

**招待論文**  
**INVITED**  
**PAPER**

## 招待論文

## 波浪変形解析のための波動方程式の比較研究

COMPARATIVE STUDY OF EQUATIONS FOR ANALYZING COASTAL WAVE TRANSFORMATION

磯部雅彦

Masahiko ISOBE

正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科  
(〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)**Key Words** : wave transformation refraction, diffraction,  
nonlinearity, dispersion, comparative study

波浪変形解析に際しては、微小振幅の規則波の理論が基本となるが、さらに必要に応じて不規則性（分散性）および有限振幅性（非線形性）を考慮する必要がある。本論文においては、まず、分散性および非線形性を任意の精度で考慮することのできる、非線形緩勾配波動方程式を導く。そこから従来の波動方程式が派生的に得られることを示しながら、それらの方程式の理論的特徴を明らかにする。また、種々の波動方程式を用いた数値計算例を示すことにより分散性および非線形性の影響を論じ、さらに数値計算結果と現地観測結果との比較例を示す。最後に、波浪変形解析の将来展望について述べる。

## 1. 緒 言

深海域から浅海域に入射した波浪は、水深変化や構造物などの影響によって変形する。図-1は浅海域における波浪変形の諸要素を模式的に示したものである。より厳密な解釈は後に譲るが、概念的には、浅水変形は同じ波高でのエネルギー輸送効率が水深によって変化することによるものであり、屈折は水深変化や流れによる波速の変化によって起こるもの、そして回折は構造物などによる波高の急変を平滑化するために起こるものである。また、砕波は波高が水深に対して大きくなりすぎた場合に起こる不安定現象であり、反射は構造物の存在や水深の急変など波動運動場の急変によって起こる。

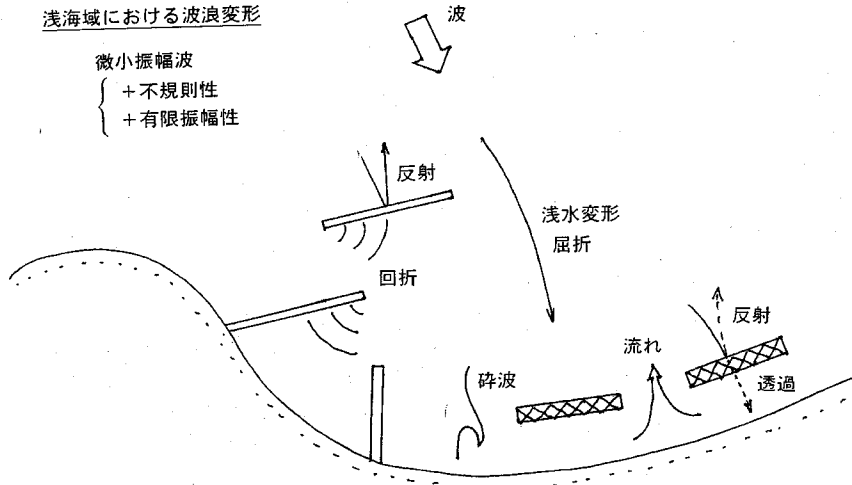
波浪は海岸・海洋における最も基本的な外力であり、波浪場を予測することの必要性は、設計波高の決定、海浜流の計算、漂砂量の算定など、様々な面から指摘できる。図からもわかるように、波浪変形の諸要素は同時に起こるものであり、そのような場合に用いられる一般的な計算法の確率が望まれる。波浪変形問題のうち、屈折・回折問題は水深変化と構造物の影響を考慮し、浅水変形問題を含む基本的なものである。これに反射率を境界条件として取り入れ、砕波をモデル化して組み入れることにより、一般的な波浪変形計算法の完成を目指すのが現在の方向である。

波浪変形解析を行う際に、最も簡単で基本となるのが

微小振幅の規則波に対する波動理論である。しかし、実際の波浪は無数の周期と波向の成分にエネルギーが分布する不規則波であるために、分散性（周期によって伝播速度が異なることによって成分波が分かれていくことから名付けられた）を考慮する必要がある。また、設計上で重要となる高波浪時や砕波帯付近では、有限振幅となるために非線形性も重要となる。さらにこの時には、非線形性によって高調波成分が生じるので、規則波の解析であっても分散性が影響することになる。

以前は、水深変化と構造物の相対的重要性によって領域を分割し、それぞれに屈折または回折のみを考慮して波動場の予測が行われていた。しかし、Berkhoff<sup>1)</sup>によって屈折と回折を含む波動方程式として緩勾配方程式が提案されて以来、屈折と回折の同時解析手法の研究が著しく進歩した。ただし、これは微小振幅の規則波を対象とする方程式であり、波の有限振幅性（非線形性）および不規則性（分散性）をどのように考慮していくかが問題として残された。これに対して、Peregrine<sup>2)</sup>の研究をきっかけとして、Boussinesq方程式と呼ばれる弱非線形・弱分散性の方程式を用いた波動場の解析手法も盛んに研究されるようになってきているが、これにも有限振幅不規則波浪の変形の解析には不十分な点が見られる。

現在までに、屈折または回折のみを取り扱う古典的な方程式も含めて、数多くの波浪変形解析のための基礎方程式が誘導され、それぞれの特性に応じて実務上も含め



図一 浅海域における波浪変形の諸要素

て使われている。本論文においては、まず、非線形不規則波浪の変形解析を行うことのできる一般的な波動方程式を新たに導く。次に、従来提案されている方程式がそこから派生的に誘導されることを示すことにより、それぞれの方程式の理論的な特徴を明らかにする。また、いくつかの数値計算例を示して考察を加える。最後に、新たに導いた方程式を用いた波浪変形解析の将来の可能性について述べる。

### 3. 非線形緩勾配波動方程式の誘導

#### (1) 基礎方程式および境界条件

通常の波浪場においては、流体は非圧縮性・非粘性とすることができ、またそのために流体運動は渦無しとなる。この時、基礎方程式および境界条件は、

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + g\eta = 0 \quad (z = \eta) \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \phi \nabla \eta \quad (z = \eta) \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \nabla \phi \nabla h = 0 \quad (z = -h) \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここに、 $\phi$  は速度ポテンシャル、 $\eta$  は水面変動を表す未知関数であり、 $h$  は静水深、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  は水平 2 方向の微分作用素、 $z$  は鉛直座標、 $t$  は時間、 $g$  は重力加速度を表す。式 (1) は非圧縮性流体の連続式であり、式 (2) および式 (3) はそれぞれ水面における力学的および運動学的境界条件、式 (4) は底面における運動学的境界条件である。これらの他に、岸側、沖側、側方、構造物周辺など、水平方向の境界条件が与えられると、特定の問題に対する解が定まることになる。

速度ポテンシャルとともに対象空間における未知関数である圧力は、上の方程式によって速度ポテンシャルを決定した後に非定常 Bernoulli の式を用いて定めればよい。

上式中、水面における 2 つの境界条件式 (2) および (3) が非線形となっているため、ほとんどの場合解析解は得られない。また、式 (4) の第 2 項が海底勾配の影響を表すが、これを厳密に扱うのも難しい。そこで、提案されている波動方程式を導くには何らかの近似を導入することになるが、その仮定によってそれぞれ適用範囲の異なる波動方程式が導かれる。いずれも共通していることは、鉛直方向の分布関数を導入することによって  $z$  方向の積分を解析的に済ませ、最終的に水平 2 方向のみを独立変数として残した方程式にすることである。灘岡・中川<sup>3),4)</sup>はこの考え方を進め、水平水粒子速度の鉛直分布を、種々の角周波数で微小振幅波理論から得られる双曲線関数型の鉛直分布関数の重ね合わせとして表現し、運動方程式に Galerkin 法を適用して、波動方程式を導いている。この方程式は、重ね合わせの項数の取り方により、強非線形や強分散性の波浪場解析に用いることができるという点で、非常に優れている。本論文でもまず強非線形性・強分散性にも対応できる波動方程式を誘導するが、渦無し条件を活用すれば Bernoulli の式のような積分形で運動が記述でき、それによって微分方程式が単純化されることを念頭において、Lagrangian の停留化問題として誘導を進める。その際に鉛直分布関数として任意の関数を考えることにより、非線形不規則波浪の変形解析に幅広く適用可能で、他の波動方程式をすべて包含する新しい波動方程式が導かれることになる。

#### (2) Lagrangian の定義

式 (1)~(4) と等価な Lagrangian の 1 つとして、

次式が得られている<sup>5)</sup>。

$$L[\phi, \eta] = \int_{t_1}^{t_2} \int_A \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + g z \right\} dz dA dt \dots (5)$$

ここに、 $t_1$  および  $t_2$  は対象時間の開始と終了を表し、 $A$  は対象領域の  $(x, y)$  平面における広がりを表す。

Lagrangian  $L$  を未知関数  $\phi$  と  $\eta$  の汎関数とみなし、これらに対する変分をとれば、

$$\begin{aligned} \delta L = & - \int_{t_1}^{t_2} \int_A \int_{-h}^{\eta} \left( \nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \delta \phi dz dA dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_A \left[ \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + g \eta \right\} \delta \eta \right]_{z=\eta} \\ & + \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \eta \nabla \phi - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} \delta \phi \Big|_{z=\eta} \\ & + \left[ \nabla h \nabla \phi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \delta \phi \Big|_{z=-h} dA dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \oint_C \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta \phi dz ds dt \\ & + \int \int_A \int_{-h}^{\eta} [\delta \phi]_{t_1}^{t_2} dz dA \dots (6) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $C$  は  $A$  の境界を表す閉曲線である。領域内や各境界における  $\phi$  および  $\eta$  の変化  $\delta \phi$  および  $\delta \eta$  に対して  $L$  を停留させるためには、それらに対する係数を 0 とすればよく、式 (6) の左辺第 1 項、および左辺第 2 項中の 3 つの部分より式 (1)~(4) を得る。第 3 項および第 4 項は、それぞれ水平方向の境界条件および初期条件に関する部分であるが、この段階では考慮せず、得られた波動方程式を解く際の境界条件および初期条件として別途考慮されることになる。

(3) 鉛直分布関数による解の重ね合わせ表示

前述のように、 $L$  の停留条件を直接適用すると、3 次元の基礎方程式と境界条件式 (1)~(4) になってしまう。2 次元の波動方程式を得るためには、 $\phi$  の鉛直方向の分布形を近似する関数をあらかじめ与えておき、Lagrangian の定義式 (5) において  $z$  に関する積分を解析的に行ってしまった上で、停留条件を求めればよい。その際、鉛直分布関数をどのようなものにするかが、得られる波動方程式の精度を決定することになる。そこでこの段階では、解を鉛直分布関数の重ね合わせとして表示することにする。これにより、鉛直分布関数として任意の数学的に完備な関数系をとれば、項数を増やすことによって任意の精度が得られることが保証される。

具体的に、 $Z_\alpha(z; h(x))$  を水深  $h$  をパラメタとする任意の鉛直分布関数とし、 $\phi$  を

$$\phi(x, z, t) = \sum_{\alpha=1}^N Z_\alpha(z; h(x)) f_\alpha(x, t) \equiv Z_\alpha f_\alpha \dots (7)$$

のように  $N$  個の鉛直分布関数の重ね合わせとして表示する。ここに、 $f_\alpha$  は  $Z_\alpha$  の係数、 $\mathbf{x} = (x, y)$  は水平座標

であり、以後は右側の表示のように添え字が重なった場合には総和規約を適用するものとする。

ここで当初の目標に従って、 $Z_\alpha$  が具体的に与えられたものとして、式 (5) の  $z$  に関する積分を解析的に行った形での表示にする。すなわち、

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial t} dz = \int_{-h}^{\eta} Z_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dz = \bar{Z}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \dots (8)$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 dz &= \frac{1}{2} \int_{-h}^{\eta} \left( Z_\alpha \nabla f_\alpha + \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} f_\alpha \nabla h \right)^2 dz \\ &= \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} \nabla f_\alpha \nabla f_\beta + C_{\alpha\beta} f_\alpha \nabla f_\beta \nabla h \\ &\quad + \frac{1}{2} D_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta (\nabla h)^2 \dots (9) \end{aligned}$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 dz = \frac{1}{2} \int_{-h}^{\eta} \left( \frac{\partial Z_\alpha}{\partial z} f_\alpha \right)^2 dz = \frac{1}{2} B_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \dots (10)$$

$$\int_{-h}^{\eta} g z dz = \frac{g}{2} (\eta^2 - h^2) \dots (11)$$

ここに

$$\bar{Z}_\alpha = \int_{-h}^{\eta} Z_\alpha dz \dots (12)$$

$$A_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} Z_\alpha Z_\beta dz \dots (13)$$

$$B_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial z} \frac{\partial Z_\beta}{\partial z} dz \dots (14)$$

$$C_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} Z_\beta dz \dots (15)$$

$$D_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial h} \frac{\partial Z_\beta}{\partial h} dz \dots (16)$$

であるから、式 (5) は

$$\begin{aligned} L[f_\alpha, \eta] &= \int_{t_1}^{t_2} \int_A \xi \left( f_\alpha, \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}, \nabla f_\alpha, \eta \right) dA dt \dots (17) \\ \xi \left( f_\alpha, \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}, \nabla f_\alpha, \eta \right) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g}{2} (\eta^2 - h^2) + \bar{Z}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial t} + \frac{1}{2} A_{\gamma\beta} \nabla f_\gamma \nabla f_\beta + \frac{1}{2} B_{\gamma\beta} f_\gamma f_\beta \\ &\quad + C_{\gamma\beta} f_\gamma \nabla f_\beta \nabla h + \frac{1}{2} D_{\gamma\beta} f_\gamma f_\beta (\nabla h)^2 \dots (18) \end{aligned}$$

となる。

(4) 変分原理の適用

式 (17) で表される汎関数を停留させるための条件として、変分法において多関数、多変数の場合の Euler 方程式 (19) および (20) が成立する必要がある。

$$\frac{\partial \xi}{\partial f_\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial (\partial f_\alpha / \partial t)} \right] + \nabla \left[ \frac{\partial \xi}{\partial (\nabla f_\alpha)} \right] \dots (19)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial (\partial \eta / \partial t)} \right] + \nabla \left[ \frac{\partial \xi}{\partial (\nabla \eta)} \right] \dots (20)$$

まず、式 (18) より、

$$\frac{\partial \xi}{\partial f_\alpha} = B_{\alpha\beta} f_\beta + C_{\alpha\beta} \nabla f_\beta \nabla h + D_{\alpha\beta} f_\beta (\nabla h)^2 \dots (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial (f_\alpha / \partial t)} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [Z_\alpha] = Z_\alpha^0 \frac{\partial \eta}{\partial t} \dots\dots\dots (22)$$

$$\nabla \left[ \frac{\partial \xi}{\partial (\nabla f_\alpha)} \right] = \nabla [A_{\alpha\beta} \nabla f_\beta + C_{r\alpha} f_r \nabla h] \dots\dots\dots (23)$$

ここに、

$$Z_\alpha^0 = Z_\alpha |_{z=n} \dots\dots\dots (24)$$

であるから、式 (19) からは

$$Z_\alpha^0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla (A_{\alpha\beta} \nabla f_\beta) - B_{\alpha\beta} f_\beta + \nabla (C_{\beta\alpha} f_\beta \nabla h) - C_{\alpha\beta} \nabla f_\beta \nabla h - D_{\alpha\beta} f_\beta (\nabla h)^2 = 0 \dots\dots\dots (25)$$

を得る。ここで緩勾配を前提として、海底勾配の2乗と海底の曲率(2階微分)のオーダーを無視すれば、最終的に

$$Z_\alpha^0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla (A_{\alpha\beta} \nabla f_\beta) - B_{\alpha\beta} f_\beta + (C_{\beta\alpha} - C_{\alpha\beta}) \nabla f_\beta \nabla h + \frac{\partial Z_\beta^0}{\partial h} Z_\beta^0 f_\beta \nabla \eta \nabla h = 0 \dots\dots\dots (26)$$

を得る。

式 (20) に関しては、

$$\frac{\partial \xi}{\partial (\partial \eta / \partial t)} = \frac{\partial \xi}{\partial (\nabla \eta)} = 0 \dots\dots\dots (27)$$

のように右辺が0であるから、左辺を求めることにより

$$g\eta + Z_\beta^0 \frac{\partial f_\beta}{\partial t} + \frac{1}{2} Z_r^0 Z_\beta^0 \nabla f_r \nabla f_\beta + \frac{1}{2} \frac{\partial Z_r^0}{\partial z} \frac{\partial Z_\beta^0}{\partial z} f_r f_\beta + \frac{\partial Z_\beta^0}{\partial h} Z_\beta^0 f_r \nabla f_\beta \nabla h + \frac{1}{2} \frac{\partial Z_r^0}{\partial h} \frac{\partial Z_\beta^0}{\partial h} f_r f_\beta (\nabla h)^2 = 0 \dots\dots\dots (28)$$

となるが、これに対しても緩勾配の仮定を適用し、

$$g\eta + Z_\beta^0 \frac{\partial f_\beta}{\partial t} + \frac{1}{2} Z_r^0 Z_\beta^0 \nabla f_r \nabla f_\beta + \frac{1}{2} \frac{\partial Z_r^0}{\partial z} \frac{\partial Z_\beta^0}{\partial z} f_r f_\beta + \frac{\partial Z_\beta^0}{\partial h} Z_\beta^0 f_r \nabla f_\beta \nabla h = 0 \dots\dots\dots (29)$$

を得る。

式 (26) および (29) は、 $Z_\alpha$  を与えた場合に、 $f_\alpha$  および  $\eta$  を未知関数とする連立偏微分方程式となっている。今、 $N$ 成分の鉛直分布関数の重ね合わせを考えると、未知関数は  $N+1$  個で、方程式は式 (26) から  $N$  個と式 (29) から1個の合計  $N+1$  個となって一致する。これらは時間に関しては、1階微分を線形な形で含むだけの比較的簡単なものであり、与えられた初期条件から、水平方向の境界条件を用いて順次解いていけばよい。この段階では、非線形性についての単純化はしていないので、非線形波浪の変形解析に適用できる。また分散性も、効率的な鉛直分布関数系をある程度の成分数とすることで、任意の精度で取り組むことができるので、入射波として不規則波を与えれば不規則波の変形解析が行える。この意味で、この方程式は非線形性と分散性を同時に取り入れて、波浪変形解析を行うための方程式であり、非線形緩勾配波動方程式と呼ぶことにする。

### 3. 波動方程式の体系的整理

平面波浪場の解析のための波動方程式の解析は Liu<sup>6)</sup>、磯部<sup>7)</sup>、土木学会<sup>8)</sup>などに詳しい。特に、土木学会<sup>8)</sup>では各方程式の誘導から計算法・計算例に至るまで扱われている。ここでは、前節で得られた非線形緩勾配波動方程式が、既往のすべての主要な波動方程式を含んでいることを示し、さらにその関係から各波動方程式の理論的な位置づけを明らかにする。

#### (1) 緩勾配方程式

非線形緩勾配波動方程式 (26) および (29) において、未知関数である  $f_\alpha$  および  $\eta$  に関する非線形項を無視すれば、

$$Z_\alpha^0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla (A_{\alpha\beta}^0 \nabla f_\beta) - B_{\alpha\beta}^0 f_\beta + (C_{\beta\alpha}^0 - C_{\alpha\beta}^0) \nabla f_\beta \nabla h = 0 \dots\dots\dots (30)$$

$$g\eta + Z_\beta^0 \frac{\partial f_\beta}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (31)$$

となる。ここに、上付きの添え字<sup>0</sup>は、 $z=0$  (静水面) における値を表すものとする。

さらに、鉛直分布関数として、微小振幅波理論から得られる次の1成分のみをとることにする。

$$Z_1 = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \dots\dots\dots (32)$$

ここに、

$$\omega^2 = gk \tanh kh \dots\dots\dots (33)$$

であり、 $\omega$  は解析対象波の角周波数と一致させるか、または近い値にとった角周波数である。

この場合、定義式 (13) および (14) などにより、

$$Z_1^0 = 1, A_{11}^0 = \frac{cc_0}{g}, B_{11}^0 = \frac{\omega^2}{g} (1-n) \dots\dots\dots (34)$$

であり、したがって式 (30) および (31) は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \left( \frac{cc_0}{g} \nabla f_1 \right) - \frac{\omega^2}{g} (1-n) f_1 = 0 \dots\dots\dots (35)$$

$$g\eta + \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (36)$$

となる。

これらより  $\eta$  を消去すれば

$$-\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \nabla (cc_0 \nabla f_1) - \omega^2 (1-n) f_1 = 0 \dots\dots\dots (37)$$

となる。これは Kirby ら<sup>9)</sup> や Massel<sup>10)</sup> と一致し、ここでの誘導の過程から、鉛直分布関数の近似度が悪くならない限り、解析の対象とする波の角周波数  $\hat{\omega}$  が  $\omega$  と異なっていたり、対象波が不規則波であってもよいことが理解できる。

解析対象波が正弦波である場合、

$$f_1(x, t) = F(x) e^{-i\hat{\omega}t} \dots\dots\dots (38)$$

と書けるから、式 (37) は

$$\nabla(cc_0 \nabla F) + \{\hat{\omega}^2 - \omega^2(1-n)\}F = 0 \quad (39)$$

となり、さらに  $k$  を決定するための角周波数  $\omega$  と対象波の角周波数  $\hat{\omega}$  が一致する場合には、

$$\nabla(cc_0 \nabla F) + k^2 cc_0 F = 0 \quad (40)$$

となつて、Berkhoff<sup>1)</sup> によって初めて導かれた緩勾配方程式を得ることになる。誘導過程より、鉛直分布関数が式 (32) で近似される限りにおいて、屈折・回折を含む線形波浪変形解析に用いられることは明らかである。

ここで、式 (37) または (39) を用いて、 $k$  に対応する角周波数  $\omega$  と解析対象波の角周波数  $\hat{\omega}$  とが異なる場合の波浪変形解析を行う場合において、波数にどのような誤差がでるか求めておこう。すなわち、計算結果として得られる波数ベクトルを  $\hat{k}$  とし、一様水深中で

$$F = ae^{ikx} \quad (41)$$

なる解が得られたとすれば、これを式 (39) に代入することにより、 $\hat{k} = |\hat{k}|$  に対して

$$-cc_0 \hat{k}^2 + \hat{\omega}^2 - \omega^2(1-n) = 0 \quad (42)$$

すなわち

$$\hat{k} = k \sqrt{1 + \frac{1}{n} \left\{ \left( \frac{\hat{\omega}}{\omega} \right)^2 - 1 \right\}} \quad (43)$$

となる。ここで  $\hat{\omega} = \omega$  の場合に  $\hat{k} = k$  となることは当然として、 $\hat{\omega} = \omega$  での  $\hat{\omega}$  に対する  $\hat{k}$  の変化率を求めると

$$\left. \frac{d\hat{k}}{d\hat{\omega}} \right|_{\hat{\omega}=\omega} = \frac{1}{cn} = \frac{1}{c_0} \quad (44)$$

となつて、変化率までが厳密解と一致する程度の精度を有することがわかる。

なお、屈折・回折の物理的イメージをつかむため、Berkhoff ら<sup>1)</sup> にならつて、

$$F = ae^{iS} \quad (45)$$

において緩勾配方程式 (40) に代入すれば、実数部と虚数部から

$$(\nabla S)^2 = k^2 + \frac{\nabla(cc_0 \nabla a)}{cc_0 a} \quad (46)$$

$$\nabla[a^2 cc_0 \nabla S] = 0 \quad (47)$$

を得る。さらに、 $\rho$  を流体の密度として

$$\frac{\rho g}{2} a^2 = E, \quad \nabla S = \hat{k}, \quad c_0 = c_0 \frac{\hat{k}}{k} \quad (48)$$

とおけば、式 (47) は

$$\nabla[E \hat{c}_0] = 0 \quad (49)$$

となる。式 (46) は、計算される波動場の波数ベクトル  $\nabla S$  の絶対値が、分散関係式によって決まる波数  $k$  に対して右辺第 2 項の分だけ補正されることを示している。これによって波高の極大点での波数が小さくなり、したがって水深が深くなるのと同様の効果によって波向線が離れるために、波高が次第に減少することになる。これが回折効果である。また、式 (49) はエネルギー保存則

を表している。

### 多成分緩勾配方程式

式 (30) および (31) を多成分のままを用いることにし、適当に設定した角周波数  $\omega_\alpha$  に対する波数を用いた鉛直分布関数をとる。すなわち、

$$Z_\alpha = \frac{\cosh k_\alpha (h+z)}{\cosh k_\alpha h} \quad (50)$$

$$\omega_\alpha^2 = g k_\alpha \tanh k_\alpha h \quad (51)$$

とすると、

$$Z_\alpha^0 = 1 \quad (52)$$

$$A_{\alpha\beta}^0 = \begin{cases} \frac{1}{g} \frac{\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2}{k_\alpha^2 - k_\beta^2} & (\alpha \neq \beta) \\ \frac{1}{g} c_\alpha^2 n_\alpha & (\alpha = \beta) \end{cases} \quad (53)$$

$$B_{\alpha\beta}^0 = \begin{cases} \frac{1}{g} \frac{k_\alpha^2 \omega_\beta^2 - k_\beta^2 \omega_\alpha^2}{k_\alpha^2 - k_\beta^2} & (\alpha \neq \beta) \\ \frac{1}{g} \omega_\alpha^2 (1-n_\alpha) & (\alpha = \beta) \end{cases} \quad (54)$$

となる。

この方程式の分散性、すなわち角周波数に対する波速あるいは波数の関数形を調べるために、まず水深  $h$  が一様な場合を考えると、式 (30) および (31) は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + A_{\alpha\beta}^0 \nabla^2 f_\beta - B_{\alpha\beta}^0 f_\beta = 0 \quad (55)$$

$$g\eta + \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial f_\beta}{\partial t} = 0 \quad (56)$$

となり、これらの 2 式から  $\eta$  を消去すれば、

$$-\frac{1}{g} \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial^2 f_\beta}{\partial t^2} + A_{\alpha\beta}^0 \nabla^2 f_\beta - B_{\alpha\beta}^0 f_\beta = 0 \quad (57)$$

を得る。これは灘岡・中川<sup>3)</sup> と等価である。ここで、角周波数が  $\hat{\omega}$  の定形進行波を考えると、

$$f_\alpha = a_\alpha e^{i(kx - \hat{\omega}t)} \quad (58)$$

とおけば、式 (57) は

$$\sum_{\beta=1}^N \left( \frac{\hat{\omega}^2}{g} - B_{\alpha\beta}^0 \right) a_\beta = \hat{k}^2 \sum_{\beta=1}^N A_{\alpha\beta}^0 a_\beta \quad (59)$$

となる。ここで式 (53) および (54) を考慮すれば、いずれかの  $\alpha$  に対して  $\hat{\omega} = \omega_\alpha$  のとき、 $a_\beta = 1 (\beta = \alpha)$ 、 $0 (\beta \neq \alpha)$  および  $\hat{k} = k_\alpha$  が式 (59) の解となることが確かめられる。 $\hat{\omega}$  がどの  $\omega_\alpha$  と同等しくない場合については、与えられた  $\hat{\omega}$  に対して式 (59) の固有値  $\hat{k}^2$  を計算しなければならないが、分散関係式から得られる  $\hat{k}$  にかなり近くなることが期待できるのは明らかである。すなわち、多成分緩勾配方程式により、線形分散波の精度よい解析が可能となる。

### 非定常緩勾配方程式

緩勾配方程式の数値計算において、特に境界条件の取り扱いを容易にするために、緩勾配方程式と等価で時間

発展型にした連立偏微分方程式が提案され、非定常緩勾配方程式と呼ばれて広く用いられている<sup>12)-15)</sup>。数値波動解析法<sup>16), 17)</sup>もこれに似たものであるが、浅水係数の補正が必要となる分だけ、理論的な難点がある。

緩勾配不規則波動方程式

緩勾配方程式を基本として、不規則波あるいは複数の周波数成分を含む波の変形解析を行えるようにした試みもある<sup>9), 10), 18)-21)</sup>。これらは緩勾配不規則波動方程式と呼ぶべきものであり、前述の多成分緩勾配方程式と同様な目的を有するものとなっているが、今後、数値計算上での特徴を調べる必要がある。

(2) 放物型波動方程式

放物型波動方程式は Radder<sup>22)</sup> によって最初に導かれたものである。これは緩勾配方程式 (40) における解  $F$  が、 $x$  方向への進行波のものでほぼ近似できるものとして

$$F = \phi e^{ikx} \dots\dots\dots (60)$$

とおく。すなわち、これを式 (45) と比較すれば

$$\phi = ae^{i(S-kx)} \dots\dots\dots (61)$$

であるが、 $x$  方向への位相変化を取り除いたことにより、 $\phi$  の振幅  $a$  および位相  $S-kx$  の  $x$  方向への変化が小さいものと仮定する。

式 (60) を緩勾配方程式 (40) に代入すれば

$$i \frac{\partial (kcc_g)}{\partial x} \phi + 2ikcc_g \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (cc_g \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (cc_g \frac{\partial \phi}{\partial y}) = 0 \dots\dots\dots (62)$$

を得るが、ここで仮定により左辺第 3 項を無視する。その結果を式 (60) によって再び  $F$  を用いて表せば、Radder の導いた放物型波動方程式を得る。

$$\left\{ 2k^2 cc_g + i \frac{\partial kcc_g}{\partial x} \right\} F + 2ikcc_g \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (cc_g \frac{\partial F}{\partial y}) = 0 \dots\dots\dots (63)$$

その後も放物型方程式に関して種々の研究が行われ、斜め入射波に対する適用性を改善したものの<sup>23)-26)</sup>、エネルギー減衰項を含めたものの<sup>27)</sup>、砕波減衰および不規則性を取り入れたものの<sup>28)</sup>、非線形性を考慮したものの<sup>29)-32)</sup>などが提案されている。

(3) 回折方程式

微小振幅波の回折の基礎方程式は Helmholtz 方程式となる。これは緩勾配方程式 (40) において、水深を一定として  $c, c_g, k = \text{const.}$  とすることによって次のように得られる。

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \dots\dots\dots (64)$$

回折問題の解法については、グリーン関数を用いるものの<sup>33)-35)</sup>、近似解を用いて不規則波の回折まで求められるようにしたものの<sup>36), 37)</sup>、港口の境界条件を簡単化して差分法によって解くものなどがある<sup>38)</sup>。

(4) 屈折方程式

屈折方程式は Keller<sup>39)</sup> によって理論的に得られた。同じ式が、式 (46) および (49) において回折効果を表す式 (46) の右辺第 2 項を無視することによって得られる。すなわち、式 (46) は

$$(\nabla S)^2 = k^2 \dots\dots\dots (65)$$

なる eikonal 方程式となり、また、式 (49) がエネルギー保存式となる。

屈折方程式は波数ベクトルの非回転式や Wave Intensity Equation<sup>40)</sup> という形でも表現される。若干異なる形に見える後者も、式 (65) を直交曲線座標系によって表すことによって得られる<sup>41)</sup>。

屈折方程式を用いると複雑な地形に対して解が存在しない、すなわち波向線が交差するという問題が起こってしまうが、これは回折効果を無視したために起こるもので、水深変化のみによる波浪変形で純粋な屈折問題に見えるものでも、回折効果が重要となる場合がある。このような場合に波向線の密度によって波高を便宜的に求める方法が提案されている<sup>42)</sup>。

エネルギー平衡方程式

Karlsson<sup>43)</sup> は、不規則波の屈折問題を効率的に解くことのできるエネルギー平衡方程式を導いた。これは規則波の重ね合わせとしての不規則波の方向スペクトルを直接求めるための方程式であり、回折効果よりも不規則波の方向分散性の効果が大きい場合には回折問題に対しても実用上用いることができ、様々な研究がなされている<sup>44)-47)</sup>。

(5) 非線形長波方程式

非線形長波方程式は、水深が波長に比べてきわめて小さいものとして、静水圧分布を仮定し、非線形性は厳密に考慮することによって得られたもので、種々の研究が行われている<sup>48)-51)</sup>。

本研究での非線形緩勾配波動方程式 (26) および (29) から導くには、1 成分だけとることにしてその鉛直分布関数を

$$Z_1 = 1 \dots\dots\dots (66)$$

とおく。すると

$$A_{11} = h + \eta, B_{11} = 0, C_{11} = 0 \dots\dots\dots (67)$$

となるのを、式 (26) および (29) に代入すれば

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla [(h + \eta) \nabla f_1] = 0 \dots\dots\dots (68)$$

$$g\eta + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla f_1)^2 = 0 \dots\dots\dots (69)$$

である。式 (69) については勾配を取っておく。

$$g \nabla \eta + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla f_1) + (\nabla f_1 \nabla) (\nabla f_1) = 0 \dots\dots\dots (70)$$

ここで、水平水粒子速度を  $u = (u, v)$  と書けば

$$\phi = f_1, u = \nabla \phi = \nabla f_1 \dots\dots\dots (71)$$

であるから、式 (68) および (70) は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla[(h + \eta)u] = 0 \quad (72)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla)u + g \nabla \eta = 0 \quad (73)$$

となり、非線形長波方程式となる。すなわち、非線形長波方程式では、鉛直分布関数を単なる一様分布にとったことになる。

(6) Boussinesq 方程式

Boussinesq 方程式は非線形性と分散性のある程度含んだ波動方程式であり、Peregrine<sup>2)</sup>による理論的研究をきっかけにして最近盛んに用いられている。

Boussinesq 方程式を導くには、非線形緩勾配波動方程式 (26) および (29) において、2成分を採用し、鉛直分布関数を

$$Z_1 = 1, Z_2 = \frac{(h+z)^2}{h^2} \quad (74)$$

ととる。すると

$$Z_1^2 = 1, Z_2^2 = \frac{(h+\eta)^2}{h^2}, \frac{\partial Z_1^2}{\partial h} = 0, \frac{\partial Z_2^2}{\partial h} = -\frac{2(h+\eta)\eta}{h^3}$$

$$A_{11} = (h+\eta), A_{12} = A_{21} = \frac{(h+\eta)^3}{3h^2}, A_{22} = \frac{(h+\eta)^5}{5h^4}$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{21} = 0, B_{22} = \frac{4(h+\eta)^3}{3h^4}$$

$$C_{12} = 0, C_{21} = \frac{(h+\eta)^2(h-2\eta)}{3h^3} \quad (75)$$

であるから、式 (26) からの2式および式 (29) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \left[ (h+\eta) \nabla f_1 + \frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \nabla f_2 \right] \\ + \frac{(h+\eta)^2(h-2\eta)}{3h^3} \nabla f_2 \nabla h \\ - \frac{2(h+\eta)\eta}{h^3} f_2 \nabla \eta \nabla h = 0 \quad (76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(h+\eta)^2}{h^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \left[ \frac{(h+\eta)^3}{3h^2} \nabla f_1 + \frac{(h+\eta)^5}{5h^4} \nabla f_2 \right] \\ - \frac{4(h+\eta)^3}{3h^4} f_2 - \frac{(h+\eta)^2(h-2\eta)}{3h^3} \nabla f_1 \nabla h \\ - \frac{2(h+\eta)^3 \eta}{h^5} f_2 \nabla \eta \nabla h = 0 \quad (77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\eta + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{(h+\eta)^2}{h^2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \\ + \frac{1}{2} \left\{ \nabla f_1 + \frac{(h+\eta)^2}{h^2} \nabla f_2 \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(h+\eta)}{h^2} f_2 \right\}^2 \\ - \frac{2(h+\eta)\eta}{h^3} f_2 \left\{ \nabla f_1 + \frac{(h+\eta)^2}{h^2} \nabla f_2 \right\} \nabla h = 0 \quad (78) \end{aligned}$$

となる。

ここで、摂動法を念頭において

$$\nabla h \sim O(\sqrt{\epsilon}), \eta \sim f_1 \sim O(\epsilon), f_2 \sim O(\epsilon^2) \quad (79)$$

と仮定し、式 (76) と (78) の  $\epsilon^3$  以上、式 (77) の  $\epsilon^2$  以上の微小項を無視すれば、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \left[ (h+\eta) \nabla f_1 + \frac{h}{3} \nabla f_2 \right] + \frac{1}{3} \nabla f_2 \nabla h = 0 \quad (80)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \left[ \frac{h}{3} \nabla f_1 \right] - \frac{4}{3h} f_2 - \frac{1}{3} \nabla f_1 \nabla h = 0 \quad (81)$$

$$g\eta + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla f_1)^2 = 0 \quad (82)$$

となり、さらに式 (82) は、その勾配をとっておく。

$$g \nabla \eta + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla f_1) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla f_2) + (\nabla f_1 \nabla) (\nabla f_1) = 0 \quad (83)$$

式 (74) で与えられる鉛直分布関数より、

$$\phi = f_1 + \frac{(h+z)^2}{h^2} f_2 \quad (84)$$

であるから、

$$u = \nabla \phi = \nabla f_1 + \frac{(h+z)^2}{h^2} \nabla f_2 - \frac{2z(h+z)}{h^3} f_2 \nabla h \quad (85)$$

であり、さらに平均水平流速  $\bar{u}$  は

$$\bar{u} \approx \nabla f_1 + \frac{1}{3} \nabla f_2 + \frac{1}{3h} f_2 \nabla h \quad (86)$$

となる。式 (80) および (81) より

$$f_2 \approx -\frac{3h}{4} \nabla(h\bar{u}) + \frac{h^2}{4} \nabla \bar{u} \quad (87)$$

となることを用いて、式 (80) および (82) を  $\bar{u}$  および  $\eta$  によって書き改めれば、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla[(h+\eta)\bar{u}] = 0 \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \bar{u} + g \nabla \eta \\ = \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla(\nabla(h\bar{u})) - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial t} \nabla(\nabla \bar{u}) \quad (89) \end{aligned}$$

なる Boussinesq 方程式を得る。

すなわち、Boussinesq 方程式では、鉛直分布関数を0次および2次関数の重ね合わせとした上で、非線形性および鉛直・水平スケール比の高次項を無視したことになる。Boussinesq 方程式は直接差分<sup>52), 53)</sup>またはスペクトル法<sup>54), 55)</sup>によって計算され、さらに類似の方程式が議論されたりする<sup>56)-58)</sup>など、盛んに研究されている。

(7) 非線形・分散性波動方程式

灘岡・中川<sup>3), 4)</sup>は、水平方向の運動方程式に対してガラキン法を用い、強非線形性・強分散性の波浪に対する波動方程式を導いている。本研究とは出発点とした方程式が異なるために、最終的な波動方程式の形は異なるが、線形の場合は式 (55) と (56) に一致する。いずれも、今後の非線形不規則波の変形計算への展開が期待される。



表一 平面波浪場解析のための波動方程式の理論的適用範囲

計算手法 (参考文献例)	浅水変形	屈折	回折	反射	碎波モデル	任意水深	流れの影響	不規則性	有限振幅性	計算領域			備考
										広	中	狭	
波向線法(屈折図法) (Keller, 1958)	◎	◎	×			◎	○	○	△	○	○	○	波速に有限振幅性を含める
エネルギー平衡方程式 (Karlssohn, 1969)	◎	◎	▽	△	○	◎	○	◎	×	○	○	○	
ヘルムホルツ方程式 (Gaillard, 1984)	○	○	◎	◎	×	◎	×	○	×			○	領域ごとに一樣水深のみ
高山の方法 (高山, 1981)			◎	◎	×	◎	×	◎	×			○	一樣水深のみ
緩勾配方程式 (Berkhoff, 1972)	◎	◎	◎	◎	○	◎	○	○	△			○	
非定常緩勾配方程式 (渡辺・丸山, 1984)	◎	◎	◎	◎	○	◎	○		×			○	碎波モデル・境界条件処理が容易
数値波動解析法 (伊藤・谷本, 1971)	○	◎	◎	◎		◎			×			○	
非定常緩勾配不規則波動方程式(窪ら, 1991)	◎	◎	◎	◎	○	◎		◎	×			○	
放物型波動方程式 (Radder, 1979)	◎	◎	◎	△	○	◎	○	○	△			○	
非線形長波方程式 (Kellerら, 1960)	◎	◎	◎	◎	○	×		◎	◎			○	鉛直加速度が無視される浅海域に限定される
プシネスク方程式 (Peregrine, 1967)	◎	◎	◎	◎	○	○		◎	◎			○	原方程式は浅海域に限定される
ガラーキン法 (灘岡・中川, 1993ab)	◎	◎	◎	◎		◎		◎	◎			○	
非線形緩勾配波動方程式(磯部, 1994)	◎	◎	◎	◎		◎		◎	◎			○	

◎：基本形で適用可能， ○：応用形で一般的適用可能， △：応用形で部分的適用可能  
 ▽：基本理論では考慮されていないが実用上適用可能， 空白：研究により適用できる可能性あり， ×：適用不可能  
 計算領域＝広：深海から浅海を含む程度， 中：構造物周辺の海域程度， 狭：港内程度。

#### 4. 各方程式の理論的適用範囲

以上の基礎方程式の誘導過程から、各波動方程式の理論的な適用範囲について考察する。表一は全体を統一的にとりまとめたものである。

まず、運動方程式を出発点としてガラーキン法を用いて導かれた、灘岡・中川<sup>3),4)</sup>の非線形・分散性波動方程式は、強非線形・強分散性の波浪解析を行える方程式である。Lagrangianを出発点としてここで導いた非線形緩勾配波動方程式も非線形性、分散性を任意の精度で取り入れることのできる方程式として一般性を有する。

その他の波動方程式については、摂動法における仮定によって整理することもできる。しかし、その仮定が実際にどの値まで有効であるかという点については、別に考察しなければならない。ここでは、上記の誘導過程を振り返りながら、それぞれの波動方程式が結果としてどのような条件で適用可能となるかを考察する。

Berkhoff<sup>1)</sup>による緩勾配方程式は、非線形緩勾配波動方程式に対し、非線形項を無視し、さらに鉛直分布関数を微小振幅理論と同じ双曲線関数の1成分に限ったものである。したがって、有限振幅波の解析に用いることができないし、また、通常の緩勾配方程式(40)では単一の角周波数の規則波にしか用いられない。この点では、

非定常緩勾配方程式も同様である。しかし、波の角周波数を考慮する前の式(37)では、仮定した鉛直分布関数が実際とあまり変わらない範囲で、ある程度の角周波数帯域の不規則波浪解析に用いることができる。緩勾配不規則波動方程式は、角周波数に関する適用範囲をさらに拡張したものであり、より広い角周波数帯域に適用可能である。任意に広い角周波数帯域から成り立つ波浪に対しては、多成分緩勾配方程式(30)および(31)によって、成分の重ね合わせとして解析するのがよい。

放物型波動方程式では、楕円型偏微分方程式から放物型偏微分方程式に近似する際に、局所的な波浪場の仮定をした上で、ある方向の2階微分を無視することになる。したがって、局所的な波浪場の仮定の妥当性によって、適用性が決まる。このことから、多重反射が生じるような複雑な波動場に用いるのは無理と考えられる。しかし、波の進行にともなう一方向的な波浪変形の解析では、成分波の方向角が座標軸に対して大きい場合でも適用可能な方法が提案されていて、これらを利用することにより計算時間が大幅に節約されるという長所を有している。

Helmholtz方程式で表される回折方程式は、一樣水深中の微小振幅規則波の変形解析に限られるが、方程式が簡単のため、グリーン関数を用いた解析法などの非常に便利な数値解法を用いることができる。

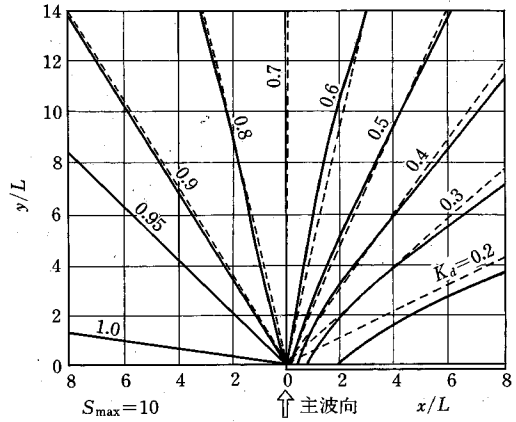
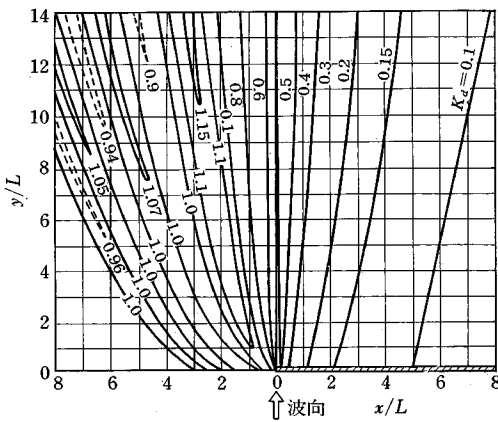


図-2 半無限防波堤に対する規則波および不規則波の回折係数 (左: 規則波, 右: 不規則波)

屈折方程式 (65) は、緩勾配方程式から得られる式 (46) の回折効果を見逃したものであるとみなすことができる。したがって、構造物がある場合のように回折効果が重要な場合には適用できず、水深や流れの勾配が緩やかで、波高分布の曲率が無視できる場合に適用が限られる。それでもなお複雑な海底地形など場合には、局所的に式 (65) が解をもたない、すなわち波向線が交差して波高が無限大となる場合が生じてしまい、回折効果の考慮が必要となる。基本的には規則波の屈折方程式の重ね合わせであるエネルギー平衡方程式では、数値計算をする際に数値分散が生じるため<sup>46)</sup>、見かけ上回折が取り入れられたかのように見えるが、本質的には異なるものであることには注意を要する。

非線形長波方程式では、有限振幅性は厳密に取り入れられているものの、鉛直分布関数を一様と仮定しているために角周波数の違いによる波速の違い、すなわち分散効果が現れない。したがって、水深がごく小さい領域に適用範囲が限られる。また、津波解析で見られるように、水深が小さくても、波の伝播距離が長いために分散効果が蓄積される場合にも適用できない。ただし、数値計算に際しては特性曲線法を利用することにより、精度が高く安定な数値計算を比較的簡単に行うことができる。

Boussinesq 方程式では、鉛直分布関数として 0 次および 2 次関数の 2 成分が用いられている。これは浅海部での鉛直分布関数を表すのにかなり有効であると考えられ、さらに適用水深を拡張するための改良も行われている<sup>57), 58)</sup>。しかし、2 次までのオーダーの項のみを残したために無視された非線形項も多く、非線形性が強い場合の適用は適当でない。

### 5. 数値計算例および考察

#### (1) 波浪の非線形性および分散性の効果

波浪変形の計算を行う際には、簡便性とある程度の適用性から微小振幅の規則波の理論を用いるのが基本であ

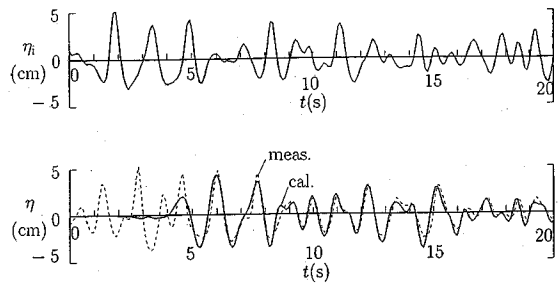


図-3 斜面上での単一方向不規則波の時間波形の計算値と実測値との比較

り、従来から実務でも用いられてきた。しかし、常にこれが妥当であるわけではない。ここでは微小振幅の規則波の理論で無視されている、不規則性と非線形性の影響について、計算例に基づいて考察する。

不規則波の方向分散性の影響を見るため、図-2 に半無限防波堤周辺の回折係数  $K_r$  (入射波高に対する波高比) の分布を示す。いずれも線形理論によるもので、規則波のものは Helmholtz 方程式 (64) の解析解を図示したものであり、不規則波のものは多方向不規則波に対して解の重ね合わせとして計算した結果を示している<sup>44)</sup>。図から明らかなように、両者には有為な差があり、特に規則波を用いて回折効果のみを考えると防波堤背後が過度に静穏であると評価してしまうが、実際には不規則波の方向分散性によって図の左下から入射する成分波の進入により、静穏度はそれほど高くない。ここで注意すべきは、波高が波のエネルギーの平方根に比例することであり、たとえ側方から進入するエネルギーが 1% としても波高では 10% となるというように、回折係数の小さいところでは、小さなエネルギーにも気を配る必要がある。図-2 の点線は、単純に入射波のエネルギーを  $0^\circ$  から積算し、その平方根をとって波高に換算したものであり、回折係数の値を波の直接進入域で 1、遮蔽域で 0 としたことに相当するが、それだけです

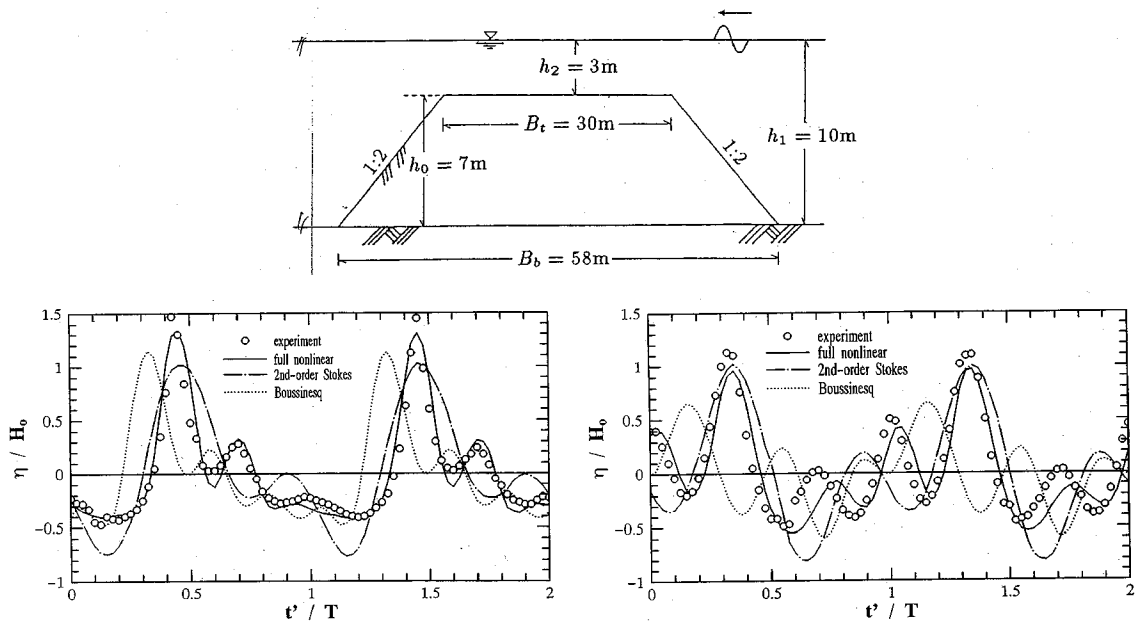


図-4 種々の波動理論を用いた台形潜堤による波浪変形の計算結果と実測結果との比較 (土木学会<sup>8)</sup>より作成)

に厳密な回折計算の結果とほぼ一致している。このことから、回折に対しては特に波浪の方向分散性を考慮することが重要であることがわかる。

図-3は周波数分散性の効果を調べるため、一方向不規則波の浅水変形を、線形理論である緩勾配不規則波動方程式によって計算し、実験結果と比較したものである。上段は境界条件とした入射波の水面変動を表し、下段は4m離れた1/30勾配斜面上での水面変動の実測および計算結果を表す。測定地点でも水深が21.7cmあるために非線形性の効果は顕著でなく、線形理論でも良い精度で計算されているのがわかる。

他方、図-4は、種々の波動方程式を用いて計算した台形潜堤による規則波の変形を、1/20モデルでの実測結果と比較したものである<sup>8)</sup>。入射波の条件は、周期9.0s、波高1.0mであり、水平床上では相対水深(水深波長比)が0.122と小さくなく、また潜堤上のアーセル数は88と非線形性が強い。断面2次元の問題であるために、上述の波動方程式では述べなかった手法も含まれているが、非線形性と分散性の重要性を読むことができる。すなわち、Boussinesq方程式のように弱非線形・弱分散性の波動方程式では推定精度が悪く、また、ストークス波的な摂動法の第2次近似解のように弱非線形・強分散性の波動方程式でも計算精度は不十分となる。これに対し、厳密解(ここでは2次元問題のため、境界要素法を用いて計算)では、実測結果を忠実に再現しているといえる。

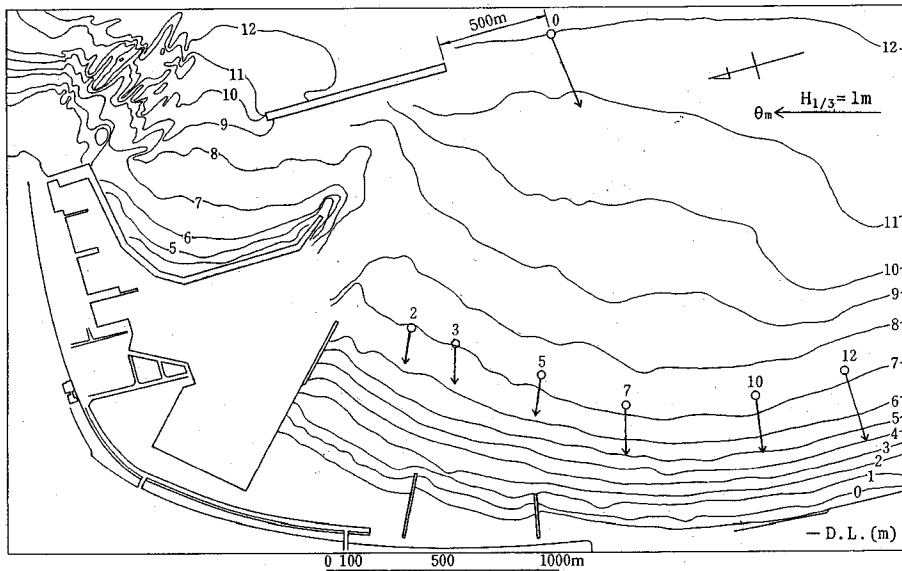
つまり、微小振幅の規則波に基づく波動方程式に対し、不規則波のように周波数分散性や方向分散性が重要とな

る場合や、有限振幅波のように非線形性が重要となる場合に応じて、これらの影響を考慮したより精度の高い波動方程式を使う必要がある。

## (2) 現地への適用例

図-5は、茨城県大洗港周辺において、水面変動および水平2成分流速を観測し、そこから得られる各地点での波高および平均波向を、No.0地点で観測された入射波浪から放物型方程式を用いて不規則波の屈折・回折を計算した結果と比較したものである<sup>59)</sup>。ここでは、沖防波堤による回折と、水深変化にともなう屈折が生じることになり、計算ではこれらの影響を取り入れる必要がある。しかしこの場合には波高が小さいために非線形性は重要でなく、不規則性のみを考慮することによって精度よい波浪場の計算ができるといえる。

他方、図-6は、福島県富岡漁港沖合いの例であり、P0地点で観測された入射波から、放物型方程式とエネルギー平衡方程式を用いて計算した結果が実測結果と比較されている<sup>60)</sup>。有義波高に関しては、両手法ともに実測結果とほぼ一致し、わずかに放物型方程式の方がよく一致している。しかし、方向関数(方向別の波のエネルギー分布)で見ると、放物型方程式では屈折効果のためにP5のような浅海域で集中度が非常に高くなるのに対し、実測ではそうっていない。この点では、エネルギー平衡方程式の方が一致度が高いといえるが、これは本来の方程式の特性によるものではなく、数値分散によるものであると考えられる。このように複雑な地形での極浅海域において、実際の方向集中度があまり高くない現象については、今後さらに物理現象に基づいた説明を



図—5 放物型波動方程式による波高の計算結果と実測結果との比較

与える必要がある。

## 6. 波浪の変形解析の将来展望

波浪解析でもっとも基本となるのは微小振幅の規則波の理論に基づくものである。しかし、回折問題では方向分散性が重要となったり、また海浜流の計算では大小の波の砕波点の違いによってラディエーションストレスの勾配が小さくなるのが結果に大きく影響するので、波の不規則性を取り入れる必要がある。この範囲では、基本的に線形理論に基づいた、重ね合わせの考え方が適用できる。さらに砕波モデルを組み込むことにより、砕波帯のように複雑で非線形性の強い領域において、波形の予測は不可能であっても、平均的なエネルギー分布の予測に用いることは実用上可能である。

しかし、深海部で波形勾配が大きかったり、浅海部でアーセル数が大きかったりすると非線形性の影響が強くなる。このため波形や流速を含めた詳細なシミュレーションが必要な場合には、非線形理論を用いる必要がある。その際、図—4 からわかるように、潜堤上のように非線形性の強い領域が存在すると、潜堤を過ぎて非線形性の弱まったところまで計算精度が悪くなるのは当然である。実用上の問題で非線形性がもっとも重要となるのは、構造物に作用する波力の問題であろう。構造物の設計条件では高波高である場合が多く、その際の構造物周辺の非線形波浪場が波力を決定することになる。また、遡上や越波の問題でも非線形性は無視できない要素である。

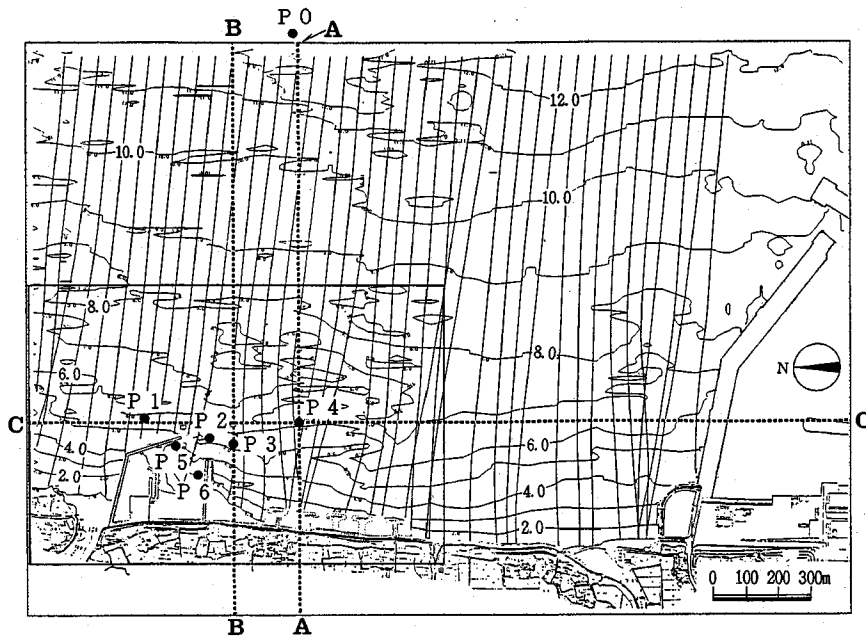
本論文で導いた非線形緩勾配波動方程式 (26) および (29) は、適当な鉛直分布関数を組み合わせることによ

り、理論的には強非線形・強分散性の場合にも十分な精度で波浪解析ができる。今後、灘岡・中川<sup>6)</sup>によるものと同様に、非線形波浪の解析全般においてその適用性を詳細に調べる必要がある。

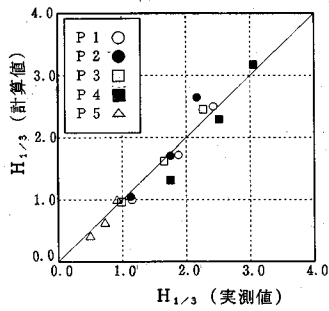
非線形性が重要となる問題の代表例は、砕波帯を含む領域での波形を含めた波浪変形のシミュレーションであり、それを行うためには波形変化まで考慮した砕波モデルの導入が必要となる。また、サーフビートやセイシュなどの長周期波も非線形性が重要となる現象である<sup>6)</sup>。特に、高波浪時には水位上昇や長周期変動によって港内での係留等に不都合を生じることも多く、工学的にも解明すべき課題となっている。また、潜堤のような波浪制御構造物の効果を調べるためには、断面の急変部で生じる減衰定常波を含めた波浪解析が必要となる。さらに、構造物に作用する波力の問題では、設計条件となる有限振幅波による構造物周辺の波浪場を精度よく求めた上で、圧力分布から波力を算定することになる。このように、非線形性が無視できない問題は数々考えられ、それらの解析を精度よく行えるようにすることは今後の課題であり、最近の研究成果によりその見通しがでてきたといえる。

## 7. 結 言

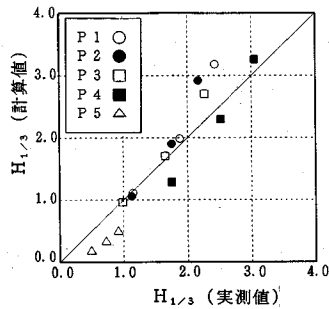
本論文では、一般的に適用可能な非線形緩勾配波動方程式 (26) および (29) を導き、さらに従来導かれている波動方程式をその特殊な場合として導くことにより、それらの理論的位置づけを明らかにした。特に、従来の摂動法としての位置づけとは別の、鉛直分布関数の近似度という側面は、実際の適用範囲を考える上で手



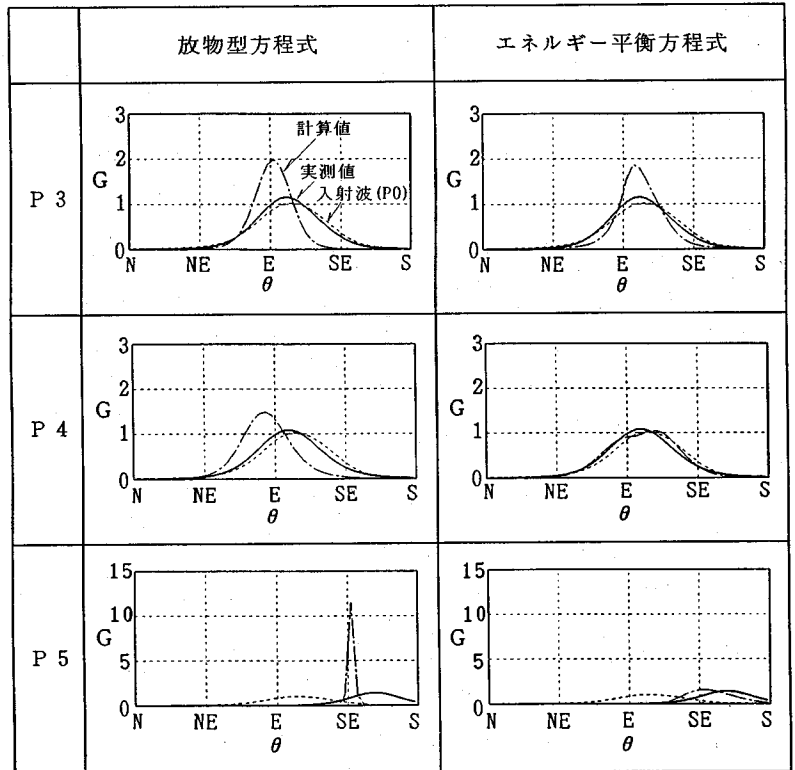
(a) 海底地形と観測点



(b) 波高 (放物型波動方程式)



(c) 波高 (エネルギー平衡方程式)



(d) 方向関数

図-6 エネルギー平衡方程式と放物型波動方程式によって計算される波高および方向関数の実測結果との比較

がかりを与えるものとなろう。本論文の後半では、波動理論による数値計算例を示し、分散性および非線形性が重要となる場合について述べ、さらに現地への適用例も

紹介した。また、特に非線形波浪解析の必要性和将来展望について述べた。波浪は海岸・海洋における基本的な外力であるため、波浪場の予測に関しては古くから多く

の研究がなされてきたが、波浪制御を含む最近の課題から、さらに精度よい解析手法の開発が必要とされており、この面での研究の推進が望まれるところである。

なお、本論文をとりまとめるに際し、横木裕宗東京大学助手に助力を得たことを記し謝意を表する。

### 参考文献

- 1) Berkhoff, J.C.W. : Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13 th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp.471~490, 1972.
- 2) Peregrine, D.H. : Long waves on a beach, J.Fluid Mech., Vol.27, pp.815~827, 1967.
- 3) 灘岡和夫・中川康之：不規則波動シミュレーションのための強分散性波動方程式の導出とその基本的特性の検討，土木学会論文集，No.467/II-23, pp.83~92, 1993.
- 4) 灘岡和夫・中川康之：新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場解析の試み，海岸工学論文集，第40巻，pp.6~10, 1993.
- 5) Luke, J.C. : A variational principle for a fluid with a free surface, J. Fluid Mech., Vol.27, pp.395~397, 1967.
- 6) Liu, P.L.-F : Wave transformation, The Sea, Vol.9, pp.27~63, 1990.
- 7) 磯部雅彦：多方向不規則波の屈折・回折・砕波変形計算モデル，1992年度（第28回）水工学に関する夏期研修会講義集，Bコース，土木学会，pp.B-6-1-B-6-19, 1992.
- 8) 土木学会（編）：海岸波動，一波・構造物・地盤の相互作用の解析法一，土木学会，520 p.，1994.
- 9) Kirby, J.T., C. Lee and C. Rasmussen : Time-dependent solutions of the mild-slope wave equation, Proc 23 rd Int. Conf. on Coastal Eng., pp.391~404.
- 10) Massel, S.R. : Extended refraction-diffraction equation for surface waves, Coastal Eng., Vol.19, pp.97~126, 1993.
- 11) Berkhoff, J.C.W., N. Booy and A.C. Radder : Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, Coastal Eng., Vol.6, pp.255~279, 1982.
- 12) 西村仁嗣・丸山康樹・平口博丸：直接数値積分による波の場の解析，第30回海岸工学講演会論文集，pp.123~127, 1983.
- 13) 渡辺 晃・丸山康樹：屈折・回折・砕波変形を含む波浪場の数値解析法，第31回海岸工学講演会論文集，pp.103~107, 1984.
- 14) Copeland, G.J.M. : A practical alternative to the "mild-slope" wave equation, Coastal Eng., Vol.9, pp.125~149, 1985.
- 15) Madsen, P.A. and J. Larsen : An efficient finite-difference approach to the mild-slope equation, Coastal Eng., Vol.11, pp.329~351.
- 16) 伊藤喜行・谷本勝利：数値波動解析法とその応用—構造物周辺の波一，第18回海岸工学講演会論文集，pp.67~70, 1971.
- 17) 伊藤喜行・谷本勝利：波向線交差域での波の屈折—数値波動解析法への応用（2）一，第19回海岸工学講演会論文集，pp.325~329, 1972.
- 18) 窪 泰浩・小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃：非定常緩勾配不規則波動方程式について，海岸工学論文集，第38巻，pp.46~50, 1991.
- 19) 窪 泰浩・小竹康夫・横木裕宗・磯部雅彦・渡辺 晃：非定常緩勾配不規則波動方程式を用いた波浪場・海浜流場・海浜地形変化の予測モデル，海岸工学論文集，第39巻，pp.201~205, 1992.
- 20) 小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃：非定常緩勾配方程式の高精度化，海岸工学論文集，第39巻，pp.91~95, 1992.
- 21) 磯部雅彦：有理式近似に基づく非定常緩勾配不規則波動方程式，海岸工学論文集，第40巻，pp.26~30, 1993.
- 22) Radder, A.C. : On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol.95, pp.159~176, 1979.
- 23) Tsay, T.-K. and P.L.-F. Liu : Numerical solution of water-wave refraction and diffraction problems in the parabolic approximation, J. Geophys. Res., Vol.87, No.C 10, pp.7932~7940, 1982.
- 24) 磯部雅彦：波向線座標における放物型方程式を用いた屈折・回折の計算法，第32回海岸工学講演会論文集，pp.95~99, 1985.
- 25) Kirby, J.T. : Rational approximations in the parabolic equation method for water waves, Coastal Eng., Vol.10, pp.355~378, 1986.
- 26) Dalrymple, R.A. and J.T. Kirby : Models for very wide-angle water waves and wave diffraction, J.Fluid Mech., Vol.192, pp.33~50, 1988.
- 27) Dalrymple, R.A. and J.T. Kirby : Wave diffraction due to areas of energy dissipation, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, Vol.110, pp.67~79, 1984.
- 28) 磯部雅彦：放物型方程式を用いた不規則波の屈折・回折・砕波変形の計算法，第33回海岸工学講演会論文集，pp.134~138, 1986.
- 29) Yue, D.K.P. and C.C. Mei : Forward diffraction of Stokes' waves by a thin wedge, J. Fluid Mech., Vol.99, pp.33~55, 1980.
- 30) Kirby, J.T. and R.A. Dalrymple : A parabolic equation method for the combined refraction-diffraction of Stokes waves by mildly-varying topography, J. Fluid Mech., Vol.136, pp.453~466.
- 31) Kirby, J.T. and R.A. Dalrymple : Verification of a parabolic equation for propagation of weakly-nonlinear waves, Coastal Eng., Vol.8, pp.219~232, 1984.
- 32) Liu, P.L.-F and T.-K. Tsay : Refraction-diffraction model for weakly non-linear water waves, J. Fluid Mech., Vol.141, pp.265~274, 1984.
- 33) Barailler, L. and P. Gaillard : Evolution récente des modèles mathématiques d'agitation due à la houle : Calcul de la diffraction en profondeur non uniforme, La Houille Blanche, No.8, pp.861~869, 1967.
- 34) Gaillard, P. : Combined refraction-diffraction calculations with directional wave spectra, Proc. 19 th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.1040~1056, 1984.
- 35) Lee, J.J. : Wave induced oscillations in harbours of arbitrary geometry, J. Fluid Mech., Vol.45, pp.375~394, 1971.
- 36) 高山知司：波の回折と港内波高分布に関する研究，港湾

- 技研資料, No. 367, 140 p., 1981.
- 37) 高山知司：港内静穏度の計算法, 1982年度(第18回)水工学に関する夏期研修会講義集, Bコース, pp. B-2-1-B-2-18, 1982.
- 38) 佐藤典之・磯部雅彦・泉宮尊司：任意形状港湾に対する不規則波の港内波高分布計算法の改良, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 257~261, 1988.
- 39) Keller, J.B. : Surface waves on water of non-uniform depth, *J. Fluid Mech.*, Vol.4, pp.607~614, 1958.
- 40) Munk W.H. and R.S. Arthur : Wave intensity along a refracted ray, National Bureau of Standard, Circ. 521, U.S. Government Printing Office, Washington D.C., pp.95~109, 1952.
- 41) 磯部雅彦：屈折・回折に関する既往の研究, 土木学会, 海岸工学委員会, 研究現況レビュー小委員会資料, 41 p.
- 42) Bouws, E. and J.A. Battjes : A monte carlo approach to the computation of refraction of water waves, *J. Geophys. Res.*, Vol.87, pp.5718~5772, 1982.
- 43) Karlsson, T. : Refraction of continuous ocean wave spectra, *J. Waterways and Harbors Division, Proc. ASCE*, Vol.95, pp.437~448, 1969.
- 44) 合田良美・鈴木康正：光易型方向スペクトルを用いた不規則波の回折・屈折計算, 港湾技研資料, No. 230, 45 p., 1975.
- 45) 丸山康樹・平口博丸・鹿島遠一：不規則波に対する屈折計算法の適用性, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 148~152, 1984.
- 46) 西村仁嗣：エネルギー平衡方程式の積分に伴う数値分散について, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 11~15, 1987.
- 47) 高山知司・池田直太・平石哲也：砕波および反射を考慮した波浪変形計算, 港湾技術研究所報告, Vol. 30, No. 1, pp. 21~67, 1991.
- 48) Carrier, G.F. and H.P. Greenspan : Water waves of finite amplitude on a sloping beach, *J. Fluid Mech.*, Vol. 4, pp. 97~109, 1958.
- 49) Keller, H.B., D.A. Levine and G.B. Witham : Motion of a bore over a sloping beach, *J. Fluid Mech.*, Vol. 7, pp. 302~316, 1960.
- 50) Freeman, J.C. and B.M. Le Méhauté : Wave breakers on a beach and surges on a dry bed, *Proc. ASCE*, Vol. 90, No. HY 2, pp. 187~216, 1964.
- 51) 余 錫平・磯部雅彦・渡辺 晃：演算子分離法と有限特性曲線法を用いた平面波浪場の非線形数値計算モデル, 海岸工学論文集, 第39巻, pp. 31~35, 1992.
- 52) Abbott, M.B., H.M. Petersen and O. Skovgaard : On the numerical modelling of short waves in shallow water, *J. Hydraul. Res.*, Vol. 16, No. 3, pp. 173~203, 1978.
- 53) 佐藤慎司・M. Kabiling : Boussinesq 方程式を用いた波浪・海浜流・海浜変形の数値計算, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 386~390, 1993.
- 54) Freilich, M.H., R.T. Guza and S.L. Elgar : Observations of nonlinear effects in directional spectra of shoaling gravity waves, *J. Geophys. Res.*, Vol. 95, No. C 6, pp. 9645~9656, 1990.
- 55) Kirby, J.T. : Modelling shoaling directional wave spectra in shallow water, *Proc. 22nd Int. Conf. on Coastal Eng.*, pp. 109~121.
- 56) 後藤智明：アーセル数が大きい場合の非線形分散波の方程式, 土木学会論文集, 第351号/II-2, pp. 193~201, 1984.
- 57) Madsen, P.A., R. Murray and O.R. Sørensen : A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Eng.*, Vol. 15, pp. 371~388, 1991.
- 58) Madsen, P.A. and O.R. Sørensen : A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2 : A slowly varying bathymetry, *Coastal Eng.*, Vol. 17, 1993.
- 59) 磯部雅彦・泉宮尊司・堀川清司・清水琢三・大下哲則・関本恒治：屈折・回折領域における波浪場の現地観測, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 108~112, 1988.
- 60) 清水琢三・鶴飼亮行・原 基久・磯部雅彦：多方向不規則波の屈折・回折・砕波変形計算法の現地適用性, 海岸工学論文集, 第39巻, pp. 181~185, 1992.
- 61) 喜岡 渉・石原健司：波群の屈折に伴う2次長周期波の伝播変形解析, 土木学会論文集, No. 467/II-23, pp. 75~82, 1993.

(1994. 3. 15 受付)

Theories for linear and regular waves are usually employed to analyze the wave transformation in the coastal zone, but irregularity and/or nonlinearity cannot be neglected in many situations. In the present paper, a new and general set of wave equations which is named nonlinear mild-slope wave equation is derived to take into account the dispersion and nonlinearity within an arbitrary accuracy. Then, the theoretical characteristics of the wave equations proposed so far are discussed by showing that they can be derived as special cases of the present equations. Sample results of numerical calculations of the various wave equations are given to show the effect of irregularity and nonlinearity, and comparisons of the numerical results with field data are also given. Finally, a future scope in the analysis of wave transformations is presented.