

鉄筋コンクリートはりのポストピーク挙動に関する 解析的研究

中村 光*・田辺忠顕**

コンクリート構造物が不安定になる領域に対する理論的検討を行うとともに、有限要素解析により RC はりのポストピーク挙動に対する解析的検討を行った。その結果、構造物の不安定を定義する構造特異点のうち特に、bifurcation point が RC はりの破壊に密接な関係があり、bifurcation point 後の bifurcation path を選択することで構造物が破壊に至る可能性を解析的に示した。本手法により、RC はりのポストピーク挙動あるいは破壊時の挙動を一貫した数値理論で再現することを可能にした。

Key Words : post-peak, instability, limit point, bifurcation point

1. 序

コンクリート構造の理論的背景が不十分であったことに対する反省が、現在の FEM をはじめとする非線形理論の構築を精力的に押し進めるきっかけとなり、それらの成果により原子力構造など、幾多の重要構造施設へのコンクリート構造の採用となってきた。今後さらに、コンクリート構造の特性を生かしてより適切な応用を図っていく場合の大きな課題は、最大荷重時およびその点以降のポストピーク挙動の理論的解明にあると考えられる。

コンクリート構造のポストピーク挙動に関しては、従来は主に実験的に研究対象とされてきた。しかしながら、その挙動は複雑であり、多様な影響要因を含んでいるため、現在まで系統的な研究は行われていないのが現状である。これに対して、もしポストピーク挙動を精度よく評価し得る解析理論が構築されれば、広範囲にわたる解析実験を実施することができ、現象を理解するための多くの情報を得ることが可能になると考えられる。これらの理由から、コンクリート構造のポストピーク挙動に対する理論的解明および解析手法の開発が、最も緊急な課題の一つとして挙げられるようになった。

ポストピーク挙動を解析理論を用いて再現する場合、構造物の破壊点を明確に表現する必要が生じる。しかしながら、コンクリート構造は、その力学的挙動に及ぼす影響要因が複雑多岐にわたるため、破壊点や破壊挙動の解析的研究は殆どなされていないのが現状である。もし解析的に破壊点を定義するなら、破壊点は数学的・力学的な限界点でかつ、限界点以降の構造物の挙動も明確に表現し得るという要件を満たす必要があると考えられ

る。この要件を満たす点としては、bifurcation point が挙げられる¹⁾。bifurcation point は数学的には構造物の接線剛性マトリクスの固有値が零となる特異点を形成し、力学的には構造物の挙動が急激に変わる状態に対応するものである。bifurcation 問題に関する研究は、Borst²⁾、Ortiz³⁾ 等によりなされているが、いずれもコンクリートのみを対象としており、鉄筋コンクリート構造に対する適用はなされていない。

本研究では以上のような観点から、RC はりのポストピーク挙動を解明することを目的として、ポストピーク領域で生じる不安定な挙動に対する理論的・解析的検討を行った。すなわち、構造物の不安定性を定義する構造特異点に対する考察を行うとともに、不安定な構造物の挙動を解析する手法の提示を行った。そして、有限要素法によりモデル化した RC はりの終局挙動を不安定性の概念を用いて詳細に考察し、bifurcation point で破壊を定義することでプレピーク・ポストピーク・破壊へと至る RC はりの挙動を一貫した数値理論で評価した。ただし、本論文で用いたはずみはローカルはずみであるため、解析結果は要素寸法に依存した解であると考えられることを付記しておく。

2. 不安定を定義する構造特異点の考察

構造物の安定性の条件は、「平衡の位置からの有限の近傍内にある任意の変位に対して、内部に蓄えられるかあるいは散逸するエネルギーは、外荷重が物体になす仕事よりも大きくなければならない⁴⁾」と述べることができる。すなわち、ある保存力のもとに静的に平衡状態にある物体を考えれば、微小時間における小さな付加変形の過程 u を仮想し、

$$\Delta\pi = (u \text{ による内力仕事}) - (u \text{ による外力の仕事}) \dots\dots\dots (1)$$

が可能な全ての u に対して正であれば、この平衡状態

* 正会員 工博 山梨大学講師 工学部土木環境工学科 (〒400 甲府市武田 4-3-11)

** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

は安定と定義される。静的に平衡している状態に関して座標系を定義すれば、ひずみと変位は定義した座標系に関して零となる。また、外力は大きさ・方向を変えないと仮定すれば、微小時間に対し式(1)は次式のように書ける。

$$\Delta\pi = \int_V \left(\sigma_{ij}^{(0)} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \right) e_{ij} dV - \int_S f_i^{(0)} u_i dS > 0 \dots\dots (2)$$

ここで、 $\sigma_{ij}^{(0)}$ 、 $f_i^{(0)}$ は平衡している状態に関する応力、表面力を表し、 σ_{ij} 、 e_{ij} 、 u_i は変形前の座標形に関して定義される応力増分、ひずみ増分、変位増分である。

任意時間における座標系での釣合式を考慮し、有限要素法の一般的手法に従えば、離散化された系に対する安定条件は構造物の接線剛性マトリクス $[K_{eff}]$ を用いて、

$$\{u\}^T [K_{eff}] \{u\} > 0 \dots\dots (3)$$

で表される。

一方、臨界点の条件としては、

$$\{u\}^T [K_{eff}] \{u\} = 0 \dots\dots (4)$$

を満足することであり、 $[K_{eff}]$ が対称マトリクスならば式(4)が成立するための必要十分条件は、

$$\det(K_{eff}) = 0 \dots\dots (5)$$

あるいは、接線有効剛性マトリクスの固有値 (λ_i) を用いて、

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = 0 \dots\dots (6)$$

と定義される。すなわち、少なくとも一つの固有値が零であることが、臨界点の条件となる。

臨界点は、limit point と bifurcation point の二つに分類することができるので、固有値・固有ベクトルを用いて表記した増分形の剛性方程式式(7)を利用して臨界点の分類を行う。

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v_1\}^T \{d\} \\ \{v_2\}^T \{d\} \\ \vdots \\ \{v_n\}^T \{d\} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \{v_1\}^T \{f\} \\ \{v_2\}^T \{f\} \\ \vdots \\ \{v_n\}^T \{f\} \end{bmatrix} \dots\dots (7)$$

ここに、 $\{f\}$ は荷重ベクトル、 $\{d\}$ は変位増分、 μ は荷重パラメーターの増分、 $\{v_i\}$ は i 次の固有ベクトルである。

今、 λ_i は $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ が成り立つと仮定する。臨界点において少なくとも一つの固有値が零であるので、問題を簡単にするため λ_1 だけが零の場合を仮定する。この時、式(7)の釣合は

$$\mu = 0 \dots\dots (8)$$

$$\{v_1\}^T \{f\} = 0 \dots\dots (9)$$

式(8)、(9)のどちらかが成立するとき、あるいは両者が成立するときに初めて満足される。式(8)で定義される時点が limit point である。その典型的な例としては、構造物に荷重を作用させた場合の荷重変位曲線で

荷重降下を生じる場合の最大荷重点である(図-1)。

式(9)で定義される時点が、bifurcation point である。式(9)より、bifurcation point では、零の固有値に対応する固有ベクトルが荷重ベクトルと直交することが分かる。また bifurcation point は、複数の平衡状態に移行するための分岐点という意味を持ちこの点以降構造物は全く異なる変形状態に移行する可能性が生じる。

式(9)のみが成立する時点は非対称分岐、式(8)と式(9)が同時に成立する時点は対称分岐と呼ばれる。理論的に bifurcation point の発生は式(9)で判定することができる。ただし、数値解析上零の固有値を厳密に算定することは不可能と考えられるため、定量的な計算機による limit point と bifurcation point の分類は一般的には困難である。

臨界点は数学上の特異点であるため、構造物の接線剛性マトリクスは特異となり、剛性方程式を直接解くことはできない。そのため、臨界点での変形モードを知る必要が生じる。limit point に対する $\lambda_1 = 0$ および $\mu = 0$ の条件を式(7)に代入し、固有ベクトルの直交性を考えれば、limit point 上の変位増分は零の固有値に対応する固有ベクトルを用いて次式で表される。

$$\{d\} = \alpha \{v_1\} \dots\dots (10)$$

ここで、 α は任意の値を持つスカラーである。

一方、bifurcation point における変形モードは、式(9)を式(7)に代入し、固有ベクトルの直交性を考慮することで、

$$\{d\} = \beta \{v_1\} + \{d^*\} \dots\dots (11)$$

で表される。ここで $\{d^*\}$ は、基本パス上の変位ベクトルである。すなわち、bifurcation point で定義される変形モードは、零の固有値に対応する固有モードと基本パス上の変位ベクトルの線形結合により表されることが分かる。対称分岐点の場合、式(8)の条件が付加されるため式(11)は

$$\{d\} = \beta \{v_1\} \dots\dots (12)$$

と書き直され、limit point の場合と同様な変形モードを持つ。式(10)、(11)、(12)の変形モードは、各臨界点における臨界点後の釣合経路への接線の方向を示しているものであり、この変形モードを使い臨界点後の構造物の挙動を調べることができる。

問題を簡単にするため、 $\lambda_1 = 0$ の場合のみを考えてきたが、コンクリートのようなひずみ軟化材料を考える場合、構造物を離散系に置き直すと、その材料特性から複数の固有値が同時に零になる場合が存在する。そこで、2つの固有値が同時に零となり、残りの固有値は正の場合を仮定すれば、

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \dots\dots (13)$$

limit point での変形モードは

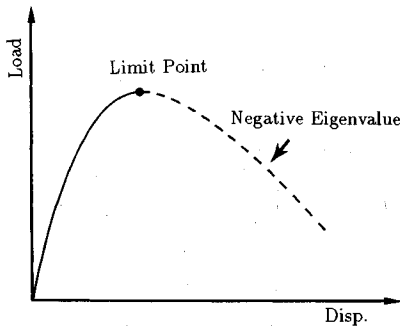


図-1 Limit Point と Limit Point 後の挙動

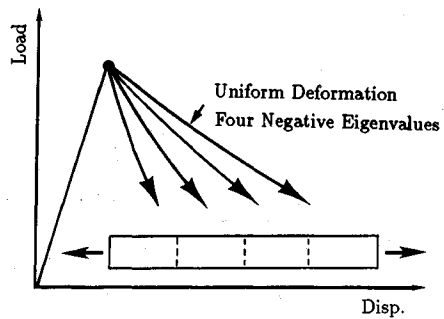


図-2 ひずみ軟化材料の荷重-変位関係

$$\{d\} = \alpha \{v_1\} \dots \dots \dots (14)$$

$$\{d\} = \beta \{v_2\} \dots \dots \dots (15)$$

$$\{d\} = \gamma \{v_1\} + \eta \{v_2\} \dots \dots \dots (16)$$

式 (14), (15), (16) のいずれかで表される。この事実
は、複数個の零の固有値が同時に生じた場合、limit
point において、複数の平衡状態に移行する可能性があ
ることを示している。つまり、コンクリートのようなひ
ずみ軟化材料では、limit point が物理的に (必ずしも
式 (9) を満たさないという意味において) bifurcation
point と同義 (複数の平衡状態が生じるという意味にお
いて) になる可能性があることを示している。

臨界点では、構造物の接線剛性マトリクスは特異であ
り少なくとも一つの零の固有値を持つ。また、構造物が
安定な状態であれば、接線剛性マトリクスは正定値であ
り全ての固有値が正であることは既に述べた。一方、構
造物が不安定である条件は少なくとも一つの運動学的に
可容な場 $\{u\}$ において

$$\{u\}^T [K_{eff}] \{u\} < 0 \dots \dots \dots (17)$$

である。式 (17) を固有値・固有ベクトルを用いて書き
直せば次式で表される。

$$\lambda_i (\{u\}^T \{v_i\}) (\{v_i\}^T \{u\}) < 0 \dots \dots \dots (18)$$

式 (18) は、少なくとも一つの負の固有値に対して成
立するので、不安定な状態は構造物の負の固有値が存在
することで判定できることになる。

今、2つの負の固有値 λ_1, λ_2 と対応する固有ベクトル
 $\{v_1\}, \{v_2\}$ が存在すると仮定する。 $\{u\} = \alpha \{v_1\}$ である
運動学的に可容な場を選べば、式 (18) は

$$\alpha^2 \lambda_1 \{v_1\}^T \{v_1\} < 0 \dots \dots \dots (19)$$

となり、負の固有値 λ_1 に対し、構造物は確かに不安定
な状態にある。同様に、 $\{u\} = \beta \{v_2\}$ を仮定すれば、

$$\beta^2 \lambda_2 \{v_2\}^T \{v_2\} < 0 \dots \dots \dots (20)$$

となる。したがって、2つの負の固有値に対し、2つの
異なる不安定状態が定義され、任意の釣合経路が負の固
有値に関連して存在することが分かる。構造解析を行う
際には、負の固有値の存在の有無によって安定・不安定

の判別を行うことができ、負の固有値の数の変化を調べ
ることによって、特異点の存在を知ることができる。

特異点と同様に、負の固有値に対しても2つの状態が
存在する。一つは limit point 後の釣合経路であり、も
う一つは bifurcation point 後の釣合経路である。limit
point を越えると構造物の荷重は図-1 に示すように
徐々に低下する。この時、荷重低下している釣合曲線
上で構造物には一つの負の固有値が存在している。
bifurcation point を越えると複数の釣合曲線が存在し得
るが、新たに生じた平衡状態に対応し複数の負の固有値
が生じる。例えば、図-2 に示すような4要素に離散化
されたひずみ軟化材料に軸引張荷重が作用する場合、最
大荷重点を越えると構造物には4つの経路を任意に取り
得る可能性が生じる。図-2 の一番緩やかな曲線は、構
造物が一様に変形する挙動に対応し、最大荷重点後構造
物には4つの負の固有値が存在している。そのうち一つ
は、荷重低下を生じる不安定な挙動を示す自分自身の経
路に対応するものであり、残りの3つが、その他の釣合
経路 (各要素にひずみの局所化が生じる) の存在を示す
ものである。

以上のように、bifurcation point で構造物には今まで
と全く異なる変形状態に移行する可能性が生じる。もし
実際の構造物において、破壊時に変形挙動が急変すると
仮定すれば、bifurcation point は破壊を数学的に定義し
得る有効な限界点であると推論される。

3. コンクリート構造における BIFURCATION POINT

図-3 に示す弾性軟化の応力-ひずみ関係で表される
コンクリートの一軸部材に、引張力が作用する場合を考
える。この一軸部材を4要素に分割し有限要素解析を行
えば、図-4 の (1) の実線で表される荷重変位関係が
得られる。この時、部材は全ての荷重段階において一様
な変形をし、最大荷重点を越え荷重低下領域に入ると、
構造物には4つの負の固有値が発生する。この最大荷重
点は、弾性安定の分類に従えば、limit point であるが、

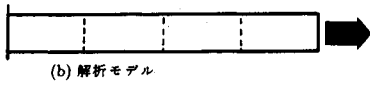
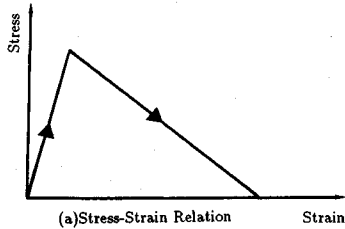


図-3 弾性軟化性状を示す一軸コンクリート部材

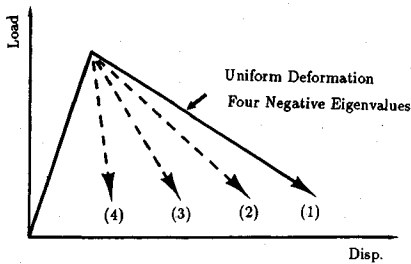


図-4 Post Bifurcation 挙動

コンクリートのようなひずみ軟化材料では、この最大荷重点後一様な変形以外の挙動を示す複数の平衡状態が存在するという意味において bifurcation point と定義される。

複数の負の固有値の発生により、それぞれの固有値と関連する複数の平衡状態が同時に発生する。4つの負の固有値のうち一つは、図-4の(1)の実線の荷重低下する不安定な釣合曲線上に構造物が存在していることを示すもので、残りの3つの負の固有値が、異なる3つの bifurcation path の存在を示している。

bifurcation point から発生する新たな釣合経路は、今回示した例に対しては、式(14)から式(16)に示すように零の固有値に対応する固有モードを使って求めることができる。今、一番小さな固有値に対応する固有ベクトルを bifurcation point からの変位増分として部材に与え、次章で示す分岐解析を行えば、図-4の(3)の点線で示される釣合経路を得ることができる。この時一軸部材は、4要素のうち2要素にひずみが局所化するモードへ構造物が移行し、構造物には2つの負の固有値が存在する。一つの負の固有値は、構造物が荷重低下を示す直線(3)上の不安定な釣合状態にあることを示し、残りの一つの負の固有値が(4)の点線で示される bifurcation path の存在を示すものである。図-4の(2)、(4)の釣合状態も任意の固有モードを組み合わせることで、同様を得ることができる。

実際のコンクリート構造はコンクリート内部の初期欠

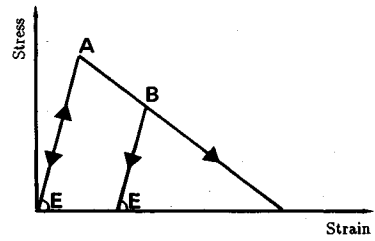


図-5 弾塑性軟化の応力-ひずみ関係

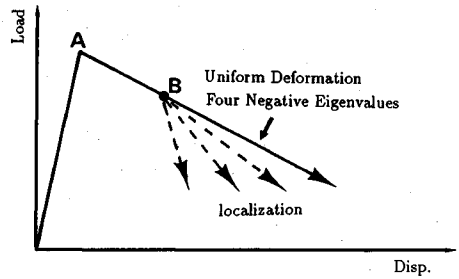


図-6 Post Bifurcation 挙動

陥により、構造内部で一様な応力-ひずみ関係を持たない。初期欠陥を導入すれば、上記の bifurcation 問題は limit point の問題へと代わり、一要素だけのひずみが局所化する性状を見ることが出来る。ただし、初期欠陥を導入した時の limit point 後の挙動は、bifurcation point から一要素だけが局所化する bifurcation path を選択した結果と同じであり、最大荷重点は純粋な limit point ではなく、bifurcation point が変化した見かけ上の limit point と考えられる。この見かけ上の limit point が生じた場合には、分岐解析を含まない一般的な解析により得られたポストピーク挙動が、自動的に一様な変形挙動を示し、bifurcation point 後の bifurcation path の一つを選択したことと同義になる。ここで、ひずみ軟化材料の分岐後の挙動は、要素寸法に依存すると考えられるが、本論ではこの点に関する考察は行っていない。

今までは、弾性-軟化挙動を示す応力-ひずみ関係に対し考察を行ったが、次に図-5に示すように、最大荷重点後の荷重低下域において、応力が弾性剛性と等しい傾きで低下する繰り返し履歴を持つ応力-ひずみ関係を仮定する。要素内のひずみがB点まで進んだときに負の固有値に対応する固有モードを変位増分とする分岐解析を行えば、図-6の点線で示す3本の bifurcation path を解析上得ることができる。これは、ひずみ軟化域においては、繰り返し履歴経路のために、構造物が常に負の剛性を持つ経路と正の剛性を持つ経路を任意に選択し得る可能性を持っているためである。したがって、コンクリートのようなひずみ軟化材料では、複数の負の固有値の存在が、常に不安定な平衡状態から bifurcation path へ移

行する可能性を示す。

4. ポストピーク挙動の解析方法

(1) 変位増分法

鉄筋コンクリート構造物は強い非線形性を示すため、解析を行うにあたり常に繰り返し計算が必要となる。また、鉄筋コンクリート構造のポストピーク挙動を解析的に再現する場合、荷重降下領域を追跡する必要が生じる。そこで本解析では、Newton-Raphson 法に基づく変位増分法を用いてポストピーク挙動の追跡を行うこととする。ここで、収束の判定としては、全外力 $\{P_i\}$ の 2 乗和の平方根に対して不平衡力 $\{R_i\}$ の 2 乗和の平方根が 10^{-3} 以下になるとした。

$$\sqrt{\{R_i\}^T \{R_i\}} \leq 10^{-3} \sqrt{\{P_i\}^T \{P_i\}} \dots\dots\dots (21)$$

(2) Post Bifurcation 挙動の解析

変位増分法を用いれば、limit point を越えることは可能になり、最大荷重点後の挙動を求めることができる。一方、もし bifurcation point が生じた場合、多くの場合構造物は基本パスを追跡してしまい、bifurcation point 後に生じる新たな bifurcation path を直接的に得ることはできない。したがって、bifurcation path を得るためには、基本パス上の分岐点からいかにして分岐パスへ移らせるかが問題となる。bifurcation path を得る方法は、

- (1) 固有値問題を解く⁵⁾
- (2) 増分の 2 次項以上の高次項を計算する⁶⁾
- (3) 初期不整モードを正しく推定する⁷⁾

上記 (1) から (3) のいずれかの手法もしくはそれらを組み合わせて行うことになる。ここで (2) の方法に関しては、bifurcation point における解を増分の高次項展開を含んだ形で表現する摂動的な方法を解析手順に組み入れなければならないため、有限要素解析の一計算過程として計算する場合は実用的でない。また (3) の方法は、コンクリートのように幾何学的にだけでなく材料的側面より bifurcation point が生じる場合には利用することは困難である。そこで本研究では、(1) の方法を用い、固有値問題を解いて得られる bifurcation point での固有ベクトルから推定した変形モードより、bifurcation path を得ることを試みる。固有値問題を解く方法は、任意の釣合状態に対する bifurcation path 方向を逐次表現できるので、コンクリートのような材料非線形問題を取り扱うときは最も有効と考えられる(経路依存型の構成則を用いた場合も同様に取り扱える)。

bifurcation point から生じる bifurcation path 方向のベクトルは、既に述べたように零の固有値に対応する固有モード $\{V\}$ と基本パス上の変位ベクトル $\{\delta^*\}$ の線形結合により表すことができる。したがって、

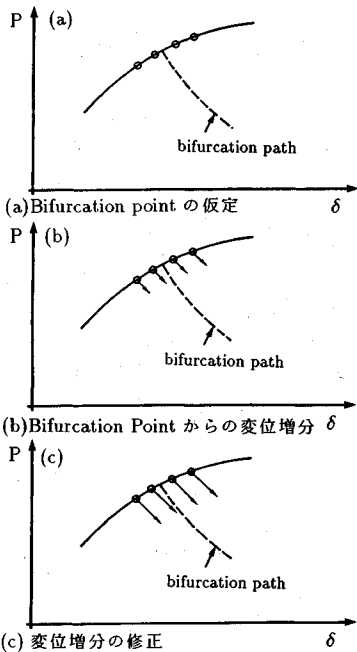


図-7 Bifurcation Path の計算方法

bifurcation path 方向への初期増分変位量は、

$$\{\Delta d\} = \alpha \{\delta^*\} + \beta \{V\} \dots\dots\dots (22)$$

で与えられる。ここで α, β はスカラーである。これらのスカラーの大きさは、増分の 2 次項を考えれば決定することができるが、本論文では細野⁸⁾と同様に、 α と β の値を推定し試行錯誤的に bifurcation path を求めていく解析手法を開発した。以下にその手順を示す。

(1) bifurcation point での零の固有値に対応する固有ベクトルを計算する。しかしながら、零の固有値を解析上捜すことは非常に困難である。そこで解析上は、ある程度零に近い負の固有値が生じた時点を見かけ上の bifurcation point と考え、その時の固有ベクトルを計算する。

(2) bifurcation point からの増分変位を、零の固有値に対応する固有ベクトルで表す。

$$\{\Delta d\} = \alpha \{V\} \dots\dots\dots (23)$$

非対称分岐の場合、この仮定は正しくないが、本方法は試行錯誤的であるため最終的な結果にこの仮定が及ぼす影響はそれほど大きくないと考えられる。

(3) bifurcation point 前後で、解析上の分岐点を数個仮定する(図-7(a))。これは (1), (2) の仮定で、増分変位ベクトルの方向が、bifurcation path の方向と必ずしも一致しないことなどの誤差を見かけ上の分岐点を動かすことにより考慮するものである。

(4) 任意の α を与え、Newton-Raphson 法に基づく変位増分法により収束計算を各分岐点より行う。この時の増分変位は、各点とも等しいものである(図-7(b))。

収束に成功しなければ、 α の値を変え上記の手順を繰り返す(図-7(c))。ただし、 α の値が小さければ構造物は基本パスに収束する可能性が高く、大きければ解は発散する可能性が高くなる。

基本的に式(22)は分岐後の釣合経路の接線方向変位であるので、この変位は分岐後の釣合式を満たさず収束計算が必要となる。したがって、求めようとする分岐方向に近づき得るという大勢を把握できれば十分である。つまり、起こり得る可能性は分岐するか基本パスへ戻るかのどちらかである。それゆえ、たとえ精度が粗くても、一度分岐させることに成功すれば、以後Newton-Raphson法を用いて、初期推定値の精度の悪さを訂正し、正しい分岐パスを捉えることは十分可能であると考えられる。

5. 鉄筋コンクリートはりの不安定な挙動

(1) 解析方法

本論文で用いた解析方法は、2次元4辺形要素に対する有限要素解析である。前述したように、解析は変位増分法により行い、各変位段階において生じる不平衡力に対する収束計算は、Newton-Raphson法を用いている。また各釣合段階では、構造物の接線剛性マトリクスの固有値・固有ベクトルの値を求め、構造物の安定・不安定の判定を行っている。本解析では、材料の特性も各変位段階における接線剛性を用いているため、固有値・固有ベクトルは、各釣合状態での構造物固有の特性を表すものと考えられる。

a) コンクリートの構成式

クラックの発生していないコンクリートは直交異方性材料であると仮定し、Darwinら⁹⁾が提案した、増分形の構成関係式を用いる。

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1+E_2-2\nu\sqrt{E_1E_2}}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

ここで、添字1, 2は異方性の主軸を表し、 $d\sigma_1, d\sigma_2, d\tau_{12}$ は応力増分、 $d\epsilon_1, d\epsilon_2, d\gamma_{12}$ はひずみ増分、 E_1, E_2 は接線剛性、 ν は等価ポアソン比を表す。式(24)の増分形の構成関係式の中の接線剛性の決定は、載荷経路に沿って求めたひずみ量(等価一軸ひずみ)を用いて行っている。

クラックが生じたコンクリート要素に対しては、コンクリートの異方性の主軸の一つはひび割れ方向に一致し、その応力-ひずみ関係は、ひび割れ方向にのみ依存すると仮定する。

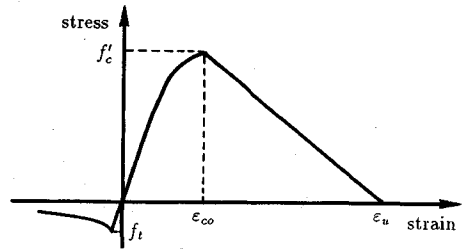


図-8 コンクリートの応力-ひずみ関係

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_n \\ d\sigma_t \\ d\tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_t & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_n \\ d\epsilon_t \\ d\gamma \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ここで E_n はひび割れ直角方向のコンクリートの引張剛性、 E_t はひび割れ方向のコンクリートの圧縮剛性、 G はひび割れたコンクリートのせん断剛性であり本解析では山田・青柳のモデル¹⁰⁾を用いる。

解析に用いた等価一軸応力-ひずみ関係は図-8に示すように、圧縮領域にあっては、ひずみが ϵ_{co} (圧縮強度時 f'_c のひずみ)までは2次曲線で応力は上昇し、それ以降 ϵ_u まで直線的に応力が減少するモデルである。応力降下曲線の勾配はスターラップ量および、コンクリートの圧縮強度によって影響され、その影響の程度はKent and Parkモデル¹¹⁾により定式化した。また、圧縮強度 f'_c は、Collinsら¹²⁾が提案している引張ひずみに従い低減する式を用いて、2軸応力場の圧縮強度を変化させている。

引張領域にあっては、応力は最大引張応力(f_t)までは傾き $E_{co}(2f'_c/\epsilon_{co})$ で増加し、最大引張応力を越えるとそれ以降、引張応力が徐々に低減すると仮定した。最大引張応力以降の引張軟化挙動としては、出雲ら¹³⁾が提案した式により表すこととした。

b) 鉄筋

2軸応力場における鉄筋の増分関係式は、

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x E_{sx} & 0 & 0 \\ 0 & p_y E_{sy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

とする。ここで、 E_{sx}, E_{sy} は x, y 方向の鉄筋のヤング係数、 p_x, p_y は x, y 方向の鉄筋比である。軸方向鉄筋のように集中的に配筋されている場合、鉄筋比は鉄筋が配置されている要素に対して与える。またスターラップのように分散して配置されている場合は、腹鉄筋比として平均的に取り扱う。鉄筋の応力-ひずみ関係は、完全弾塑性体としてモデル化する。

(2) 既往の実験と本解析値との比較

解析に用いた供試体は、代表的に池田らが行った実験¹⁴⁾のものとした。供試体の形状および配筋は図-9に示す。供試体は $a/d=1.3$ の比較的短いディーブビーム

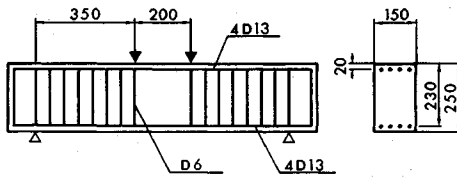


図-9 解析モデル (unit: mm)

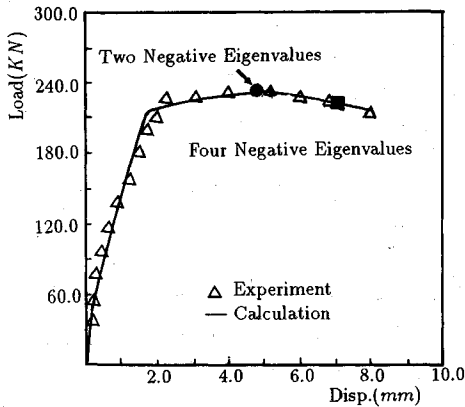


図-10 荷重-変位関係

状のほりである。ここで、 a はせん断支間、 d は断面有効高さである。実験は対称2点集中荷重による単調載荷で行われたものである。一方、解析は実験の荷重作用点の変位を等しく制御することにより行った。解析条件としては、実験結果を参考にして、コンクリートは圧縮強度 26.4 MPa、引張強度 2.69 MPa とし、鉄筋は降伏強度 354 MPa、初期剛性 1.99×10^5 MPa とした。

供試体の支間中央における荷重-変位曲線に関する、実験値と解析値の比較を図-10 に示す。図中、実線が解析結果を示し、△印が実験値を表している。解析結果は、最大荷重後のポストピーク領域に至るまで実験値を非常に精度よく再現しており、本解析値の妥当性が理解される。

(3) ポストピーク領域での不安定な鉄筋コンクリートはりの挙動

解析を実行する際に、図-10 中に示す●印を越えたところで2つの負の固有値が発生し、その後■印までは構造物は2つの負の固有値を持ち続け、■印を越えたところで4つの負の固有値が発生した。負の固有値の発生により構造物は不安定な釣合状態にあり、また負の固有値の存在は、limit point あるいは bifurcation point の存在を教える。

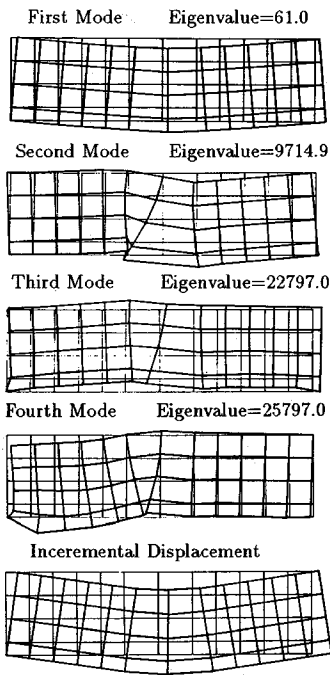
図-11 に●印直前での4次までの固有値・固有モードと変形増分を、図-12 に●印直後での4次までの固有値・固有モードと変形増分を、図-13 に■印直後での4次までの固有値・固有モードと変形増分を示す。ここで各々の固有モード図は、正規化した固有ベクトルを

等しくスケール倍したものである。また図-11 から図-13 に示した固有モードは、各々の領域に対しては、ほぼ同一のモード形状を示すものである。

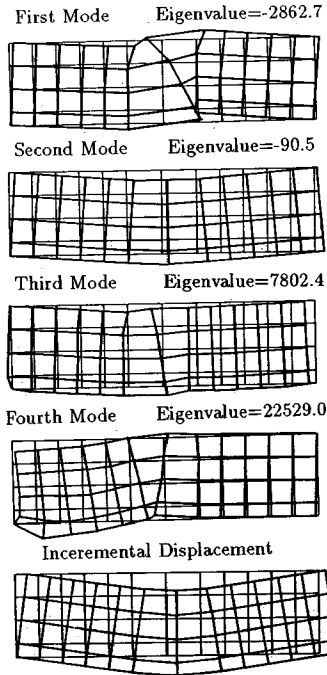
図-10 中、●印は荷重-変位曲線の最大荷重点に対応しており、limit point であると思われる。しかしながら、●印では2つの負の固有値が発生しているため、bifurcation point での挙動と同様に図-10 中の荷重低下する平衡状態とは異なる変形状態が存在することが予測できる。この点からの分岐経路を求めるには、負の固有値に対応する固有モードを増分変位とした分岐解析を行えばよい。そこで、図-12 に示す●印直後に生じる負の固有値に対応する固有モードを見てみると、一次モードには非対称な変形挙動を予測させる固有モードが発生し、二次モードには変形増分と同様な対称な変形挙動を予測させる固有モードが発生していることが分かる。この点から新たに生じる分岐経路は、この一次モードを増分変位とした分岐解析を行うことで得られると考えられ、分岐釣合経路上では構造物は明らかに非対称な変形挙動を示すモードへ移行すると推測される。しかしながら本解析では、2点の変位を等しく制御した解析を行っているため、非対称になり変位制御点の変位がそれぞれ異なるような解析を行うことはできない。また、対象とした実験では、2点の変位を制御しているため、非対称な変形モードへの移行はあまり現実的ではない。したがって、構造物が対称な挙動を示す場合だけを考えれば、この点は bifurcation point ではなく limit point と限定される。

ここで注意すべきことは、前に述べたように、limit point には imperfection の導入で bifurcation 問題から limit point の問題へと移行した結果により生じる見かけ上の limit point が存在することである。構造物の変形解析を行う場合、変形の進行に伴う構造物内部のひずみ分布などの imperfection や数値解析上の誤差等により、このような問題はしばしば発生する。しかしながら、この点以降の変形挙動(図-12)を見れば、●印以前と変化はなく、また●印前後の固有モードも変わることがない。したがって、●印は純粋な limit point であり、この点以降も対称な変形モードに限定すれば、構造物に許される釣合経路は一つしか存在せず、その変形挙動は図-12 に示す変位増分と同様なものになる。

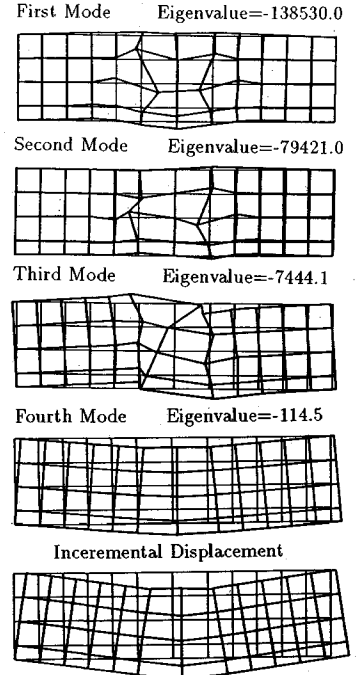
さらに計算を進めると、■印以後で構造物には4つの負の固有値が生じた。この時の固有モードを見ると、一次・二次モードに今までと全く無関係のように思われる固有モードが現れていることは非常に興味深い。一次モードは対称形に近いモードが、二次モードには非対称なモードが生じている。新たな負の固有値の発生によりこの点は明らかに bifurcation point と定義され、この点から今までとは全く変形状態が異なる釣合経路が発生



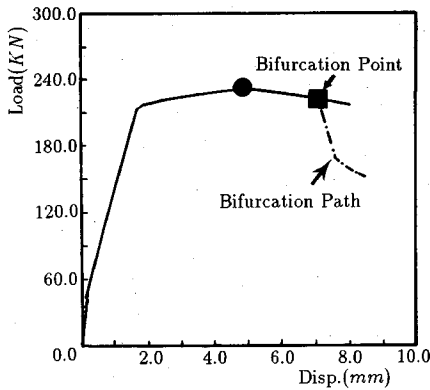
図一11 ●印直前の4次までの固有値・固有モードおよび変形増分



図一12 ●印直後の4次までの固有値・固有モードおよび変形増分



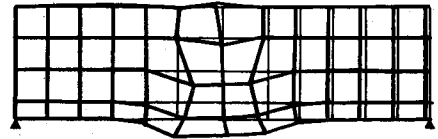
図一13 ■印直後の4次までの固有値・固有モードおよび変形増分



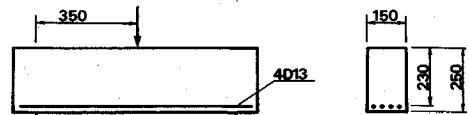
図一14 Bifurcation Point後の分岐経路

する。ここで、■印以後の実線上の変形増分は、■印以前と大きく変わることはない。したがって、実線で示される釣合経路は、■点前後でも連続な釣合経路と考えられる。

■印で図一13に示す1次モードを初期変位とする分岐解析を行うと、図一14の一点鎖線となる釣合経路を解析上得ることができた。これが bifurcation point 後に生じる新たな釣合経路の一つである。この釣合経路によれば、荷重が急激に低下してゆき、解析上構造物が破壊に至る性状を表現し得たと考えられる。急激に荷重低下を生じているときの鉄筋コンクリートはりの変形挙動を図一15に示す。図によれば、RC はりが荷重載荷点



図一15 分岐経路上の構造物の変形増分



図一16 解析モデル (unit: mm)

下部に局所的な変形の集中を生じる変形挙動を示すことで、荷重が急激に低下し構造物が破壊に至る性状を示していることが分かる。

今までの例はスターラップがあるRC はりであり、構造物の挙動も比較的曲げ挙動が卓越していた。そこで次に、スターラップがなくせん断変形が卓越すると考えられるRC はりを対象とした解析を行う。

解析モデルを図一16に示す。モデルは先ほどと同様に $a/d=1.3$ の比較的短いディープビーム状のはりである。また荷重は、非対称な変形モードを認めるために、供試体中央への一点集中載荷と仮定した。解析は、この荷重載荷点の変位を制御して行った。解析に用いた材料の機械的性質などは、すべて先の例と同様な値を用いている。

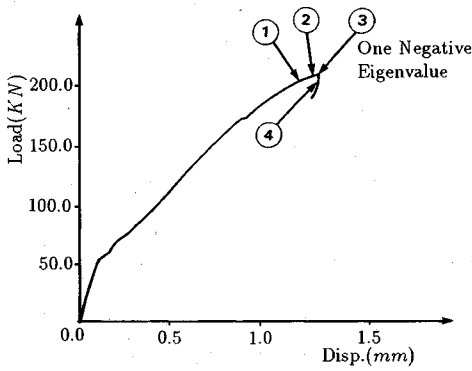


図-17 荷重-変位関係

図-17に解析より得られた荷重-変位曲線を示す。ただしこの時の変位は、荷重載荷点下方の供試体下端で定義している。解析を実行する際に図中③の時点に対応する変位で一つの負の固有値が発生し、この時構造物の荷重も低下し始めた。したがって、③の時点では、limit pointが定義される。図-17の荷重変位曲線上の①、②、③、④点での解析より得られた構造物の変形増分を示せば図-18のようであった。limit point後の荷重が急激に低下する釣合曲線上の構造物の変形増分③、④は、limit point前の変形増分とは大きく変化していることが分かる。この荷重-変位曲線の最大荷重点は、数値解析上はlimit pointを定義するが、最大荷重点後の変形挙動が最大荷重点前とは大きく異なることから、bifurcation pointが変化した見かけ上のlimit pointであると考察される。したがって、今回得られた最大荷重点後の釣合経路は、変形の進行に伴うimperfectionの導入により得られたbifurcation pathの一つと考えられる。すなわち、bifurcation point後に新たに生じる釣合経路を示している。

ここで、最大荷重点後の解析より得られた変形増分を見れば、④の変形増分に対して構造物には、shear bandが発生していることが分かる。本解析で示された、構造物が急激に荷重低下する性状は、このshear bandの発生により生じたものと推測される。今回解析の対象としたようなスターラップのないRCはりが実際に破壊する場合、その多くはせん断クラックの急激な発達の原因となっている。したがって、ここに示した結果は、実際の構造物がせん断破壊する挙動をbifurcation path上で得られた変形モードにより、解析的に再現できる可能性を示したものと言える。

ここまで示したRCはりのポストピーク挙動のうち、図-15、図-18(4)の変形挙動は、構造物の実際の破壊現象を解析的に再現できる可能性を示したものと考えられる。したがってこの結果は、RCはりの破壊時の性状は、bifurcation point後のbifurcation pathを追

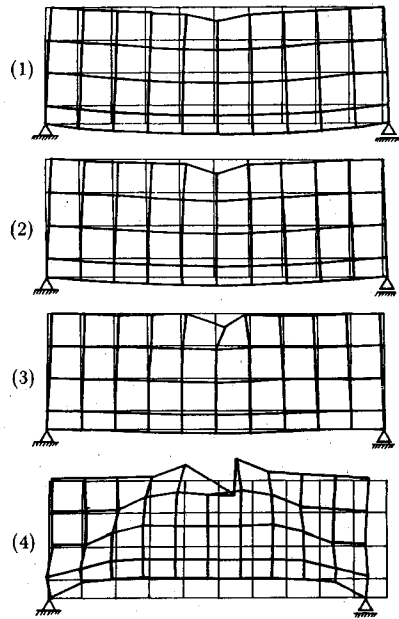


図-18 図-17の①、②、③、④の時点に対する変形増分

跡することで解析的に得ることができることを示唆している。またこのことは、構造物の破壊点が、解析上はbifurcation pointで定義することが妥当であることを意味する。

6. 結 論

(1) ポストピーク領域は構造物が不安定になり安定性が失われる領域であるため、離散化された系に対する安定性の適用を行った。さらに、安定性が失われる構造特異点であるlimit pointおよびbifurcation pointに対する理論的検討を行い、構造特異点の取扱およびその力学的意義を明確にした。特に、bifurcation pointは、破壊を数学的に定義し得る有力な限界点と考えられる。

(2) コンクリート軸部材を考え、負の固有値および負の固有値に対応する固有モードとbifurcation point後の挙動の関係を明確にし、ひずみ軟化材料に対する分岐問題の位置づけを行った。

(3) bifurcation point後の任意の分岐経路追跡手法として、固有値問題を解いて得られる固有ベクトルにより変形モードを推定し、試行錯誤的にbifurcation pathを求めていく方法を提案した。提案した方法は、コンクリートのような材料非線形性問題を取り扱うときには最も有効な方法と考えられる。

(4) RCはりを対象として、ポストピーク領域での挙動を構造安定性を考慮して詳細に調べた。その結果bifurcation pointがRCはり構造の破壊に密接な関係がありbifurcation point後のbifurcation pathを選択する

ことで構造物が破壊に至る可能性を解析的に示した。

(5) 今回対象としたRCはりについては、スターラップがある場合は、荷重載荷点下部に局所的な変形の集中が生じる変形挙動を示すことで破壊に至ることを、スターラップがない場合には shear band が生じることで破壊に至ることを示した。しかしながら本解析で得られた結果は要素分割・構成則モデルの影響等を受けると考えられ、今回示した実験値との比較もこれらの問題を含んだものであり、この点に関しては今後より詳細な検討が必要と考えている。

参 考 文 献

- 1) 中村光・二羽淳一郎・田辺忠顕：鉄筋コンクリート構造物の終局破壊点に関する解析的研究，コンクリート構造物の靱性と配筋方法に関するシンポジウム論文集，日本コンクリート工学協会，pp.181～188，1990.
- 2) Rene de Borst : Nonlinear analysis of frictional materials, Thesis of degree of doctor engineering to the Delft Univ. of technology, 1986.
- 3) Ortiz M., Leroy, Y. and Needleman, A. : Finite element method for localized failure analysis, Computer method in applied mechanics and engineering 61, pp.189～214, 1987.
- 4) Hill, R. : A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, J. Mech. Phys. Solids, 6, pp.236～249, 1958.
- 5) Leicester, R.H. : Finite deformation of shallow shells, Proc. of ASCE, J. of EMD, Dec, 1968.
- 6) Thomson, J.M.T. and Hunt, G.W. : A general theory of elastic stability, Wiley, 1973.
- 7) Croll, J.G.A. and Walker, A.C. : Elements of structural stability, Mecmillan, 1972.
- 8) 細野透：孤長法による弾性座屈問題の解析（その1）座屈点における増分解の影響，日本建築学会論文報告集，第242号，pp.41～49，1976年4月.
- 9) Darwin, D. and Pecknold, D.A : Nonlinear biaxial law for concrete, J. Eng.Mech. Div, ASCE, Vol.103, pp.229～241, 1977.
- 10) 山田一字・青柳征夫：ひび割れ面におけるせん断伝達，RC構造のせん断問題に対する解析的研究に関するコロキウム，コンクリート工学協会，pp.19～28，1983.
- 11) Kent, D.C. and Park, R. : Flexural members with confined concrete, Proc. of ASCE, Vol.97, No.ST 7, pp.1969～1990, July, 1971.
- 12) Collins, M.P. : Towards a rational theory for RC members in shear, Proc. of ASCE, ST 4, pp.649～666, April, 1978.
- 13) 出雲淳一・島 弘・岡村甫：面内力を受ける鉄筋コンクリート板要素の解析モデル，コンクリート工学，Vol.25, No.9, pp.107～120, 1987.
- 14) 池田尚治・南雲広幸：RCおよびPC構造物への有限要素法の合理的適用方法に関する研究，土木学会論文集，第414号/V-12, 1990.

(1993. 4. 27 受付)

ANALYTICAL STUDY ON THE POST-PEAK BEHAVIOR OF REINFORCED CONCRETE BEAMS

Hikaru NAKAMURA and Tada-aki TANABE

The finite element analysis is performed on reinforced concrete beams and the nonlinear behavior is investigated in detail with consideration of stability. The results show that the failure of RC beams is closely related to the bifurcation point and that the failure is understood on the bifurcation path after the bifurcation point is obtained analytically. In the paper, the post-peak and the ultimate behaviors of RC beams are expressed by analytical calculation.