

下水貯留濃縮槽の底部勾配

正員 川 島 淳*

THE BED SLOPE OF TANKS, STORING AND CONDENSATING SEWAGE

Hiroshi Kawashima, C.E. Member

Synopsis :

In the past, the bed slope of tanks, storing and condensating sewage has been selected without any theoretical consideration. In this paper, the self-consolidation phenomena of heaped sewage sludge on the bottom of such tanks is carefully analyzed, by the method of representative transformation. Then, upon referring several results of experiment performed by the author, a reasonable method determining the bed slope is proposed, in order to economically secure a quick consolidation of sewage sludge in the tanks. Such a result would be utilized basically on the design of sedimentation basins, Imhoff tanks or digestion tanks for sewage treatment.

要 旨 在来無批判にきめられていた下水処理槽の底部勾配の選定について、堆積した下水汚泥の挙動に注目し、写像変換を行つて Imhoff 槽底部の汚泥自重圧密の解析を行つた。この結果に検討を加え、迅速濃縮を目的とした場合で経済性も考慮した妥当な底部勾配算定方法を提案し、下水処理槽底部構造設計への基礎的成果をえた。

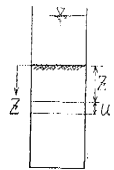
1. 緒 言

常流矩形下水沈殿池、Dortmund 型沈殿池、Imhoff 槽、消化槽、屎尿消化槽、高速接触曝気沈殿槽の concentrator 及び汚泥貯留槽などの下水、屎尿処理諸施設の底部構造は一般にかなりの勾配がつけられており、本来の機能の他に汚泥の貯留濃縮に有効で、排除にも便利のように設計されている。しかし、在来これに關した研究はきわめて少いので、これらの諸施設の底部勾配の選定については経験によつており、合理性に欠けることが多い。最近問題となつて各方面の注目をあびている原子力平和利用に伴う放射性廃物の貯留濃縮処理槽の設計にも關連してきわめて興味深いので、まづ Imhoff 槽内における汚泥挙動に注目し、2軸自重圧密機構を解析した。さらに処理施設底部傾斜面と下水汚泥との底面摩擦力を考慮した場合の解について検討を加え、迅速濃縮を目的とした合理的底部勾配の算定方法を提案した。

2. 理 論

著者はすでに下水汚泥だけでなく、汚泥、floc 系物質について Gel 構造とみなし、凝集干渉沈降が終つてつながつた構造¹⁾となつてからの汚泥層の収縮を自重圧密現象として取扱ひ、その収縮機構を批判的に検討した。図-1 のように1軸自重圧密の場合で、圧密時間 $t=0$ における汚泥表面に原点をとり下向きに z 軸をとると、時間 t ののちに z にあつた汚泥が u の変位をし、 $z+dz$ にあつた汚泥は $u+du$ の変位をするものとして、 γ_w =水の単位重量、 w =汚泥内過剰圧力、 c =圧密伝導度、 k =浸透係数、 v =間隙水減少率、とおいて間隙水流動の基礎式を求めた結果、一般に

図-1 汚泥層の1軸自重圧密



$$v \left(1 + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial k}{\partial z} \frac{1}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial z} \right)} - \frac{k}{\gamma_w} \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} \right\} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{k}{\gamma_w} \frac{1}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial z} \right)} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (1)$$

となるが、 $\partial k / \partial z = 0$ 、 $\partial^2 u / \partial z^2 = 0$ の場合は

* 大阪工業大学助教授、土木工学教室

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{k}{v r_w} \frac{1}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \dots\dots\dots(2)$$

となり、さらに $\partial u/\partial z \neq 0$ の場合は

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{k}{v r_w} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \dots\dots\dots(3)$$

となることを述べた。なおこれらを適用するのに、汚泥、floc では一般に $\partial k/\partial z \neq 0$, $\partial^2 u/\partial z^2 \neq 0$ として取扱いうるが、 $\partial u/\partial z \neq 0$ であるので式(2)を基礎式とする方が妥当であること、及びゼロハン工場廃物のような特別なものは $\partial u/\partial z \neq 0$ としてもよいことを実験結果から指摘した²⁾。

汚泥、floc の自重圧密の初期では圧密伝導度 c が若干大きく変化するが、

$$c = \frac{k}{v r_w} \frac{1}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \text{constant}$$

として近似的に解き、この結果を用いて汚泥厚を計算し、実測値と比較してみると、緩速ろ過汚泥の1例ではほぼ15%以内でいどの誤差がみられるので、実用的には差しつかえなからうと思う。

外国では1950年頃から汚泥の圧密が注目されたようで、英国 Yorkshire の下水研究所の John Finch, Harold Ives 両氏は活性汚泥の沈降実験を行い、圧密の影響があると述べている³⁾。最近では米国 A.C. Ingersoll, J.E. McKee, N.H. Brooks 氏は矩形沈殿池底部の汚泥を考慮した設計について、傾斜板において濃縮汚泥をえようとすし、汚泥層の収縮の初期段階では外圧のもとにおける clay の圧密に類似があるとして1軸圧密の基礎式を用いて考察を行っている⁴⁾。

図-2 Imhoff 槽底部模型と汚泥層の2軸自重圧密

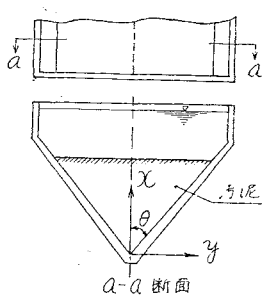


図-3 写像変換図

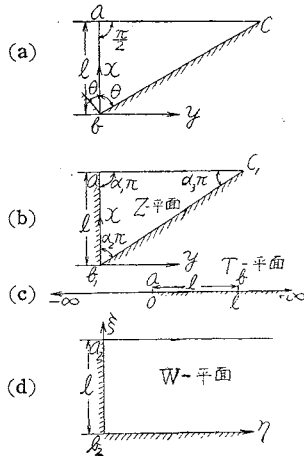


図-2 に示したような底部構造の Imhoff 槽の任意断面において、最底点を原点として x, y 座標をとり、1定量の堆積汚泥の仮想汚泥厚を l とする。 x 軸について左右対称であるので、片側底面と x 軸で区切られた汚泥断面(図-3 (a))について問題を解けばよい、ただし底面の外、 x 軸は摩擦のない不透水面と考えて汚泥層の自重圧密を考察する。

汚泥層2軸自重圧密の基礎式を

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots(4)$$

とし、境界条件、初期条件は

$$\left. \begin{aligned} x=l, w=0 \\ y=0, \partial w/\partial y=0 \\ y=x \tan \alpha \pi, \partial w/\partial x + \partial w/\partial y=0 \\ t=0, w=f(x,y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

ただし、 $l \geq x \geq 0, l \tan \alpha \pi \geq y \geq 0$ とする。

式(5)で示した境界条件を満足する解を求めるのはやつかいであるので、Schwarz-Christoffel 定理を応用して

求めることとした⁵⁾。

図-3 (a) の直角三角形を (b) に示すように Z-平面を構成する直角三角形 $a_1b_1c_1$ とし、 $a_1b_1=l$ 内角を $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$ とする。Z-平面の三角形の内部を (c) に示した T-平面の上半部に写像する函数を Schwarz-Christoffel 定理によつて変換して求め、さらに (d) に示した W-平面の半帯状形の内部を T-平面の上半部に写像する函数を同方法で求めると、Z-平面の内部は複素変数 t を媒介変数として W-平面の半帯状形に対応的に写像される。T-平面の像点 a, b, c は $0, l, +\infty$ に対応するものとする。

写像函数は

$$\left. \begin{aligned} Z &= \int t^{-\frac{1}{2}}(l-t)^{\alpha_2-1} dt + A \\ W &= \int t^{-\frac{1}{2}}(l-t)^{-\frac{1}{2}} dt + B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

とおかれるので、これを計算すると

$$\left. \begin{aligned} Z &= -\frac{1}{\alpha_2} \sin^{-1} \frac{(l-t)^{\alpha_2}}{\sqrt{l}} + A \\ W &= -2 \sin^{-1} \frac{\sqrt{l-t}}{\sqrt{l}} + B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となるが、 $t=l$ で $Z=0$ 、すなわち b_1 を Z-平面の原点としたから $A=0$ 、 $t=l$ で $W=0$ とすると $B=0$ となる。結局

$$\left. \begin{aligned} Z &= -\frac{1}{\alpha_2} \sin^{-1} \frac{(l-t)^{\alpha_2}}{\sqrt{l}} \\ W &= -2 \sin^{-1} \frac{\sqrt{l-t}}{\sqrt{l}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

以上で写像函数は求めたので、式 (4)、(5) の基礎式及び諸条件を W-平面の ξ, η 座標に変換すると

$$\left. \begin{aligned} \partial w / \partial t &= c(\partial^2 w / \partial \xi^2 + \partial^2 w / \partial \eta^2) \\ \xi &= l, w = 0 \\ \xi = 0, \partial w / \partial \xi &= 0 \\ \eta = 0, \partial w / \partial \eta &= 0 \\ t = 0, w &= f(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $l \geq \xi \geq 0, +\infty \geq \eta \geq 0$

となる。 $w = TXY$ とおいて T, X, Y をそれぞれ独立変数 t, ξ, η のみの函数とし基礎式を代入すると

$$\left. \begin{aligned} T &= E_{\alpha\beta} e^{-c(\alpha^2 + \beta^2)t} \\ X &= A_{\alpha} \cos \alpha \xi + B_{\alpha} \sin \alpha \xi \\ Y &= C_{\beta} \cos \beta \eta + D_{\beta} \sin \beta \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

をうるので、特解は

$$w = TXY = E_{\alpha\beta} e^{-c(\alpha^2 + \beta^2)t} (A_{\alpha} \cos \alpha \xi + B_{\alpha} \sin \alpha \xi) (C_{\beta} \cos \beta \eta + D_{\beta} \sin \beta \eta) \dots\dots\dots (11)$$

境界条件は

$$(X)_{\xi=l} = 0, (dX/d\xi)_{\xi=0} = 0, (dY/d\eta)_{\eta=0} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

式 (10) を (12) に代入し、固有値、固有函数を求めると、

$$\left. \begin{aligned} X &= A_{\alpha} \cos \frac{\pi}{2l} (2m-1)\xi, m=1, 2, 3, \dots \text{で正側のみをとる。} \\ Y &= C_{\beta} \cos \beta \eta, 0 \leq \beta < \infty \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$$\therefore w = E_{\alpha\beta} e^{-c\left(\frac{\pi^2(2m-1)^2}{4l^2} + \beta^2\right)t} A_{\alpha} \cos \frac{\pi(2m-1)\xi}{2l} C_{\beta} \cos \beta \eta \dots\dots\dots (14)$$

β に関して 0 から ∞ まで積分し、 m に関して 1 から ∞ までの和をとると

$$\begin{aligned} w &= \int_0^{\infty} d\beta \sum_{m=1, 2, 3, \dots} E_{\alpha\beta} A_{\alpha} C_{\beta} e^{-c\left(\frac{\pi^2(2m-1)^2}{4l^2} + \beta^2\right)t} \cos \frac{\pi(2m-1)\xi}{2l} \cos \beta \eta \\ &= \sum_{m=1, 2, 3, \dots} e^{-c\left(\frac{\pi^2(2m-1)^2}{4l^2}\right)t} \cos \frac{\pi(2m-1)\xi}{2l} \int_0^{\infty} G e^{-c\beta^2 t} \cos \beta \eta d\beta \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ただし $G = E_{\alpha\beta} A_{\alpha} C_{\beta}$

初期条件を代入して、

$$(w)_{t=0} = f(\xi, \eta) = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \cos \frac{\pi(2m-1)\xi}{2l} \int_0^{\infty} G \cos \beta \eta d\beta \dots (16)$$

Fourier の積分を用いて⁶⁾

$$f(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\beta \int_0^{\infty} f(\xi, \lambda) \cos \beta \eta \cos \beta \lambda d\lambda$$

$f(\xi, \lambda)$ を ξ の函数とみて Fourier 級数より

$$f(\xi, \lambda) = \frac{2}{l} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \cos \frac{(2m-1)\pi \xi}{2l} \int_0^l f(\lambda, \mu) \cos \frac{(2m-1)\mu}{2l} d\mu$$

$$\therefore f(\xi, \eta) = \frac{4}{\pi l} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \cos \frac{(2m-1)\pi \xi}{2l} \int_0^{\infty} d\beta \int_0^{\infty} \int_0^l f(\lambda, \mu) \cos \beta \eta \cos \beta \lambda \cos \frac{(2m-1)\pi}{2l} \mu d\lambda d\mu \dots (17)$$

$$G = \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \int_0^l f(\lambda, \mu) \cos \beta \lambda \cos \frac{(2m-1)\pi}{2l} \mu d\lambda d\mu \dots (18)$$

$$\begin{aligned} \therefore w &= \frac{4}{\pi l} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} e^{-c \frac{(\pi^2(2m-1)^2)}{4l^2} t} \cos \frac{(2m-1)\pi \xi}{2l} \int_0^{\infty} d\beta \int_0^{\infty} \int_0^l f(\lambda, \mu) \\ &\quad e^{-c \beta^2 t} \cos \beta \lambda \cos \frac{(2m-1)\pi}{2l} \mu \cos \beta \eta d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{l\sqrt{\pi ct}} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} e^{-c \frac{\pi^2(2m-1)^2}{4l^2} t} \cos \frac{(2m-1)\pi \xi}{2l} \int_0^{\infty} \int_0^l f(\lambda, \mu) \\ &\quad \left(e^{-\frac{(\lambda+\eta)^2}{4ct}} + e^{-\frac{(\lambda-\eta)^2}{4ct}} \right) \cos \frac{(2m-1)\pi}{2l} \mu d\lambda d\mu \dots (19) \end{aligned}$$

式 (19) の ξ, η に $W=f(Z)$ から求めた x, y の値を代入すると求める解がえられる。

式 (8) より, $\sqrt{T} \sin \alpha_2 Z = l \alpha_2 \sin^2 \alpha_2 W / 2$ において整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln l + \frac{1}{2} \ln \left\{ (\sin \alpha_2 y \cos h \alpha_2 x)^2 + (\cos \alpha_2 y \sin h \alpha_2 x)^2 \right\} - i \tan^{-1} \frac{\cos \alpha_2 y \sin h \alpha_2 x}{\sin \alpha_2 y \cos h \alpha_2 x} \\ = \alpha_2 \ln l + \alpha_2 \ln \left\{ \left(\sin \frac{\eta}{2} \cos h \frac{\xi}{2} \right)^2 + \left(\cos \frac{\eta}{2} \sin h \frac{\xi}{2} \right)^2 \right\} - i \tan^{-1} \frac{\cos \frac{\eta}{2} \sin h \frac{\xi}{2}}{\sin \frac{\eta}{2} \cos h \frac{\xi}{2}} \end{aligned}$$

となるので結局,

$$\therefore \xi = 2 \alpha_2 x, \eta = 2 \alpha_2 y \dots (20)$$

がえられる。

式 (20) の関係を式 (19) に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{l\sqrt{\pi ct}} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} e^{-c \frac{\pi^2(2m-1)^2}{4l^2} t} \cos \frac{(2m-1)\pi 2 \alpha_2 x}{2l} \int_0^{\infty} \int_0^l f(\lambda, \mu) \\ &\quad \left(e^{-\frac{(\lambda+2\alpha_2 y)^2}{4ct}} + e^{-\frac{(\lambda-2\alpha_2 y)^2}{4ct}} \right) \cos \frac{(2m-1)\pi}{2l} \mu d\lambda d\mu \dots (21) \end{aligned}$$

これが求める解である。

(1) 初期条件 $f(\lambda, \mu) = w_0 = 1$ 定の場合

式 (21) で

$$(\lambda + 2 \alpha_2 y)^2 / 4 ct = \xi_1^2, (\lambda - 2 \alpha_2 y)^2 / 4 ct = \xi_2^2$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \lambda &= 2\sqrt{ct} \xi_1 - 2 \alpha_2 y; d\lambda = 2\sqrt{ct} d\xi_1 \\ \lambda &= 0 \text{ で } \xi_1 = \alpha_2 y / \sqrt{ct}; \lambda = \infty, \xi_1 = \infty \end{aligned} \right\} \\ \left\{ \begin{aligned} \lambda &= 2\sqrt{ct} \xi_2 + 2 \alpha_2 y; d\lambda = 2\sqrt{ct} d\xi_2 \\ \lambda &= 0 \text{ で } \xi_2 = -\alpha_2 y / \sqrt{ct}; \lambda = \infty, \xi_2 = \infty \end{aligned} \right\} \\ \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(\lambda+2\alpha_2 y)^2}{4ct}} + e^{-\frac{(\lambda-2\alpha_2 y)^2}{4ct}} \right) d\lambda = 2\sqrt{ct} \left(\int_{\frac{\alpha_2 y}{\sqrt{ct}}}^{\infty} e^{-\xi_1^2} d\xi_1 + \int_{-\frac{\alpha_2 y}{\sqrt{ct}}}^{\infty} e^{-\xi_2^2} d\xi_2 \right) \\ = 2\sqrt{ct} \times 2 \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 2\sqrt{ct} \pi \end{aligned}$$

$$\int_0^l \cos \frac{(2m-1)\pi\mu}{2l} d\mu = \frac{2l}{(2m-1)\pi} (-1)^{m+1}, m=1,2,3,\dots$$

式(21)に代入して、この場合の解を求めると

$$\therefore w = \frac{4w_0}{\pi} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)} e^{-\frac{c\pi^2(2m-1)^2t}{4l^2}} \cos \frac{(2m-1)\pi}{2l} 2\alpha_2 x \dots (22)$$

(2) 初期条件が $f(\mu)$ の場合

同様に

$$w = \frac{2}{l} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} e^{-\frac{c\pi^2(2m-1)^2t}{4l^2}} \cos \frac{(2m-1)\pi}{2l} 2\alpha_2 x \int_0^l f(\mu) \cos \frac{(2m-1)\pi}{2l} \mu d\mu \dots (23)$$

(3) 初期条件が $f(\lambda, \mu)$ の場合

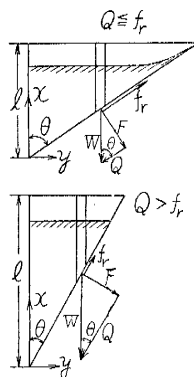
$$w = \frac{2}{l\sqrt{\pi}} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} e^{-\frac{c\pi^2(2m-1)^2t}{4l^2}} \cos \frac{(2m-1)\pi}{2l} 2\alpha_2 x \int_0^l \cos \frac{(2m-1)\pi}{2l} \mu \left(\int \frac{\alpha_2 y}{\sqrt{ct}} f(2\sqrt{ct}\xi_1 - 2\alpha_2 y, \mu) e^{-\xi_1^2 d \xi_1} + \int \frac{\alpha_2 y}{\sqrt{ct}} f(2\sqrt{ct}\xi_2 + 2\alpha_2 y, \mu) e^{-\xi_2^2 d \xi_2} \right) d\mu \dots (24)$$

つぎに傾斜底面と汚泥との摩擦力を考慮したうえで初期条件をきめ、上記(1)(2)(3)のいずれかの場合につき圧密度 μ_x を算定する。傾斜底面と汚泥間のすべり摩擦係数を μ_* 、静止摩擦力を f_r とすると図-4で、 $f_r = \mu_* F$ 、 $\mu_* = f_r / F = \tan(90^\circ - \theta_*) = \tan \lambda$ となる。 $90^\circ - \theta_*$ は摩擦角でこれより θ が大きくなると滑動はおこらぬ。そこで図-4のように $Q > f_r$ 、 $Q \leq f_r$ の場合に分けて傾斜底面に働く自重による圧力をそれぞれ x, y 方向について考えると、

$$Q > f_r, (90^\circ - \theta > \lambda) \\ x \text{ 方向, } -W(1 - \mu_* \sin \theta \cos \theta) \\ y \text{ 方向, } \mu_* W \sin^2 \theta$$

$$Q \leq f_r, (90^\circ - \theta \leq \lambda) \\ \text{汚泥は滑動しないから滑動方向の力 } Q \text{ と摩擦力 } f_r \text{ は考慮しなくてもよく,} \\ x \text{ 方向, } -W \sin^2 \theta \\ y \text{ 方向, } W \sin \theta \cos \theta$$

図-4 底面における力の釣合と汚泥の底面附着



となる。水中の汚泥単位重量を r_s とし初期分布を図-5に示したが、 x 方向を三角形、 y 方向を矩形とすると、初期圧力分布は次のようになる。

$$90^\circ - \theta > \lambda \\ f(x, y) = r_s(l-x) \sqrt{(1 - \mu_* \sin \theta \cos \theta)^2 + (\mu_* \sin^2 \theta)^2} \dots (25)$$

$$90^\circ - \theta \leq \lambda \\ f(x, y) = r_s(l-x) \sin \theta \dots (26)$$

式(25)、(26)を式(23)に代入して w を計算すると、

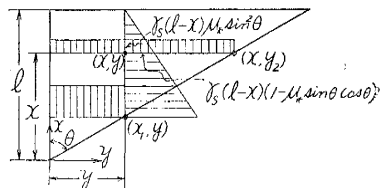
$$90^\circ - \theta > \lambda \\ w(x, y, t) = \frac{8r_s l}{\pi^2} \sqrt{(1 - \mu_* \sin \theta \cos \theta)^2 + \mu_*^2 \sin^2 \theta} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} e^{-\frac{c\pi^2(2m-1)^2t}{4l^2}} \cos \frac{(2m-1)\pi}{l} \alpha_2 x \dots (27)$$

$$90^\circ - \theta \leq \lambda \\ w(x, y, t) = \frac{8r_s l}{\pi^2} \sin \theta \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} e^{-\frac{c\pi^2(2m-1)^2t}{4l^2}} \cos \frac{(2m-1)\pi}{l} \alpha_2 x \dots (28)$$

式(27)、(28)を用いて x 方向の圧密度 μ_x を求めると、

$$90^\circ - \theta > \lambda, a = X/l \\ \mu_x = 1 - \beta \frac{F_w}{F_0} \dots (29)$$

図-5 汚泥層内圧力の初期分布 $90^\circ - \theta > \lambda$



$$F_w = \int_X^l w dx = \frac{8 \tau_s l^2}{\alpha_s \pi^3} (1 - \mu_x \sin \theta \cos \theta) \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} e^{-\frac{c \pi^2 (2m-1)^2 t}{4l^2}} \{\sin(2m-1)\pi \alpha_s - \sin(2m-1)\pi \alpha_s a\}$$

$$F_0 = \int_X^l \tau_s (l-x) (1 - \mu_x \sin \theta \cos \theta) dx = \frac{(1-a)^2}{2} \tau_s l^2 (1 - \mu_x \sin \theta \cos \theta)$$

であるから、 $t=0$ で $\beta F_w/F_0=1$ 、 $t=\infty$ で $\beta F_w/F_0=0$ とすると、

$$\beta = \frac{\alpha_s \pi^3 (1-a)^2}{16 \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \{\sin(2m-1)\pi \alpha_s - \sin(2m-1)\pi \alpha_s a\}} \dots (30)$$

$$\therefore \mu_x = 1 - \frac{\sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} e^{-\frac{(2m-1)^2 \pi^2}{4} \tau} \{\sin(2m-1)\pi \alpha_s - \sin(2m-1)\pi \alpha_s a\}}{\sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \{\sin(2m-1)\pi \alpha_s - \sin(2m-1)\pi \alpha_s a\}} \dots (31)$$

$90^\circ - \theta \cong \lambda$

式 (28) より、

$$F_w = \frac{8 \tau_s l^2}{\alpha_s \pi^3} \sin \theta \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} e^{-\frac{c \pi^2 (2m-1)^2 t}{4l^2}} \{\sin(2m-1)\pi \alpha_s - \sin(2m-1)\pi \alpha_s a\}$$

$$F_0 = \tau_s l^2 (1-a)^2 \sin \theta / 2$$

式 (29) により同様に β 及び μ_x を求めると、 $90^\circ - \theta > \lambda$ の場合の β 及び μ_x と全く同じ結果をえるので、式 (31) の μ_x の式は $90^\circ - \theta \cong \lambda$ で成立していることがわかる。特別な場合として、 $\alpha_s = 1/2$ 、 $a = 0$ では、 $\beta = 1$ で

$$\sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \sin \frac{(2m-1)\pi}{2} = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

となるので、

$$\therefore \mu = 1 - \frac{32}{\pi^3} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^3} e^{-\frac{(2m-1)^2 \pi^2}{4} \tau} \dots (32)$$

これは上面浸透層、底面不透透層の1軸自重圧密の圧密度を示している⁷⁾。ただし、 $\tau = ct/l^2$ である。

式 (31) についての数値計算結果を図-6 に示す。 $\alpha_s \pi = \theta$ の小さくなるほど同一の τ に対する μ_x は大きい値を示している。cylinder 内の自重圧密では式 (32) で示した圧密度で x 軸 (重力) 方向の圧縮だけで体積収縮率を議論できるが、ここで取扱っている図-2 に示すような構造物における汚泥の自重圧密では体積収縮率 $\{1 - (V_\tau/V_0)\}$ の時間的変化を考える方が妥当と思われる。ここで $V_\tau = \text{time factor } \tau$ における体積、 $V_0 = \text{自重圧密の始つた時の体積}$ 、 $l = \text{体積 } V_0 \text{ の時の Imhoff 槽の中央 } x \text{ 軸における汚泥厚}$ とすると図-7 のように奥行 b について考えて、 $V_0 = bl^2 \tan \theta$ 、 $V_\tau = bl^2 \tau \tan \theta$ 、 $l_\tau = l(1 - \phi \mu_x)$ 、自重圧密の始つた時と終了時の空隙比を ϵ_0 、 ϵ_θ とし、 $\phi = (\epsilon_0 - \epsilon_\theta)/(1 + \epsilon_0)$ 、 $V_\tau = bl^2 (1 - \phi \mu_x)^2 \tan \theta$

$$1 - V_\tau/V_0 = 1 - (1 - \phi \mu_x)^2 \dots (33)$$

$\phi = 0.5 \sim 0.9$ までの μ_x と体積収縮率の関係を図-8 に示した。同様に Imhoff cone では図-9 について、

$$1 - V_\tau/V_0 = 1 - (1 - \phi \mu_x)^3 \dots (34)$$

μ_x と体積収縮率との関係は図-10 となる。Imhoff cone では厳密には3軸自重圧密の基礎式を解いて μ_x を求めねばならない。しかしその解析はきわめて複雑である。現在著者は以上の解析と平行して実験用 Imhoff 槽 ($\theta = 45^\circ$ で約 17 l の容量となる) で底部勾配を変化できる両面硝子製の模型により各種の汚泥自重圧密実験を継続中であり、難解な Imhoff cone の μ_x を実験条件を同じくして同じ θ の傾斜を持たせた Imhoff 槽との比較実験から算定したいと考えている⁷⁾。本文では一応 Imhoff 槽の2軸圧密の μ_x を使用し以下の考察を進めることとする

図-6 Imhoff 槽中央部における重力方向の圧密度 μ_x と time factor τ との関係図

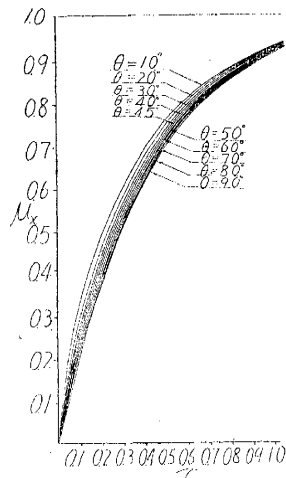


図-7 Imhoff 槽

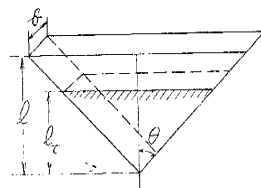


図-8 Imhoff 槽における体積収縮率と圧密度との関係

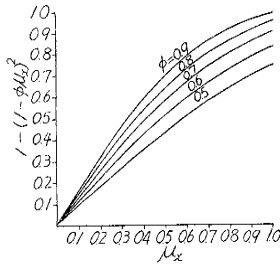


図-9 Imhoff cone

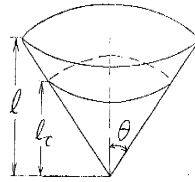
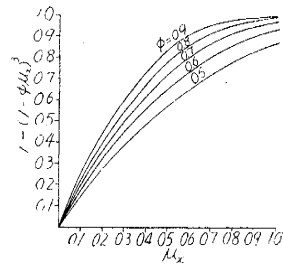


図-10 Imhoff cone における体積収縮率と圧密度との関係



さらに体積収縮率の τ についての変化率を求めると次のようになる。

Imhoff 槽では式 (33) より、

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(1 - V_\tau/V_0) = 2\phi \partial \mu / \partial \tau - \phi^2 \partial \mu^2 / \partial \tau$$

式 (31) の μ_x について、

$$r = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \{ \sin(2m-1)\pi\alpha_2 - \sin(2m-1)\pi\alpha_1 a \}$$

$$k = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)} \{ \sin(2m-1)\pi\alpha_2 - \sin(2m-1)\pi\alpha_1 a \} e^{-\frac{(2m-1)^2 \pi^2}{4} \tau}$$

とおいて計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(1 - V_\tau/V_0) = \frac{\pi^2 \phi}{2} \frac{k}{r} \left\{ 1 - \phi \left(1 - \frac{k}{r} \right) \right\} \dots \dots \dots (35)$$

Imhoff cone では

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(1 - V_\tau/V_0) = 3\phi^2 \partial \mu_x / \partial \tau - 3\phi^2 \partial \mu_x^2 / \partial \tau + \phi^3 \partial \mu_x^3 / \partial \tau, \quad \partial \mu_x^3 / \partial \tau = \frac{3\pi^2}{4} \frac{k}{r} (2 - \mu_x) \mu_x$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial \tau}(1 - V_\tau/V_0) = \frac{3\pi^2 \phi}{4} \frac{k}{r} \left\{ 1 - 2\phi \left(1 - \frac{k}{r} \right) + \phi^2 \mu_x (2 - \mu_x) \right\} \dots \dots \dots (36)$$

図-11 Imhoff 槽における体積収縮率の τ についての変化率

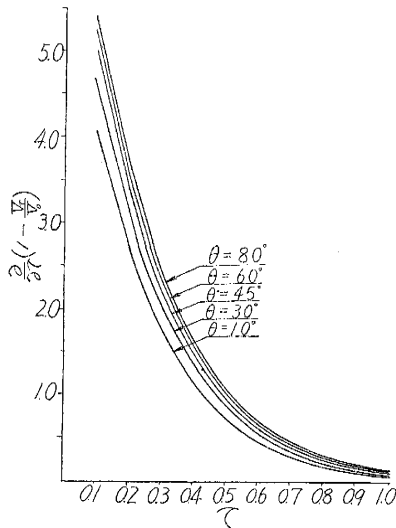
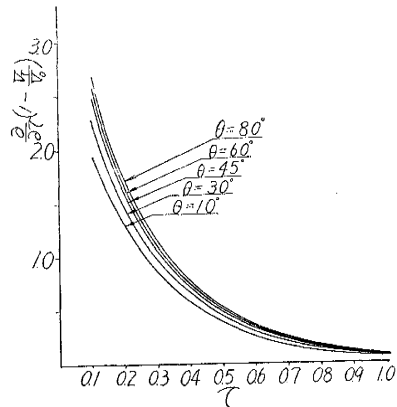


図-12 Imhoff cone における体積収縮率の τ についての変化率



式 (35), (36) について τ との関係計算した結果が図-11, 12 である。ただし、下水汚泥の自重圧密では $\phi=0.7\sim 0.8$ であるので⁷⁾、 $\phi=0.8$ とし、また汚泥層の中心で重力方向の圧密度 μ_x について考えているので k 及び r の式中の $a=0$ として計算を行った。Imhoff 槽、Imhoff cone とともに $\partial(1 - V_\tau/V_0)/\partial \tau$ と τ の関係は、 τ の増加とともにこのように急激に減少するがその度合は Imhoff cone の方が大きく、ともに θ についても若干

の差異がみられる。

Imhoff 槽, Imhoff cone の体積収縮率を $\phi=0.8$ とし $\theta=10^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ について計算すると図-13, 14 のようになる。

図-13 Imhoff 槽における体積収縮率と time factor との関係

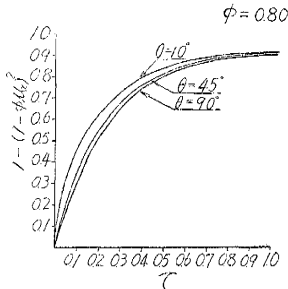
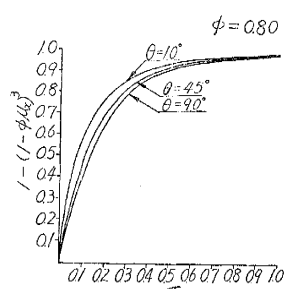


図-14 Imhoff cone における体積収縮率と time factor との関係



3. 合理的底部勾配の選定方法

図-13 を利用し, 50% 体積収縮率を示すに要する時間を θ について比較すると表-1 のようになる。体積収縮率が 50% となるまでの所要自重圧密時間 T_{50} は次のようにして求められる。

表-1

θ	10°	45°	90°
τ_{50}	0.12	0.17	0.19

一般に $T_{50} = \tau l^2/c$ であるから表-1 により

Imhoff 槽では,
 $T_{10} : T_{45} : T_{90} = \tau_{10} l_1^2/c_1 : \tau_{45} l_2^2/c_2 : \tau_{90} l_3^2/c_3$
 $= 0.12 l_1^2/c_1 : 0.17 l_2^2/c_2 : 0.19 l_3^2/c_3$

となる。 $l^2/c=1$ 定の場合

$T_{10} : T_{45} : T_{90} = 0.12 : 0.17 : 0.19$

となり, T_{50}/T_{90} と θ の関係を図-15 に示す。

l^2/c 定, すなわち,

$l_1^2/c_1 : l_2^2/c_2 : l_3^2/c_3 = a_1 : a_2 : a_3$

a_1 定, a_2 定, a_3 定の場合,

$T_{10} : T_{45} : T_{90} = 0.12 a_1 : 0.17 a_2 : 0.19 a_3$

となる。無次元数 T_{50}/T_{90} を考えて, 一般に

$T_{10}/T_{90} : T_{45}/T_{90} : T_{90}/T_{90} = 0.631 a_1 : 0.894 a_2 : 1.00 a_3$
 $= 0.631 a_1/a_3 : 0.894 a_2/a_3 : 1.00 \dots (37)$

とおくことができる。

同様に図-14 で Imhoff cone の 50% 体積収縮率における τ の値は表-2 のようになる。これは Imhoff 槽の各値より小さいので自重圧密による体積収縮が早いことを示していることがわかる。この比較を図-16 に示した。Imhoff cone の

$T_{10} : T_{45} : T_{90} = 0.07 b_1 : 0.115 b_2 : 0.140 b_3$

とすると, 一般に

$T_{10}/T_{90} : T_{45}/T_{90} : T_{90}/T_{90} = 0.500 b_1/b_3 : 0.821 b_2/b_3 : 1.00 \dots (38)$

となる。 $l^2/c=1$ 定の場合

$T_{10}/T_{90} : T_{45}/T_{90} : T_{90}/T_{90} = 0.500 : 0.821 : 1.00$

となる。Imhoff 槽との比較を図-15 に示した。 T_{50}/T_{90} と θ の関係は

$T_{50}/T_{90} = 1 - e^{-\frac{180\xi}{\pi(90-\theta)}} \dots (39)$

とおかれ, $\xi=$ 常数で Imhoff 槽では $\phi=0.80$ に対して, $\xi=1.388$, Imhoff cone では $\xi=0.969$ となる。

以上で Imhoff 槽と Imhoff cone における汚泥の自重圧密の解析と考察を述べたが, さらに Imhoff 型について弱点と考えられているように θ が小さくすると掘さくが深くなる点を考慮し, 内部汚泥の迅速濃縮と建設工費

図-15 50%体積収縮率までに要する時間比 (θ と 90° の比率) と θ の関係比較図

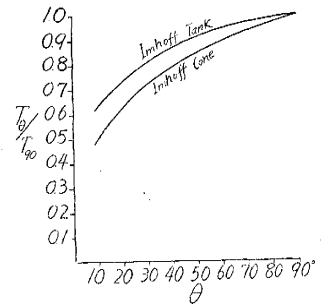
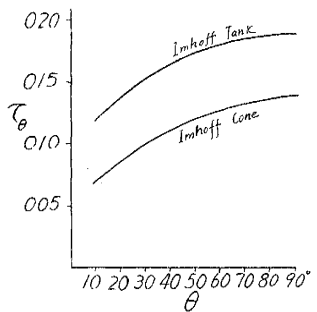


図-16 50%体積収縮率における time factor と θ との関係比較図



との両面から合理的底部勾配を検討してゆきたい。

図-17の Imhoff 槽の容積を V とすると、 $V = bL(2a+L)\tan\theta$ であるがこれを L について解くと、 $L = -a + \sqrt{a^2 + V \cot\theta/b}$ となる。同様に Imhoff cone では $V = (L \sin\theta)^2 \pi(a+L/3)$ となり、 L について3次式となる。Imhoff 槽、Imhoff cone とともに地下埋設式とし、槽天端を地表面とすると、最大掘さく深 $a+L$ は Imhoff 槽では $a+L = \sqrt{a^2 + V \cot\theta/b}$ 、 a, b, V を常数とすると上式は θ のみの函数となる。

掘さくの歩掛りを C_0 とし、

$$C_0 = \varphi(a+L) \dots\dots\dots (40)$$

としておく、この函数は地盤の性質、地下水位の状況などで変化する無次元数である。 C_0 は θ が小さくなると大きい値をとるので、汚泥の収縮の面からとは矛盾しているが、2つの無次元数 T_0/T_{90} と C_0 との和を考え、 w を相対軽重率とし、無次元数 ψ を次のように定数する。

$$\psi = wC_0 + T_0/T_{90} \dots\dots\dots (41)$$

$d\psi/d\theta = 0$ において θ を求め、 ψ を最小とする θ を合理的底部勾配としたい。この関係は図-18のようになるはずである。

模型 Imhoff 槽底板は鉄であるが、活性汚泥による実験では、鉄板に対する摩擦角はほぼ 45° であつた⁹⁾。したがつて $\theta \geq 45^\circ$ の範囲では汚泥は鉄板の面に付着し、槽最底部への汚泥層の収縮は多少阻害され好ましくない。こうした点も当然勾配選定の場合考慮すべきであろう。

4. 結 論

下水処理槽の底部勾配について、堆積した下水汚泥の迅速濃縮を目的とした場合の汚泥の2軸自重圧密現象を解析し、その結果を設計へ応用するため検討を加えた結果は次のようである。

(1) Imhoff 槽内における下水汚泥の自重による濃縮は Relaxation 法によつても解くことができると思われるが、ここでは2軸自重圧密の基礎式を解いて求めることとした。この場合の境界条件をそのままの座標で考慮することはきわめてやつかひであるので、Schwarz-Christoffel の定理を応用し写像変換によつて半無限帯状の内部へ写像する写像函数を求めて解き、この解についてさらに元の座標へ写像変換することによつて、こうした場合の解を求めることができた。なお、この写像函数を用いれば境界条件を異にする他の解もきわめて容易に求めることができる。

(2) このようにして求めた解に、底面摩擦を考慮し、重力方向の汚泥圧密度 μ_x と、無次元の time factor τ との関係を各の中心軸に対する傾斜面の角度 θ について求めた。(図-6) θ の小さい程、 τ に対する μ_x は大きい値を示しており、自重圧密は迅速である。

(3) さらにこの結果を拡張して、この μ_x を用いて等量の汚泥について θ の異なる場合を比較するため、空隙比を ϵ とし $\phi = (\epsilon_0 - \epsilon) / (1 + \epsilon_0)$ 、 μ_x を用い $\phi = 0.8$ とした場合の体積収縮率を求め、Imhoff 槽、及び Imhoff cone の体積収縮率の τ に対する変化率を算定した(図-11, 12)。この結果はいずれも τ が大きくなると上記変化率は急激に小さくなり、Imhoff cone の方がその度合が1層大きいことを示した。また体積収縮率は Imhoff 槽で $1 - (1 - \phi\mu_x)^2$ 、Imhoff cone で $1 - (1 - \phi\mu_x)^3$ となるが、それぞれ τ との関係を求めた(図-13, 14)。

(4) 体積収縮の比較は50% 収縮に要する時間について検討する方が妥当で、この時の τ_0 と θ との関係は図-16のようになるが、任意角 θ の場合の50% 体積収縮所要時間 T_0 と、 $\theta = 90^\circ$ における T_{90} との無次元の比率をとつて整理すると、 $\theta = 10^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ については、

$$T_{10}/T_{90} : T_{45}/T_{90} : T_{90}/T_{90} = 0.631 a_1/a_3 : 0.894 a_2/a_3 : 1.00$$

となる。ここで a_1, a_2, a_3 は常数である。

(5) Imhoff cone の場合について Imhoff 槽の場合の2軸圧密の μ_x を使用すると、

$$T_{10}/T_{90} : T_{45}/T_{90} : T_{90}/T_{90} = 0.500 b_1/b_3 : 0.821 b_2/b_3 : 1.00$$

となり、Imhoff cone の方が汚泥濃縮は迅速で、ともに θ の小さいほど早く濃縮される。

(6) Imhoff 槽、Imhoff cone とともに地下埋設式とした場合は、最大掘さく深 $(a+L)$ を θ の函数、 $w =$ 相

図-17 Imhoff 槽と Imhoff cone

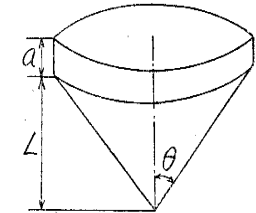
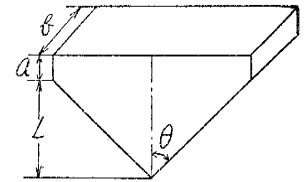
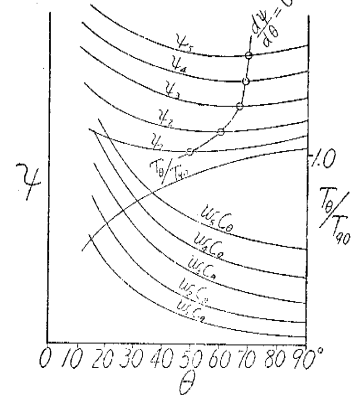


図-18 合理的底部勾配の算定図



対軽率, 掘さくの歩掛 $C_0 = \varphi(a+L)$ とすると, C_0 と, θ の函数で表わされた T_0/T_0 の和 $\psi = wC_0 + T_0/T_0$ を最小とする θ を求めると, 合理的な底部勾配がえられる。

(7) 以上の解は Imhoff 槽内で重力方向の中心部汚泥厚から体積収縮率を算定したが, 厳密には底部勾配が摩擦角以下の場合, 底部摩擦による汚泥の底面付着を考慮する必要がある。われわれは目下, 底面粗度を変へるため, モルタル, 木板などについても実験を継続している。なお式 (5) の境界条件を変えた場合の解も求められたが, これについては, 本理論の実験報告とともに逐次報告したいと考える。

(8) 汚泥の自重圧密は在来の土の圧密理論の概念から考えるとその現象がきわめて迅速で, $t=30$ 分でその大部分の自重圧密を終了する。一方下水汚泥では腐敗を伴うので, 濃縮槽内の汚泥の貯留時間は約 2 時間位で 2 以内とした方がよいといわれている, こうした意味でも本文の考察は実用上有効と思われる。

(9) 本文は下水汚泥について理論を進めてきたが, こうした考え方は自重圧密特性は若干異なるが屎尿に対しても適用できるものであり, 屎尿処理槽への応用も可能である。

結 び

本文は下水処理槽の合理的な底部勾配に関する基礎的研究の一部をなすもので, 汚泥の迅速濃縮を主目的とした場合の合理的な底部勾配を選定するための方法を物理的に論じたものであるが, 次の段階として腐敗などの生化学的な要素を取入れた考察を進めたいと思つている。本文作製にあたり終始懇篤な御指導を賜つた京都大学岩井重久教授に深謝し, 種々の討議をいただいた京都大学土木工学教室の方々, とくに土質力学の面から討議批判された防災研究所赤井浩一助教授に厚く感謝する。

本研究は文部省科学試験研究費 (昭和 31 年度) による研究成果の 1 部である。

参考文献その他

- 1) たとえば, この状態を活性汚泥についてみると, Solid fraction $Soc=0.17$ 位にあたる。またこの点をきめるのに semi-log 紙上縦軸に汚泥厚, 横軸に観測時間 t' をとると, 凝集干渉沈降期間と自重圧密期間はそれぞれ直線で示されるのでこの交点を自重圧密時間の始り $t=0$ とすることができる。
- 2) 川島 普: Sludge 層沈降機構批判とその応用, 水道協会雑誌, 247 号, pp. 9~16, 昭 30-5
- 3) John Finch and Harold Ives: "Settleability Index for Activated Sludges", Sewage and Industrial Wastes, Vol. 22, No. 6, pp. 833~839, (June 1950).
- 4) Alfred C. Ingersoll, Jack E. McKee, Norman H. Brooks: "Fundamental Concepts of Rectangular Settling Tanks", Proceeding American Society of Civil Engineerings, Vol. 81, Separate No. 590 (Jan. 1955).
- 5) 川下研介: 熱伝導論, 応用数学第 21 巻, 河出書房, 昭 16-10
- 6) 小平吉男: 三角級数の応用, 上巻, 岩波書店, 昭 24-11
- 7) 川島 普: 砂ろ過閉塞に関する考察 (第 2 報), 水道協会雑誌, 226 号, p. 41, 昭 28-8
- 8) 川島 普: 下水汚泥物理的性質の要因に関する研究, 水道協会雑誌, 254 号, pp. 31~43, 昭 30-12
- 9) 川島 普: 傾斜面上汚泥層の 2 軸及び 3 軸自重圧密の実験的考察, 土木学会論文集投稿予定

(昭.32.4.3)