

不連続変形法(DDA)とその岩盤工学への適用に関する研究

佐々木猛*・大西有三**・吉中龍之進***

不連続変形法(DDA, G. H. Shi, 1984)は、任意の弾性体の多角形で構成されるブロック相互の運動を動的、準静的に解析する手法である。著者らは、Shiの定式化を基本に、ブロック間の貫入に対しペナルティ法の改良、ブロックの弾塑性構成則の導入、ロックボルト要素およびトンネルの吹き付けコンクリートのモデル化などを想定した接着要素機能などの開発を行った。これらを、岩盤の不連続性を想定した岩盤構造物やモデル実験に適用し、その実用性を検討した。

Key Words: DDA, elasticity, plasticity, rock mass, joint, tunnel, rock bolt

1. はじめに

不連続変形法(DDA)は、G.H.Shi(1984)^{1)~3)}によって開発された。本手法は、任意の弾性体の多角形で構成されるブロック相互の運動を動的、準静的に解析することができる。ブロック間の運動を解析する手法はこれまで、有限要素法(FEM)と併用して用いられる結合バネ要素(Ngo, 1967)⁴⁾、ジョイント要素(R.G.Goodman, et al 1968)⁵⁾、個別要素法(DEM, P.A.Cundall, 1974)⁶⁾、剛体バネモデル(RBSM, 川井, 1976)⁷⁾などが提案、実用化されている。DDAは基本的に、弾性力学の中でFEMのハイブリッド変位型モデル(鷲津, 1972)の範疇に分類される⁸⁾。これは、川井(1980)が提案したEBSM(Elastic Body Spring Model)と同等である。また、すでに大西(1983)⁹⁾らはDEMに基づくこの考え方を導入している。しかし、この解析は、要素形状がひずみの関数であり要素間の接触状態が幾何学的非線形問題となるため非線形方程式を収束するまで繰り返し解く必要があり実用に至っていなかった。G.H.Shiは、DDAの非線形釣合い方程式にブロック間の貫入によるポテンシャルエネルギーを最小二乗法で評価する制約条件を設け、これを最小にするようにペナルティ法を導入する手法を開発した。この手法を用いることにより、ブロック間の貫入量を一定の誤差範囲以内に収める解が能率よく求められる。著者らは、DDAを用いて不連続面が存在する斜面や空洞周辺の安定性を検討するため、G.H.Shi(1989)³⁾の定式化を基本に、ロックボルト要

素、接着要素の開発、ブロックの摩擦特性に対するペナルティ法の改良、ブロックの降伏条件に対するDrucker-Pragerの弾塑性構成則および応力に対するJaumann微分を導入した^{10), 11)}。以上の手法を用いて、異なる走向/傾斜の節理群が存在する斜面、空洞モデル¹²⁾および岩盤ブロックモデル実験¹³⁾について解析した。また、有限要素法による同様のモデルの弾塑性解析の結果¹⁴⁾とも比較した。これらの結果から、DDAが不連続性岩盤モデルの解析に対して極めて有用であることを示す。

2. DDA解析理論の概要³⁾

1節でも述べたように、DDAはFEMの一種であるのでその定式化もFEMと同様の手順を踏む。ただし、未知数は、要素の剛体変位、剛体回転、ひずみである。要素の剛性は、ひずみエネルギーを最小化することによって得られる。ブロック間の接触は、ブロックの辺と隅角が接した場合、辺に垂直な法線方向バネと辺に平行なせん断バネが設定される。この接触マトリックスは、貫入による最小二乗ひずみエネルギーをペナルティ法により貫入量が一定量以下になるように繰り返し解かれる。以下にその特徴を述べる。

- (1) ひずみエネルギーの最小化原理を用いており、FEMと同様に解の唯一性が保証される。
- (2) 順解析および逆解析ができる。
- (3) 動的、静的問題が同じ定式化で計算される。
- (4) ブロック要素に任意の構成則が導入できる(弾性、非線形、弾塑性、粘性など)。
- (5) 任意の接触条件(Mohr-Coulomb則など)、境界条件(強制変位など)、荷重条件(熱応力、初期応力、初期ひずみ、慣性力、線分布荷重など)、ロックボルト要素などが設定できる。

*正会員 鹿島建設株式会社 情報システム部 主査
(〒107 東京都港区元赤坂1-2-7)

**正会員 工博 京都大学助教授 工学部環境地球工学科

***正会員 工博 埼玉大学教授 工学部建設基礎工学科

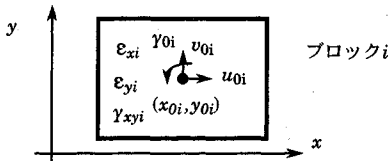


図-1 ブロックの座標系と未知数

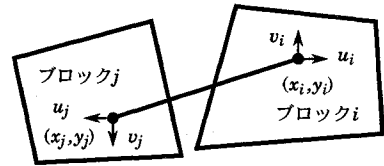


図-2 ロックボルトのモデル化

次に順解析の場合についてその概要を述べる。

(1) 未知数と要素形状関数

図-1は、ブロック*i*の座標系と未知数の関係を示す。ブロック内の応力とひずみが一定であると仮定すれば、2次元の場合、未知数は次式で表される。

$$\{D_i\} = \{u_0 \ v_0 \ \gamma_0 \ \epsilon_x \ \epsilon_y \ Y_{xy}\}^T \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 u_0, v_0 : 剛体変位、 γ_0 : 剛体回転であり、回転中心ではスピンの角度、 $\epsilon_x, \epsilon_y, Y_{xy}$: 軸およびせん断ひずみである。

ブロック内の変位 u, v を座標 x, y の関数として次式で表す。これは、FEMの

$$u = a_1 + a_2x + a_3y, \quad v = b_1 + b_2x + b_3y \quad \dots (2)$$

三角形ひずみ一定要素と同等である。式(1)の未知数を式(2)で表すと式(3)、(4)の関係になる。

$$u_0 = a_1 + a_2x_0 + a_3y_0, \quad v_0 = b_1 + b_2x_0 + b_3y_0 \quad \dots (3)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (b_2 - a_3) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに x_0, y_0 は剛体変位を求める点の座標であり、一般にはブロックの重心である。軸ひずみは、

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a_2, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = b_3 \quad \dots\dots\dots (5)$$

せん断ひずみは、

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (b_2 + a_3) \quad \dots\dots\dots (6)$$

である。式(3)、(4)を用いて、これを式(2)に代入し未知数 $\{D_i\}$ で整理すると次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y-y_0) & (x-x_0) & 0 & (y-y_0) \\ 0 & 1 & (x-x_0) & 0 & (y-y_0) & (x-x_0) \end{bmatrix} \{D_i\} \\ = [T_i] \{D_i\} \quad \dots (7)$$

式(7)は変形と要素形状の関係を示す。これを用いて各ステップで要素形状が更新される。

(2) 要素ひずみエネルギーと剛性マトリックス

要素のひずみエネルギーはFEMと同様に2次元の平面ひずみと仮定の場合、次式で表される。

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \iint \frac{1}{2} (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}) dx dy \\ &= \iint \frac{1}{2} \{e_i\}^T \{\sigma_i\} dx dy = \frac{1}{2} \{e_i\}^T [E] \{e_i\} dx dy \\ &= \frac{S}{2} \{e_0\}^T [E_0] \{D_i\} \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここに、 $[E]$: 応力-ひずみマトリックス、 $\{e_i\}$: ひずみベクトル、 $\{\sigma_i\}$: 応力ベクトルである。

$$\{\sigma_i\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}^T, \quad \{e_0\} = \{0 \ 0 \ 0 \ \epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}\}^T$$

$$\{\sigma_i\} = [E] \{e_i\}, \quad \{e_i\} = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}\}^T \quad \dots\dots (9)$$

$$[E] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(1-\nu) & 0 \\ \nu(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/(2(1-\nu)) \end{bmatrix}$$

$$[E_0] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [E] \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 E : 弾性(接線)係数、 ν : ポアソン比、 S : ブロックの面積、 $[0]$: 3×3 の0マトリックス、 $[E_0]$: 6×6 のブロックの応力-ひずみマトリックス。

i ブロックの剛性マトリックス $[K_{ii}]$ は式(8)のポテンシャルエネルギーを最小化して得られる。

$$\begin{aligned} [k_{rs}]_{ii} &= \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial d_{ri} \partial d_{si}} = \frac{S}{2} \frac{\partial^2}{\partial d_{ri} \partial d_{si}} \{D_i\}^T [E_0] \{D_i\} \\ &= S [E_0] = [K_{ii}] = [K_e] \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここに、 d_{ri} : 式(1)の第*i*ブロック (i = ブロック番号) の未知数 $\{D_i\}$ の各コンポーネント ($r=1 \sim 6$)。

(3) ロックボルトの剛性マトリックス

図-2は、ブロック*i, j* 内の任意点 $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ 間がロックボルトで結合されている状態を示す。

ここで、 i, j 点の x, y 方向の変位をそれぞれ u_i, v_i, u_j, v_j とすると、ロックボルトの変形量は、次式で表される。

$$dl = (1/l) \cdot [(u_i, v_i) \{l_x, l_y\}^T - (u_j, v_j) \{l_x, l_y\}^T] \quad \dots (12)$$

ここに、ロックボルトの長さ:

$$l = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad \text{ロックボルトの方向余弦: } l_x = (1/l) \cdot (x_i - x_j), \quad l_y = (1/l) \cdot (y_i - y_j) \text{ である。}$$

ロックボルトの剛性を S とすると、ロックボルトの応力は、次式で表される。

$$f = -S(dl/l) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ロックボルトのひずみエネルギーは、以上から $\Pi_b = -(1/2) f dl = (s/2l) dl^2 = (s/2l) \{D_i\}^T \{E_i\} \{E_i\}^T \{D_i\}$

$$\begin{aligned} &- (s/l) \{D_i\}^T \{E_i\} \{G_j\}^T \{D_j\} \\ &+ (s/2l) \{D_j\}^T \{G_j\} \{G_j\}^T \{D_j\} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

となる。

ここに、 $\{E_i\}^T = [T_i]^T \cdot \{l_x, l_y\}^T$, $\{G_j\}^T = [T_j]^T \cdot \{l_x, l_y\}^T$.
式(14)のポテンシャルエネルギーを最小化することにより、ロックボルトの剛性マトリックスは、

$$[k_{rs}]_{ii} = \frac{\partial^2 \Pi_b}{\partial d_{ri} \partial d_{si}} = \frac{S}{2l} \frac{\partial^2}{\partial d_{ri} \partial d_{si}} \{D_i\}^T \cdot \{E_i\}^T \cdot \{E_i\} \cdot \{D_i\}$$

$$= (S/l) \{E_i\}^T \cdot \{E_i\} = [K_{ii}] \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$[k_{rs}]_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi_b}{\partial d_{ri} \partial d_{sj}} = \frac{S}{l} \frac{\partial^2}{\partial d_{ri} \partial d_{sj}} \{D_i\}^T \cdot \{E_i\}^T \cdot \{G_j\} \cdot \{D_j\}$$

$$= -(S/l) \{E_i\}^T \cdot \{G_j\} = [K_{ij}] \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$[k_{rs}]_{ji} = \frac{\partial^2 \Pi_b}{\partial d_{rj} \partial d_{si}} = \frac{S}{l} \frac{\partial^2}{\partial d_{rj} \partial d_{si}} \{D_j\}^T \cdot \{G_j\}^T \cdot \{E_i\} \cdot \{D_i\}$$

$$= -(S/l) \{G_j\}^T \cdot \{E_i\} = [K_{ji}] \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$[k_{rs}]_{jj} = \frac{\partial^2 \Pi_b}{\partial d_{rj} \partial d_{sj}} = \frac{S}{2l} \frac{\partial^2}{\partial d_{rj} \partial d_{sj}} \{D_j\}^T \cdot \{G_j\}^T \cdot \{G_j\} \cdot \{D_j\}$$

$$= (S/l) \{G_j\}^T \cdot \{G_j\} = [K_{jj}] \quad \dots\dots\dots (18)$$

で求められる。

(4) ブロック内の点荷重の取扱い

i ブロック内の座標 (x,y) における点荷重 (F_x, F_y) のポテンシャルエネルギーは、

$$\Pi_p = -\{D_i\}^T \cdot \{E_i(x,y)\}^T \cdot \{F_x, F_y\}^T \quad \dots\dots\dots (19)$$

と表せる。これをブロックの重心で最小化する。

$$\{F_i\} = \frac{\partial^2 \Pi_p(0)}{\partial d_{ri}} = \frac{\partial^2}{\partial d_{ri}} \{D_i\}^T \cdot \{T_i(x,y)\}^T \cdot \{F_x, F_y\}^T$$

$$= \{T_i(x,y)\}^T \cdot \{F_x, F_y\}^T \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 $\{F_i\}$: i ブロック重心での外力ベクトルである。このように、ポテンシャルエネルギー最小化原理を用いることにより、釣り合い方程式に必要な個々の要素がそれぞれ定式化できる。

(5) ブロックの貫入とペナルティ法

図-3は、ブロックの運動時にブロック同士が貫入している状態を示す。ブロック同士の貫入は、貫入しているブロック j の一辺に垂直な量 d をスカラー量として求めている。したがって、ここでは、 i ブロックの貫入角度は考慮していない。ブロックの貫入による運動エネルギーは、ブロック間の貫入量 d による最小二乗的なエネルギーを式(21)で定義する。また貫入量 d は、要素の座標の関数 $\{e\}, \{g\}$ と i, j ブロックの未知数 $\{D_i\}, \{D_j\}$ で表すことができる。

$$\Pi_K = \frac{P}{2} d^2 \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$d = \frac{S_0}{l} + \{e\}^T \{D_i\} + \{g\}^T \{D_j\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

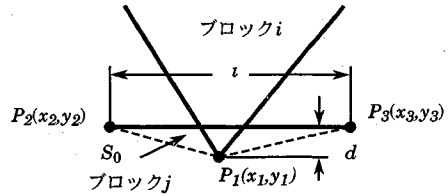


図-3 ブロックの貫入

ここに、

$$\{e_r\} = [(y_2 - y_3) \cdot [T_{ir}(x_1, y_1)] + (x_3 - x_2) \cdot [T_{jr}(x_1, y_1)]] / l \quad \dots\dots (23)$$

$$\{g_r\} = [(y_3 - y_1) \cdot [T_{ir}(x_2, y_2)] + (x_1 - x_3) \cdot [T_{jr}(x_2, y_2)]] / l$$

$$+ [(y_1 - y_2) \cdot [T_{ir}(x_3, y_3)] + (x_2 - x_1) \cdot [T_{jr}(x_3, y_3)]] / l \quad \dots\dots (24)$$

P : 十分大きな正の値のペナルティ係数、

S_0 : 貫入の面積、 $r: 1 \sim 6$ である。

$$\Pi_K = \frac{P}{2} (\{e\}^T \{D_i\} + \{g\}^T \{D_j\} + \frac{S_0}{l})^2 \quad \dots\dots\dots (25)$$

式(22)を式(21)に代入し、式(25)の貫入量 d をある一定値以下の制約条件で解くために、 Π_K を最小化する。ペナルティに関する剛性マトリックスは、

$$[k_{rs}]_{ii} = \frac{\partial^2 \Pi_K}{\partial d_{ri} \partial d_{si}} = \frac{P}{2} \frac{\partial^2}{\partial d_{ri} \partial d_{si}} \{D_i\}^T \cdot \{e\}^T \cdot \{e\} \cdot \{D_i\}$$

$$= P \{e\}^T \cdot \{e\} = [K_{ii}] \quad \dots\dots\dots (26)$$

以下、同様に

$$[k_{rs}]_{ij} = -P \{e\}^T \cdot \{g\} = [K_{ij}] \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$[k_{rs}]_{ji} = -P \{g\}^T \cdot \{e\} = [K_{ji}] \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$[k_{rs}]_{jj} = P \{g\}^T \cdot \{g\} = [K_{jj}] \quad \dots\dots\dots (29)$$

外力項は

$$\{f_r\}_i = -\frac{\partial \Pi_K}{\partial d_{ri}} = -\frac{PS_0}{2} \frac{\partial}{\partial d_{ri}} \{e\}^T \cdot \{D_i\}$$

$$= -\frac{PS_0}{2} \{e\} = \{F_i\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\{f_r\}_j = -\frac{\partial \Pi_K}{\partial d_{rj}} = \frac{PS_0}{2} \frac{\partial}{\partial d_{rj}} \{g\}^T \cdot \{D_j\}$$

$$= \frac{PS_0}{2} \{g\} = \{F_j\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

で求められる。

式(26)~(31)のように左辺の係数項に $[K_{ii}], [K_{ij}], [K_{ji}], [K_{jj}]$ の 6×6 の4つの連成マトリックスと右辺に $\{f_i\}, \{f_j\}$ の外力項があらわれる。

(6) ペナルティ法による接着条件

著者らはブロックを細分割して、ブロックの局所的な部分の応力やひずみをみたり、トンネルのライニング材で吹き付けコンクリートのようにブロック同士が接着している場合を解析する目的で、接着要素を開発した。

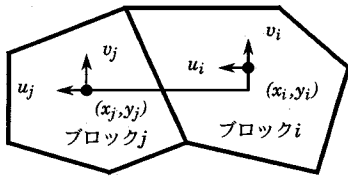


図-4 ブロックの接着条件

図-4は、接着を指定した要素*i, j*内の点の相対関係を示す。ここで、接着を指定したブロック*i, j*内の座標 (x_i, y_i) , (x_j, y_j) の相対変位を次式で定義する。

$$\{d_x, d_y\}^T = \{x_i + u_i - x_j - u_j, y_i + v_i - y_j - v_j\}^T \quad \dots\dots (32)$$

接着条件の場合、式(32)の相対変位は

$$\{d_x, d_y\}^T = 0 \quad \dots\dots (33)$$

でなければならない。

相対変位がある場合のバネの力は

$$\{F_x, F_y\}^T = -P \{x_i + u_i - x_j - u_j, y_i + v_i - y_j - v_j\}^T \quad \dots (34)$$

バネによる、ブロック*i, j*の相対変位のひずみエネルギーは次式で表される。

$$\Pi_f = -(1/2) \cdot (F_x \cdot d_x + F_y \cdot d_y) \quad \dots\dots (35)$$

ここで、接着を指定したブロック*i, j*内の座標 (x_i, y_i) , (x_j, y_j) 点の変位を各ブロック*i, j*の未知数で表す。

$$\{u_i, v_i\}^T = [T(x_i, y_i)] \cdot \{D\}, \quad \{u_j, v_j\}^T = [T(x_j, y_j)] \cdot \{D\} \quad \dots (36)$$

これを式(35)に代入し、整理すると

$$\begin{aligned} \Pi_f = & (P/2) \cdot \{D\}^T \cdot [T_i]^T \cdot [T_j] \cdot \{D\} - 2\{D\}^T \cdot [T_i]^T \cdot \{D\} \\ & + \{D\}^T \cdot [T_j]^T \cdot [T_j] \cdot \{D\} + 2\{D\}^T \cdot [T_i]^T \cdot \{x_i - x_j, y_i - y_j\}^T \\ & - 2\{D\}^T \cdot [T_j]^T \cdot \{x_i - x_j, y_i - y_j\}^T \\ & + \{x_i - x_j, y_i - y_j\} \cdot \{x_i - x_j, y_i - y_j\}^T \quad \dots\dots (37) \end{aligned}$$

となる。接着に関する剛性マトリックスは、ポテンシャルエネルギー Π_f を最小化し、

$$\begin{aligned} [k_{rs}]_{ii} = & \frac{\partial^2 \Pi_f}{\partial d_{ri} \partial d_{si}} = \frac{P}{2} \frac{\partial^2}{\partial d_{ri} \partial d_{si}} \{D\}_i^T \cdot [T_i]^T \cdot [T_i] \cdot \{D\}_i \\ = & P [T_i]^T \cdot [T_i] = [K_{ii}] \quad \dots\dots (38) \end{aligned}$$

以下、同様に

$$[k_{rs}]_{ij} = -P [T_i]^T \cdot [T_j] = [K_{ij}] \quad \dots\dots (39)$$

$$[k_{rs}]_{ji} = -P [T_j]^T \cdot [T_i] = [K_{ji}] \quad \dots\dots (40)$$

$$[k_{rs}]_{jj} = P [T_j]^T \cdot [T_j] = [K_{jj}] \quad \dots\dots (41)$$

外力項は、

$$\begin{aligned} \{f_r\}_i = & -\frac{\partial \Pi_f}{\partial d_{ri}} = -P \frac{\partial}{\partial d_{ri}} \{D\}_i^T \cdot [T_i]^T \cdot \{x_i - x_j, y_i - y_j\}^T \\ = & -P [T_i]^T \cdot \{x_i - x_j, y_i - y_j\}^T = \{F_i\} \quad \dots\dots (42) \end{aligned}$$

$$\{f_r\}_j = P [T_j]^T \cdot \{x_i - x_j, y_i - y_j\}^T = \{F_j\} \quad \dots\dots (43)$$

式(38)~(43)で求められる。

(7) ブロック表面の摩擦条件とペナルティ法

図-5は、ブロックの貫入によるペナルティの適用を示す。G.H.Shi(1989)は、ブロックの接触面に対

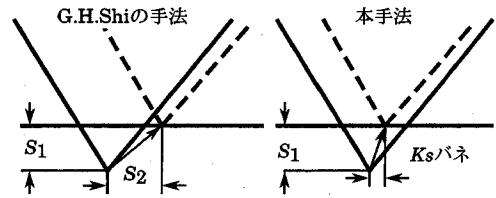


図-5 ペナルティ法の適用

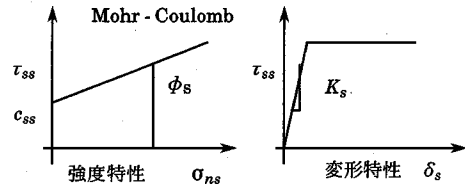


図-6 ブロック表面の摩擦条件

する法線(軸)および接線方向(せん断)の両方にペナルティを適用している。この時、ブロック表面の摩擦力が強度以下の場合、これをLock条件と呼び、元の位置に変形を戻している。この処理では、要素間の力の伝達と収束が極めて悪く、正しいと思われる結果が求まりづらい。そこで本研究では、ブロックの法線(軸)のみにペナルティを適用し、接線方向(せん断)には工学的なバネを与えた。図-6は、ブロック表面の摩擦条件を示す。ここではMohr-Coulombの摩擦特性を用いて、摩擦力が強度以内であれば、変形特性として実験などから求められる K_s バネを用い、摩擦が強度以上の場合は抵抗しないとす。すなわち、

$$\tau_{ss} < \sigma_{ns} \tan \phi_s + c_{ss} \quad \text{の場合、せん断バネ} = K_s$$

$$\tau_{ss} \geq \sigma_{ns} \tan \phi_s + c_{ss} \quad \text{の場合、せん断バネ} = 0$$

このことにより、ブロックの滑りに対する変形をより自然に求めることができる。

ここに、 τ_{ss} : ブロック表面のせん断応力、 σ_{ns} : 軸応力、 c_{ss} : 粘着力、 ϕ_s : 摩擦角、 K_s : せん断バネ。

(8) 釣り合い方程式

これらの操作を全ブロックについて行い、更に同様の操作で右辺の係数マトリックスに、剛性 $[K_e]$ 、接触力 $[K_\lambda]$ 、慣性力 $[K_a]$ 、点の拘束 $[K_{pp}]$ を左辺の外力ベクトルとして、初期応力 $\{F_{00}\}$ 、点荷重 $\{F_p\}$ 、慣性力 $\{F_a\}$ 、接触力 $\{F_\lambda\}$ などを同様に求める。これらを全て重ね合わせて次式のブロック全体の釣り合い方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & ([K_e] + [K_\lambda] + [K_a] + [K_{pp}]) \{D\} \\ = & (\{F_{00}\} + \{F_p\} + \{F_a\} + \{F_d\} + \{F_\lambda\}) \quad \dots\dots (44) \end{aligned}$$

ここに、

$$[K_a]: \text{慣性力マトリックス} = 2M [T_i] / \Delta^2,$$

M : ブロックの物体力、

Δ : 時間刻み、

$[K_{pp}]$: 固定条件マトリックス= $P[T_i]^T[T_i]$,
 $\{F_{\sigma 0}\}$: 初期応力ベクトル= $S\{\sigma_0\}$
 $=S\{0 \ 0 \ 0 \ \sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}^T$,
 S : ブロックの面積,
 $\{F_p\}$: 点荷重ベクトル= $[T_i]^T\{f_x \ f_y\}^T$,
 f_x, f_y : x, y 方向の点荷重,
 $\{F_b\}$: 物体力ベクトル= $\{f_{xb}S \ f_{yb}S \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$,
 f_{xb}, f_{yb} : x, y 方向の物体力,
 $\{F_a\}$: 慣性力ベクトル
 $= (2M/\Delta) (\iint [T_i]^T [T_i] dx dy) \{V_0\}$,
 V_0 : 初期速度(動的の場合のみ初速を与える),
 $\{V_1\}$: 1ステップ目の速度= $\Delta(\partial^2[D(t)]/\partial t^2) + \{V_0\}$
 $= (2/\Delta)\{D\} - \{V_0\}$, (次ステップから動的, 静的も同じ定式化)である.
 全体釣り合い方程式(44)は, 適当な時間ステップ Δ で式(45)の連立方程式を解くことによって得られる.
 $[K^i]\{\Delta D^i\} = (\{F^i\} + \{F_\lambda\})$ (45)
 $\{\Delta D^i\} = [K^i]^{-1}(\{F^i\} + \{F_\lambda\})$ (46)
 $\{D\} = \Sigma\{\Delta D^i\}$ (47)

ここに,
 $[K^i]$: i ステップの全体剛性マトリックス,
 $\{\Delta D^i\}$: i ステップの増分変位ベクトル,
 $\{D\}$: 総変位ベクトルである.
 ただし, 各時間ステップで貫入量 d をある一定値以下の制約条件で解くために, 収束計算が必要である.
 式(45)の中身は, 例えば式(48)のように要素の剛性 $[K_{eij}]$ が対角に並び, 要素間の連成 $[K_{\lambda ij}], [K_{\lambda ij}]$ が対角および非対角項となる対称行列である.

$$\begin{bmatrix} [K_{e11}] + [K_{\lambda 11}] & [K_{\lambda 12}] & [0] \\ [K_{\lambda 21}] & [K_{e22}] + [K_{\lambda 22}] & [K_{\lambda 23}] \\ [0] & [K_{\lambda 32}] & [K_{e33}] + [K_{\lambda 33}] \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \{\Delta D_1\} \\ \{\Delta D_2\} \\ \{\Delta D_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_1\} \\ \{F_1\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F_{\lambda 1}\} \\ \{F_{\lambda 2}\} \\ \{F_{\lambda 3}\} \end{Bmatrix} \quad \dots(48)$$

二次元の場合, これらは, 6×6 をサブマトリックスとしたブロックCholesky法によって解かれる. 解の数値的安定性は, 剛体変位に対して慣性力マトリックス $[K_a]$ が時間刻みの $1/\Delta^2$ に比例するため, 時間刻み Δ を小さくすることにより得られる.

3. 岩盤工学への適用について

DDAは2節で述べたように, 解析手法がFEMの一種であり, 式(10)の構成則を入れ替えるだけでブロックに種々の構成則の導入が可能である. 岩盤工学への適用に際しても, FEMで苦手な不連続面を自然にモデル化することができる. またブロックを弾性体(または弾塑性体)としているため, 初期応力

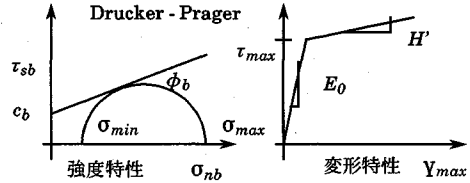


図-7 ブロック内部の強度、変形特性

が設定でき, 特に被りの深いトンネルなどの応力解放による掘削問題の解析が可能である. また, 岩塊の崩壊過程などもブロックを弾塑性体と仮定し, 個々のブロックの破壊を直接求めることができる.

(1) ブロックの弾塑性構成方程式

著者らは, 異なる節理群の組合せを有する岩盤斜面や空洞の安定性をみるため, 本手法にDrucker-Pragerの関連流れ則による弾塑性構成則を導入した¹⁰⁾. 図-7は, ブロック内の強度と変形特性の関係を示す. Drucker-Pragerの降伏条件を次式に示す.

$$F = \alpha J_1 + J_2^{1/2} - \bar{\sigma} / \sqrt{3} = 0 \quad \dots(49)$$

ここに,

$$J_1 = \sigma_{ii}, J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \bar{\sigma} = c_b (3(1 - 12\alpha^2)) \quad \dots(50)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\sin^2 \phi_b}{(3 + \sin^2 \phi_b)}} \quad \dots(51)$$

J_1, J_2 : 応力の不変量, S_{ij} : 偏差応力, c_b : 粘着力, ϕ_b : 内部摩擦角, E_0 : 弾性係数, H : 加工硬化係数, τ_{sb} : せん断応力, σ_{nb} : 軸応力である.

(2) 応力の客観性のJaumann微分による表現

DDAの定式化は, FEMのUp-dating Lagrangian形式と同等であり, 各増分毎にブロックの座標をUp-dateして行く. この場合, 応力の増分は, ブロックの各ステップでの剛体回転量 $\Delta\gamma_0$ に伴う座標回転に対する応力の重ね合わせの修正をJaumann共回転微分で表わし, 回転前後の応力を重ね合わせる.

$$[\dot{\sigma}_{ij}] = [\Delta\sigma_{ij}] + [\sigma_{ik}] [\Delta W_{kj}] + [\sigma_{jk}] [\Delta W_{ki}] \quad \dots(52)$$

総応力は,

$$[\sigma_{ij}]^{t+\Delta t} = [\sigma_{ij}]^t + [\dot{\sigma}_{ij}] \Delta t \quad \dots(53)$$

ここに,

$[\Delta W_{ij}]$: 剛体回転増分マトリックス(2×2),

$\dot{\sigma}$: 時間微分 $\partial/\partial t$,

$[\dot{\sigma}_{ij}]$: 応力速度テンソル,

$[\Delta\sigma_{ij}]$: 応力増分テンソル,

Δt : 時間刻みである.

これは, 斜面の崩壊解析などでブロックの回転運動が卓越する場合などに, 増分応力を各ステップで重ね合わせする際に重要である. また, 弾塑性解析では, 特にひずみの主軸方向が各ステップで異なってくるため, この操作は不可欠である.

4. 解析モデルおよび結果の考察

前節までの理論と岩盤工学への適用性を確かめるため、解析モデルとして

- (1) 斜面モデルの安定性
- (2) 被りの深い空洞の掘削モデルの安定性
- (3) 岩盤ブロックモデル実験の実測値の比較
- (4) 斜面近傍のトンネルモデルの安定性

の4項目についての検討を行った。

(1) 斜面モデルの安定性

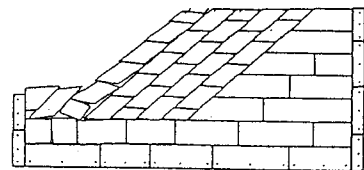
異なる走向/傾斜の節理群を含む斜面の安定性の検討を行った。表-1にこれらに用いた解析条件を示す。ケース-1, -2は斜面に対して水平な節理群と0.785rad(45°)および0.523rad(30°)の節理群の組合せを想定した場合である。側方および下端のブロックを固定し、斜面上部に0.588MN(60tf)の荷重を作用させた。図-8, 9にこれらの変形および主応力図を示す。主応力図中の黒塗りの部分は塑性領域を示す。これらは、節理群の傾斜による応力分布の違いがみられ斜面上部に与えた荷重が下端のブロックまで伝わっている。また、力の伝わり方の違いにより塑性領域の大きさが異なっている。総収束回数は、ケース-1, -2で120~140回である。これらから、DDAにおける解の精度と要素形状の関係では、要素サイズが均一で、接触点が分散している場合、収束性と計算精度が良い。しかし、要素サイズが均一でその比が大きいもの、鋭角的な点を持つ要素が一点に集中している場合、一般的に収束性、精度も悪い。後者の場合、計算の時間刻みをより小さくする必要がある。

(2) 被りの深い空洞の掘削モデルの安定性

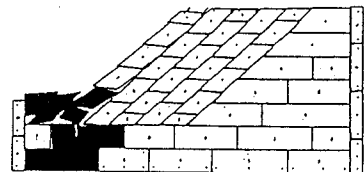
本手法の初期応力機能の適用性をみるため、被りの深い空洞モデルの応力解放による周辺岩盤の安定性の検討を行った。ケース-3, -4は初期応力が4.89MPa(500tf/m²)の静水圧状態の比較的深い被りを想定した地山に空洞を掘削した場合の応力解放によるモデルである。境界条件として、周辺のブロックを固定している、節理群の傾斜をそれぞれ1.57rad(90°)および0.785rad(45°)の組合せとした。図-10にこれらの主応力および塑性領域図を示す。これらでは、節理群の傾斜により塑性領域が異なっている。図-11にFEMによるケース-3と同様の条件による結果を示した¹⁴⁾。最大変形量は、FEMで9.6cm、DDAで9.1cmである。変形量のオーダーは概ね同程度であるが、塑性領域、主応力分布は連続体と不連続体モデルの差が出でおり、DDAはその分割形状に支配されている。また、応力の集中度合いは、ブロックサイズと空洞の形状に対する並び方に影響されている。このため、ケース-3では、空洞壁面に沿って、ケース-4では偶角部で大きくなっている。

表-1 解析ケースおよび条件

条件	斜面モデル(ケース1,2)	空洞モデル(ケース3,4)
計算ステップ	20	20
時間刻み(増分)	0.5s	0.5s
ペナルティ係数	1×10 ⁸	1×10 ⁹
最大変位率	0.01	0.01
単体体積重量	24.5kN/m ³ (2.5tf/m ³)	24.5kN/m ³ (2.5tf/m ³)
慣性力	B _x =0, B _y =-24.5kN(-2.5tf)	B _x =0, B _y =-24.5kN(-2.5tf)
弾性係数	1×10 ⁴ tf/m ² (98MPa)	1×10 ⁵ tf/m ² (980MPa)
ポアソン比	0.24	0.25
ブロックの強度	C=5tf/m ² , φ=40°(0.698rad)	C=50tf/m ² , φ=45°(0.785rad)
摩擦特性	C=0, φ=0°(0rad)	C=0, φ=0°(0rad)
加工硬化係数	0.49MPa(50tf/m ²)	4.89MPa(500tf/m ²)
荷重	0.588MN(60tf)	0
初期応力	σ _x =σ _y =τ _{xy} =0	σ _x =σ _y =4.89MPa(500tf/m ²)

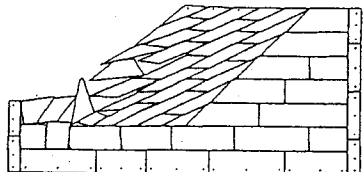


(a) 変形図

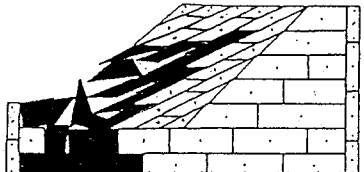


(b) 主応力および塑性領域

図-8 斜面モデル(ケース-1)



(a) 変形図



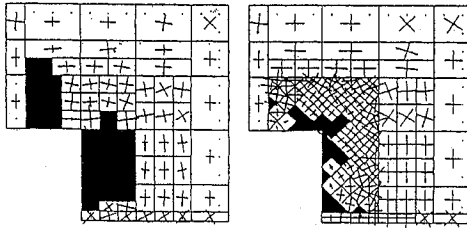
(b) 主応力および塑性領域

図-9 斜面モデル(ケース-2)

さらに、一点にブロックの偶角部が集中するこれらのモデルでは、非常に収束が悪くなる。これらの総収束回数は450~600程度である。

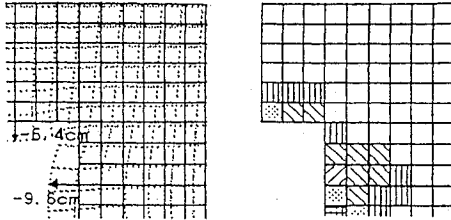
表-2 基本物性および解析条件

条件	岩盤ブロック(戸室石)	ジャッキ, 載荷板
単位体積重量	14.12kN/m ³ (1.44tf/m ³)	76.49kN/m ³ (7.8tf/m ³)
弾性係数	141.21kPa(1.44×10 ⁶ kgf/m ²)	20.59MPa(2.1×10 ⁶ kgf/m ²)
ポアソン比	0.2	0.3
摩擦特性	C=0, φ=40°(0.698rad)	C=0, φ=0°(0rad)



(a) (ケース-3) (b) (ケース-4)

図-10 主応力および塑性領域



(a) 変形図 (b) 塑性領域

図-11 FEM解析結果との比較(14)

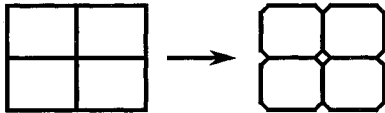


図-12 コーナのカット

これは、一ヶ所に4つの頂点が存在し、計算過程で複雑なパネの設定を繰り返しているからである。この対策として、図-12のようにブロックの各頂点を、一辺の1%程度をカットして、頂点が一ヶ所に集中しないようにした。この結果、収束回数は、20~30%低減された、しかしこのような処理は、解の精度、モデルの物理的な意味を損なわない程度に、必要に応じて用いると良い。

(3) 岩盤ブロックモデル実験の実測値の比較

節理群を含む岩盤の見かけの強度、変形特性を把握する目的で岩盤ブロックのモデル実験を実施した。表-2に実験に用いた岩盤ブロックの基本物性を示す。供試体には、戸室石を用いている。

図-13は、不規則モデル、タイプCの供試体形状と計測点を示す。平滑面の基本摩擦角は0.698rad(40°)である。図-14に載荷試験装置を示す。載荷は40cmの面に最大圧縮力を4個のジャッキで加え、長手方向の80cmの面に拘束圧を8個のジャッキで加えている。本試験では、拘束圧は一定で196kPa(2kgf/cm²)とした。供試体面上は自由面である。図-15, 16は、平滑な不連続面供試体の実験結果で供試体端面に加えた最大応力と各LVDTにより計測した変位との関係を示す。長手方向は1~2mmの

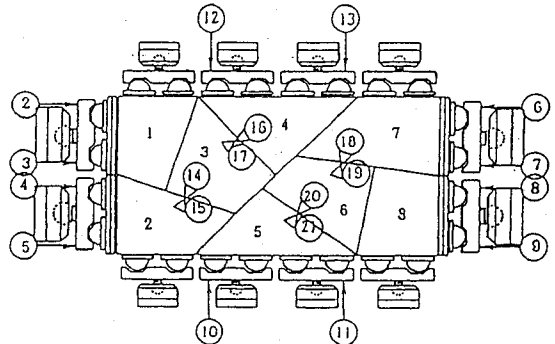


図-13 供試体と計測点(タイプC)

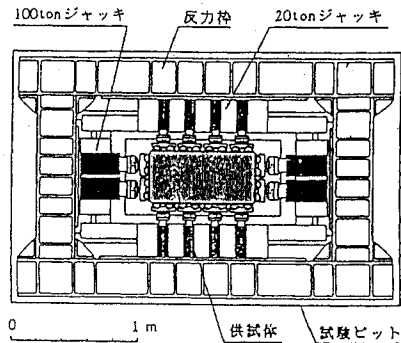


図-14 載荷試験装置

変位で最大強度に達している。図-17, 19は、タイプA,タイプCの各ステップの変形状態を。図-18, 20にDDAによる解析モデル(タイプA, C)および結果を示す。供試体形状、ピストンジャッキ、球座付き載荷板などの幾何学条件をほぼ模擬したものになっている。境界条件として12個のピストンジャッキのシリンダーガイドを固定し、各シリンダーの中央に荷重を与えた。ブロック間の摩擦角は0.698rad(40°)、ピストンジャッキおよび載荷板間は0radである。また、ブロックと載荷板間は0.349rad(20°)とした。これは、載荷板と供試体の間に用いたテフロンシートの摩擦角0.296rad(17°)に相当する。ブロック間の摩擦特性としてMohr-Coulomb則を与えた。すなわち、不連続面のせん断応力 $\tau_s > c + \sigma_n \tan \phi$ (滑り)状態では、せん断バネ K_s を0とし、 $\tau_s < c + \sigma_n \tan \phi$ (弾性)状態では、図-16のような実験で得られたせん断バネ $K_s = 1.47 \text{GN/m}^3 (150 \text{kgf/cm}^3)$ を与えた。これらから、載荷板とジャッキを含めた不連続な変形の状況が読みとれる。タイプCのブロック内の応力の流れをみると、左上から右下に向かい力が伝わっている

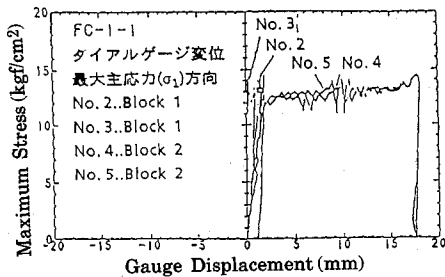


図-15 主軸方向変位

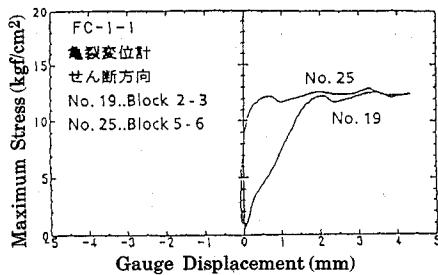


図-16 せん断方向変位

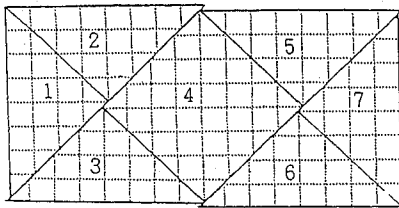


図-17 計測結果(タイプA, 2軸)

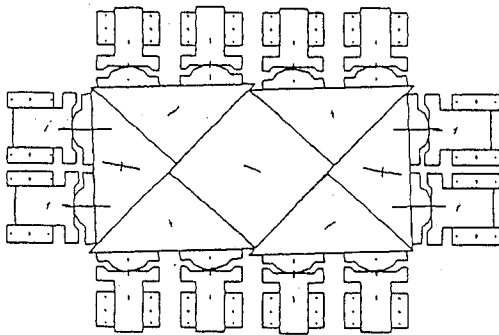


図-18 計算結果(タイプA, 2軸, $c=0, \phi=40^\circ$)

のがわかる。またこれは左下から右上に供試体を横切る面に沿い一様に滑るのではなく力の流れに沿った変形モードが現れている。これは、図-17, 19の計測結果と良く一致している。総収束回数は、20ステップで60程度である。

(4) 斜面近傍のトンネルモデルの安定性

著者らは、異なる節理群の組合せを有する岩盤斜面付近のトンネルの安定性をみるため、ブロックに Drucker - Prager の関連流れ則による弾塑性構成則、ロックボルトおよび接着条件を導入しその適用性を

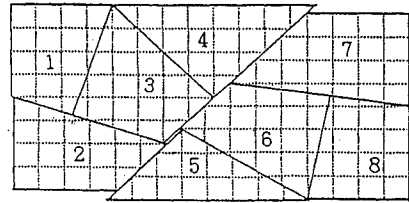


図-19 計測結果(タイプC, 2軸)

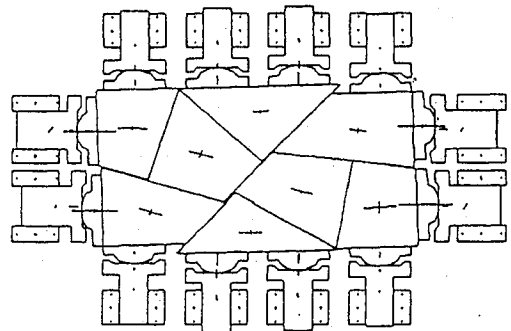


図-20 計算結果(タイプC, 2軸, $c=0, \phi=40^\circ$)

検討した。解析モデルとして異なる走向/傾斜の節理群の組合せを想定した。図-21に解析モデルと強度を示す。境界条件として、周辺のブロックを固定とした。また、境界から2層目までのブロックの表面の摩擦力を零とし、FEMのローラー支承を模擬した。斜面上部のブロックに0.588MN(60tf)の荷重を作用させた。弾性係数などのブロックの物性は、(1)の斜面モデルと同じ値を用いている。

図-22は、ブロック表面の摩擦特性 $c=0, \phi=0\text{rad}$ でブロック内部が弾性的の場合である。

図-23は、ブロック表面の摩擦特性 $c=0, \phi=0.698\text{rad}(40^\circ)$ でブロック内部が弾塑性の場合である。トンネル部から法尻にかけて塑性領域が繋がっている。図-24は、トンネル内に吹き付けなどを想定したライニングをモデル化した場合の弾性解の変形と主応力分布を示す。山側のライニングに応力集中が見られる。図-25は、ブロック内部が弾塑性の場合の結果である。ケース-2と比較し、塑性領域と変形が小さくなっているのがわかる。

図-26は、トンネル内のロックボルトと接着条件によるライニングのモデルを示す。図-27は、これらの支保条件をモデル化した場合の結果である。これらを見ると、変形および塑性領域が更に小さくなっており、支保条件の効果が現れている。総収束回数は、 $c=0, \phi=0$ の場合は20ステップで120程度であり、 $c=0, \phi=0.698\text{rad}(40^\circ)$ の場合は40ステップで430程度となっている。

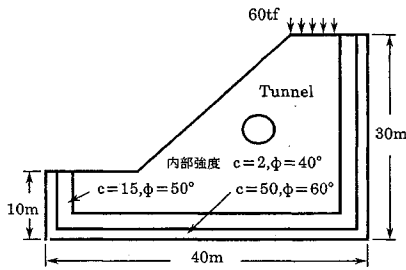


図-21 解析モデルおよび領域

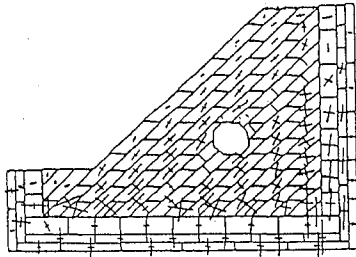


図-22 ケース1(弾性, ライニング無し)

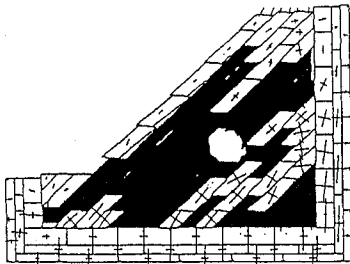


図-23 ケース2(弾塑性, ライニング無し)

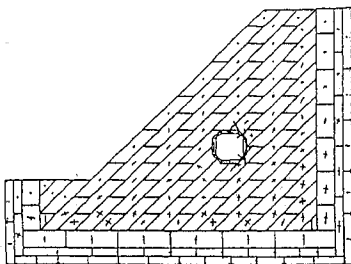


図-24 ケース3(弾性, ライニング有り)

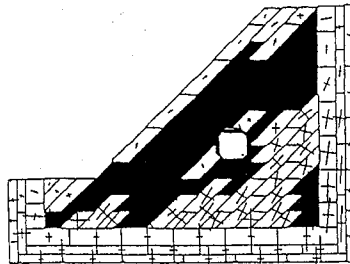


図-25 ケース4(弾塑性, ライニング有り)

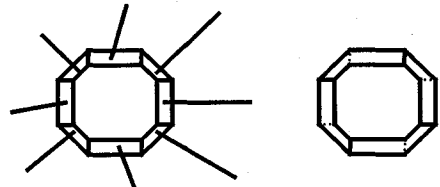


図-26 ロックボルトおよび接着要素の配置

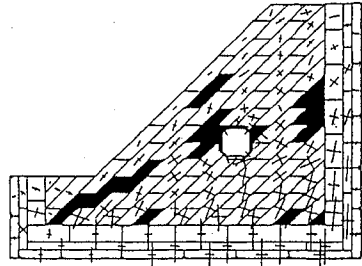


図-27 ケース5(弾塑性, ライニング(接着条件), ロックボルト有り)

5. 結 論

本報告では、DDAの岩盤工学への適用について、その実用性を確かめるため若干の検討を行った。これらの結果、以下のことが判明した。

- (1) 変形や応力分布はFEMの結果と良く一致しており、一応の精度がある。
- (2) 塑性領域の分布は、メッシュ形状に依存しており、連続体モデルとしてのFEMとやや異なる。
- (3) ブロックの貫入を制御するためのパネルテイ法による接触機構において、摩擦力が存在する場合、滑りの方向に工学的なバネを採用した結果、収束性が20~30%程度向上した。また、ブロックの頂点が集中する場合、一辺の1%程度のコーナーカットをし収束を早めた。
- (4) 岩盤ブロックのモデル実験の解析では、実験装置と供試体をそのまま表現できる。また、その結果は、実験値と良く一致しており、このような解析には極めて有効である。
- (5) 岩盤構造物の支保材であるロックボルトやライニングとしての接着要素は、構造物の安定性に極めて効果的である。これは、一般的な連続体モデルであるFEMなどの結果ではロックボルトなどの効果が表れにくいことと比較して対照的である。

以上から著者らは、DDAが不連続性岩盤モデルの解析手法として有効であり、FEMと同様に様々な応用が可能であることを示した。今後は、種々の実際の

問題に適用し、さらに、その実用性を検討する予定である。

謝辞：最後に本報告をまとめるのに際し、DDA実用化研究委員会の皆さまには貴重な御意見、御示唆を頂いた。ここに紙面をもって深勘なる謝意を表します。

参考文献

- 1) Shi, G.H. and R.E. Goodman : Discontinuous Deformation Analysis ,Proc. 25th U.S.Symposium on Rock Mechanics, pp.269~277, 1984.
- 2) Shi, G.H. and R.E. Goodman : Two Dimensional Discontinuous Deformation Analysis ,Int. Jour. Anal. Methods Geomech., Vol. 9, pp. 541~556, 1985.
- 3) Shi, G.H.: Block System Modeling by Discontinuous Deformation Analysis, Univ. of California, Berkeley, Dept. of Civil Eng. August, 1989.
- 4) Ngo, D. and Scordelis, A. C. : Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams ,Journal of the American Concrete Institute, Vol. 64, No. 3, pp.152~163, 1967.
- 5) Goodman, R. E. Taylor, R. and Brekke, T. L. : A Model for the Mechanics of Jointed Rock ,Journal of the Soil Mechanics & Foundations Div. ASCE , Vol. 84 , pp.637~660, 1968.
- 6) Cundall, P.A. : A Computer Model for Simulating Progressive ,Large Scale Movements in Blocky Rock System , ISRM Symposium, Nancy, France, pp.11~18, 1971.
- 7) 川井忠彦：離散化極限解析法に関する最近の話題，生研セミナーテキスト，1986。
- 8) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，日本鋼構造協会，コンピュータによる構造工学講座，II-3(A)，培風館，1972。
- 9) 大西有三・安倍吉生・長野恵一：変形を考慮したDEM(個別要素法)，第15回岩盤力学に関するシンポジウム，pp.136~140, 1983。
- 10) 庄子幹雄・佐々木猛・森川誠司：有限変形理論による不連続面を有する岩盤掘削モデルの弾塑性解析，第7回岩の力学国内シンポジウム講演論文集，pp.449~454, 1988。
- 11) 大西有三・佐々木猛：不連続変形法(DDA)とその岩盤工学への適用について，第24回岩盤力学に関するシンポジウム，pp.296~300, pp.1309~1312, 1992。
- 12) 大西有三・山向薫・佐々木猛・永井文男：不連続変形法(DDA)によるトンネルを含む岩盤斜面モデルの解析，土木学会第47回年次学術講演会講演概要集，第3部，pp.632~633, 1992。
- 13) 吉中龍之進・吉田淳・佐々木猛：不連続変形法(DDA)による岩盤ブロックモデル実験の解析，第27回土質工学研究発表会，pp.1309~1312, 1992。
- 14) 佐々木猛：有限要素法による節理性岩盤の複合降伏モデルに関する検討，土木学会第46回年次学術講演会講演概要集，第3部，pp.550~551, 1991。

(1993.3.16 受付)

DISCONTINUOUS DEFORMATION ANALYSIS AND ITS APPLICATION TO ROCK MECHANICS PROBLEMS

Takeshi SASAKI , Yuzo OHNISHI and Ryuunoshin YOSHINAKA

Discontinuous Deformation Analysis (DDA) was developed by G.H.Shi and R.E. Goodman^{1),2),3)}. It solves a finite element type of mesh where all the elements are isolated blocks and bounded by pre-existing discontinuity under kinematic conditions of dynamic and quasi-static motion. The authors developed elastic-plastic yield criteria of Drucker-Prager associated constitutive laws, rock-bolt and connected element and improved penalty method for block penetration. The developed methods are applied for the stability of rock slopes, tunnels and underground openings with different joint sets models and rock blocks test models. Since, these methods are applicable for the discontinuous rock mass models under many analytical conditions in theoretical and the results show validity for practical use.