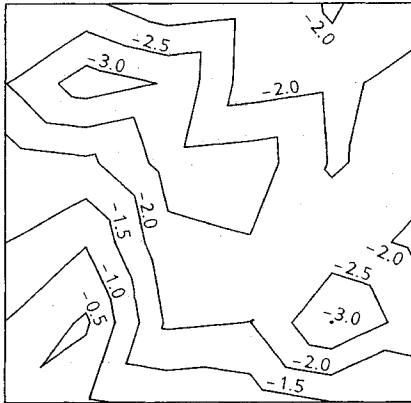
観測データCASE-2 システム誤差分散 II

図-14 推定 DECBA の透水係数の推定値 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)

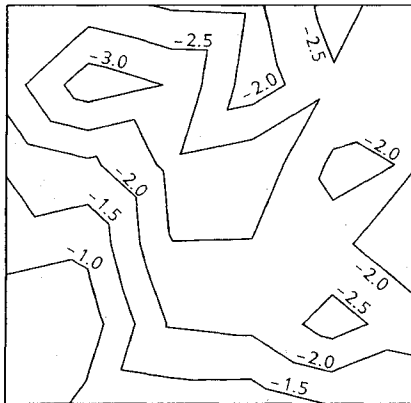
(3) 地下水位の将来予測結果

透水係数の空間分布の推定結果のうち、CASE-1 の観測データを用いた推定 ABCED の結果 (図-9, 図-10) を利用して地下水位の予測解析を行った。予測には透水係数の推定結果と地下水位、透水係数、流量の推定誤差共分散マトリクス $P_{t+1/t}$ を用い、地下水位と流量の初期値はそれぞれ予測開始時の値として 0.0m と 0.0l/min を設定した。また、ここでは透水係数をはじめとして地下水位や流量の推定誤差共分散による予測誤差を評価することを主な目的として、式 (13) のシステム誤差共分散マトリクスは $Q_k = 0$ とした。以上の設定により図-4 の条件で地下水位の予測解析を実施し、節点番号 65 と 87 の位置の地下水位の変化を図-17 に示す。図には 2 点の地下水位の予測値と予測誤差 (標準偏差) の経時変化と、図-2 の透水係数の空間分布を用いて求められる真の地下水位低下量の経時変化を共に示している。

先の推定結果 (図-9) で地盤の左下領域の透水係数



観測データCASE-2 システム誤差分散 II
 図一15 推定 ABCED の透水係数の推定値 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)



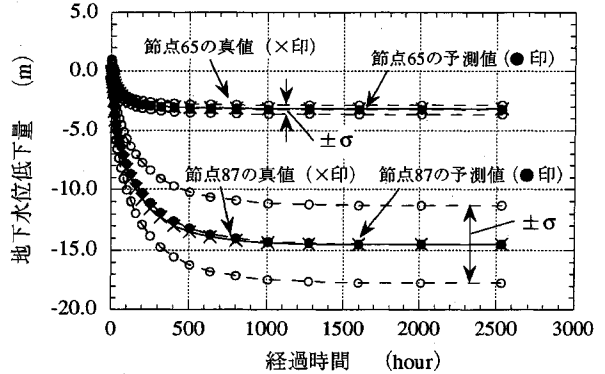
観測データCASE-2 システム誤差分散 II
 図一16 推定 DECBA の透水係数の推定値 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)

が大きく推定されているため、節点 65 では地下水位を指定した境界から地下水が供給され、水位はあまり低下せず約 3m 程度となる。これに対して節点 87 では大きく低下して 15m 程度になるが、両節点の予測値は共に真値とよく一致している。また、予測誤差を標準偏差の幅 ($\pm\sigma$) で示しているが、時間の経過とともに推定誤差が増大したのちほぼ一定値に収束している。

予測値と予測誤差の評価は透水係数などの推定値と推定誤差に依存して評価され、節点 65 のように地下水位低下量が少ない場合は揚水井を追加するなどの対策が検討されよう。また、予測誤差が大きく所定の予測精度が得られない場合は、予測精度を向上させるため追加試験の最適な配置を検討することも可能である。

5. 結論

本論文では、複数の揚水試験結果を利用した推定方法を提案した。この方法はカルマンフィルタの観測更新ア



図一17 節点 65 と 87 の地下水位の将来予測結果

ルゴリズムがベイズ推定法に基づくフィルタリング理論であることを利用し、1回の試験結果から推定される状態ベクトルの推定値と推定誤差共分散マトリクスを次の試験の事前情報として利用することで以降の推定結果をさらに信頼できるものに更新する方法である。

妥当性の検討として、ここでは仮想地盤モデルを用い、揚水井と観測井の配置に従って透水係数の空間分布が推定されることを確認した。ベイズ推定法を用いた推定では基本的に観測データを用いる順番に影響されず、異なる順番でも同一の推定結果が得られる。しかし、拡張カルマンフィルタでは非線形方程式の線形化を行っており、時間軸上で観測データのサンプリング間隔が長くなると線形化の誤差を生じ、この影響により観測データを用いる順番によって推定結果が異なる場合がある。このような線形化の誤差はシステム誤差分散を適切に設定することで除去することができ、システム誤差分散が適切に設定されていることは、観測データを用いる順番を変えても推定結果が同一になることで確認できる。

また、透水係数の空間分布推定結果を用いて、地下水流動の将来予測を行う手法を示した。この方法はカルマンフィルタの時間更新アルゴリズムを用いる方法で、透水係数の空間分布の推定結果や有限要素モデルをそのまま利用し、将来の地下水流動の予測値と予測誤差分散を求めることができる。

Appendix

n 次元の未知パラメータベクトル X と m 次元の観測ベクトル Y に関して観測方程式を式 (A.1) の線形モデルでモデル化し、観測誤差 v が期待値 0 と共分散マトリクス R で与えられる場合、最小二乗法による未知パラメータの推定値 \hat{X}_{ls} は式 (A.2) の正規方程式で与えられる¹⁴⁾。

$$Y = GX + v \dots\dots\dots (A.1)$$

$$\hat{X}_{ls} = [G^T R^{-1} G]^{-1} G^T R^{-1} Y \dots\dots\dots (A.2)$$

ここで $m \times n$ のマトリクス G を構成する n 個の m 次元縦ベクトルが線形独立でない場合、マトリクス G は悪条件 (ill-posed) となる。例えば、観測点数 m が未知パラメータ数 n より少ない場合は、 m 次元空間の n 個のベクトルは明らかに線形独立とはならない。また、厳密には線形独立であってもベクトル方向が近接し共線的な場合、わずかな観測誤差により解が大きく変化し不安定となる。このような場合の不安定性の緩和方法として、正則化一般逆マトリクスが用いられる¹⁵⁾。この方法は、式 (A.2) の代わりに、式 (A.3) により未知パラメータの推定値 \bar{X}'_{ls} を求める方法である。式 (A.4) が正則化一般逆マトリクスと呼ばれ、推定値 \bar{X}'_{ls} は式 (A.5) の評価関数 J を最小にする一意な解として求められる。

$$\bar{X}'_{ls} = C^+_{\lambda, P} Y = [G^T R^{-1} G + \lambda P_e^{-1}]^{-1} G^T R^{-1} Y \dots\dots (A.3)$$

$$C^+_{\lambda, P} = [G^T R^{-1} G + \lambda P_e^{-1}]^{-1} G^T R^{-1} \dots\dots (A.4)$$

$$J(X) = (Y - GX)^T R^{-1} (Y - GX) + \lambda X^T P_e^{-1} X \dots\dots\dots (A.5)$$

ここで λ は正則化パラメータ、 P_e^{-1} はペナルティマトリクスと呼ばれる $n \times n$ のマトリクスである。

一方、事前分布が既知で新たな観測ベクトルが得られる場合、事後分布に基づき推定値を更新するには式 (9) が用いられる。このベイズ推定値は事前分布がガウス分布に従う場合は最尤推定値に一致する。式 (7) の右辺に式 (3)、(5) を代入して対数尤度 $l(X|Y)$ を求めると式 (A.6) が得られる。ただし、 c は定数項である。

$$l(X|Y) = -\frac{1}{2} (Y - GX)^T R^{-1} (Y - GX) - \frac{1}{2} (X - \bar{X})^T P^{-1} (X - \bar{X}) + c \dots\dots (A.6)$$

事前分布が $\bar{X} = \mathbf{o}$ の場合、式 (A.6) の対数尤度を最大にする条件は、 $\lambda = 1$ かつ $P_e = P$ とした式 (A.5) の評価関数 J を最小にする条件と一致する。このことから、観測ベクトルが新たに得られたのちに事後分布の尤度を最大にする条件は式 (A.5) の評価関数 J の一種を最小にする

条件と一致し、推定誤差共分散マトリクス P は P_e と同様に悪条件のマトリクスの正則化を行い、解の安定化に寄与していると言える。また、 $\lambda = 1$ かつ $P_e = P$ の場合、式 (A.4) の右辺と式 (11) が一致することから、カルマンゲイン K は最小二乗法により状態ベクトルの最適な修正量を求めるための正則化一般逆マトリクスと解釈することができる。

参 考 文 献

- 1) 奥野哲夫・鈴木誠：不圧地下水を対象とした拡張カルマンフィルタによる透水係数の空間分布推定法、土木学会論文集, No.469 / III-23, pp.93~102, 1993.
- 2) Asaoka, A. and Matsuo, M. : Bayesian approach to inverse problem in consolidation and its application to settlement prediction, Proc. 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen, 1979.
- 3) Cividini, A., Maier, G. and Nappi, A. : Parameter estimation of a static geotechnical model using a Bayes' approach, Int. J. Rock. Min. Sci. & Geomech. Abst., Vol.20, No.5, pp.215~226, 1983.
- 4) Gavallas, G. R., Shah, P. C. and Seinfeld, J. H. : Reservoir history matching by Bayesian estimation, Soc. Pet. Eng., J., Vol.16, No.6, pp.337~350, 1976.
- 5) 米田稔・井上頼輝・太田祐史：地下水に関する意思決定問題へのベイズ推定の応用、環境衛生工学研究, Vol.7, No.3, 京都大学環境衛生工学研究会第15回シンポジウム講演論文集, pp.155~160, 1993.
- 6) 片山徹：応用カルマンフィルタ、朝倉書店, 1983.
- 7) Jazwinski, A. H. : Stochastic processes and filtering theory, Academic Press, 1970.
- 8) 有本卓：カルマン・フィルタ、産業図書, 1977.
- 9) Murakami, A. : Studies on the application of Kalman filtering to some geomechanical problems related to safety assessment, Doctral thesis, Kyoto University, 1991.
- 10) 繁樹算男：ベイズ統計入門、東京大学出版会, 1985.
- 11) de Marsily, G. : Quantitative Hydrogeology, Academic Press Inc., 1986.
- 12) 有本卓：現代情報理論、電気通信学会, 1978.
- 13) 宮沢光一：情報・決定理論序説、岩波書店, 1971.
- 14) 中川徹・小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析、東京大学出版会, 1982.
- 15) 武者利光・岡本良夫：逆問題とその解き方、オーム社, 1992.

(1993.9.24 受付)

IDENTIFICATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS USING PLURAL PUMPING TESTS AND PREDICTION OF GROUNDWATER FLOW

Tetsuo OKUNO, Makoto SUZUKI and Yasuaki ICHIKAWA

We propose an identification procedure of distributed parameter systems using the data of plural pumping tests. This procedure is based on the extended Kalman filter algorithm (Bayesian estimation). After the observational data of a pumping test are used to identify the spatially distributed hydraulic conductivities, the estimated values and the covariance matrix are updated iteratively with the observational data of the next pumping tests. The proposed procedure is verified with the simulated data in a model of a groundwater system, and the results are found to be reasonably accurate. Finally, we also demonstrate that the groundwater flow can be predicted with the estimated values and the covariance matrix.