

定常・均一ガウス確率場の条件付き地震波動シミュレーション

丸山 収*・星谷 勝**・山口和英***

空間および時間方向の変動を伴う時空間ガウス確率場の条件付きシミュレーション手法について示した。ここでは地震波動伝播現象を対象として、観測点において時系列波形が観測されたという条件のもとで、非観測点における地震波動を、観測値の線形補間式として補間することを試みる。ただし、非観測点が観測点のいずれかに一致するときには、本手法による補間値が既知の観測値と完全に一致することが条件である。本研究では漸化型の線形補間式をもとに、上記目的を達成するための平易な手法を提案している。

Key Words: conditional simulation, kriging, earthquake ground motion, random field, first excursion probability

1. はじめに

本研究では、条件付き確率場の理論¹⁾⁻⁶⁾を、表層地盤における地震波動伝播現象に適用している。ここでは、有限個の観測点における地震動時系列が得られたという条件のもとで、空間上の非観測点における条件付き平均値、条件付き分散値および地震波動時系列の補間値を求める手法を示している。その際、対象とする地盤の波動伝播特性は、相互相関関数あるいは相互スペクトル密度関数により与えられるものとしている。また、本研究で得られた条件付き平均値および条件付き分散値を用いて、空間上の任意点におけるいき値超過確率問題の例題を解いている。

地震波動の時空間特性を把握する研究において、波動伝播現象の確率特性として相互相関関数または相互スペクトル密度関数等のモデルを規定し、その条件を満たすサンプル波形をシミュレートする試み⁷⁾⁻¹¹⁾は数多く行われている。これらの無条件シミュレーションに関する研究では、空間上の観測点における既観測値に関する情報を条件として設定しておらず、シミュレートされた時系列波形は、与えられた確率場の相関特性のみを満足するものとなる。

一方条件付きシミュレーション理論^{1)-7), 12)-21)}は、与えられた確率場の特性を満足し、補間する点が観測点と一致したときには、既知の観測値と完全に一致することが条件となる。したがって、実際に観測された値は確定値として扱われ、観測値が与えられたという条件付きの補間を行うこととなる。対象とする現象の実際に生じた情報を加えることで不確実性が低減し、その推定精度

は無条件の場合に比べて向上することとなる。その結果、特定の地震に対する詳細な表層地盤挙動を把握することが可能となる。

条件付き地震波動シミュレーションの研究において、川上^{12), 13)}は、波形を二重フーリエ級数を用いた時空間関数として表現し、その係数を確率場の特性として与えた相互相関関数を満たすように決定する方法を示している。VanmarckeとFenton^{14), 15)}および亀田と盛川¹⁶⁾⁻¹⁸⁾は、定常・均一ガウス確率場を対象として、時系列波形をフーリエ級数へと展開し、周波数空間領域において与えられた確率場の特性を満たすように補間する手法を提案している。上記2つの研究においてフーリエ係数を求める際に、VanmarckeらはKriging手法¹⁹⁾⁻²¹⁾を適用し、亀田らは解析的な条件付き確率場の理論解を用いている。清野と佐藤²²⁾⁻²³⁾は、空間方向に非均一な性質を有する時空間確率場をバリオグラムによりモデル化し、条件付き確率場のシミュレーションを行っている。

本研究では、星谷^{24), 25)}が用いた確率場の一般座標ベクトル X を、時空間の座標ベクトル (X, t) として表現し、時空間領域で補間するための理論を展開している。基本的な考え方は、観測点の時系列を用いて、最小誤差分散規範にもとづくKriging推定値を求め、推定誤差項を評価することにより、非観測点における条件付き確率場の理論解を求めている。また、非観測点における時系列の補間に関して、推定誤差項の評価を効率的に行うように定式化している⁶⁾。

本研究で示す解析手法は、非定常・非均一の確率場に対しても理論上では適用可能な形に定式化されている。特に地震波形にみられるように振幅と周波数がなだらかに変化する非定常性の確率場には、区間定常性を仮定することにより本研究の直接的な適用が可能である¹¹⁾。加えて不偏最小誤差分散規範を用いていることから、本研究と同様の定式化を行うことにより非ガウス確率場の条件

* 正会員 工博 武蔵工業大学講師 工学部土木工学科
(〒158 世田谷区玉堤 1-28-1)

** 正会員 Ph. D. 武蔵工業大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 東北電力(株)(前武蔵工業大学大学院)

付きシミュレーション理論へと拡張することも可能である。

なお、本研究は亀田と盛川による『地震波動伝播現象の時間および空間的な特長を把握することにより、災害防止、救援および復旧対策の確立を目的とした研究』^{16)~18)}に触発され、同一の目的を達成するための理論と厳密解を平易に誘導したものである。

2. 最小誤差分散にもとづく線形補間

時空間確率場 $W(X, t)$ において、空間方向に均一、時間方向に定常性を仮定する。ここで、対象としている確率場の期待値は、 $E[W(X, t)] = 0$ とする。ここでは、ガウス確率場を対象としており、確率場の特性を規定する相互相関関数は推定されており既知とする。

$$C(d, \tau) = E[W(X, t)W(Y, s)] \dots \dots \dots (1)$$

X および Y は任意空間座標であり、 t および s は任意時間座標である。また、定常・均一の確率場なので、 $\tau = s - t$ 、 $d = Y - X$ である。

(1) 基本補間式

本研究で用いる基本式を、文献(2)から次式で与える。

$$W^*(X, t) = \widehat{W}(X, t) + [W(X, t) - \widehat{W}(X, t)] \dots \dots \dots (2)$$

ここで $W^*(X, t)$ は、空間座標 X および時間 t におけるガウス確率場の推定値を示している。 $\widehat{W}(X, t)$ は、Kriging 推定値である。

式(2)において、確率場 $W(X, t)$ のサンプル実現値 $\underline{W}(X, t)$ は未知の値であるので、推定誤差 $\underline{W}(X, t) - \widehat{W}(X, t)$ の値も未知量となる。しかしながら、推定誤差 $\underline{W}(X, t) - \widehat{W}(X, t)$ の確率的な性質が既知となれば、確率的な条件を満足する推定誤差 $\underline{W}(X, t) - \widehat{W}(X, t)$ をシミュレートすることができる。ここで、確率的な性質とは、ガウス確率場を考えているので推定誤差についての平均値と分散値である。以上が本研究で用いる補間式の基本的な考え方である。

さて、空間上における任意観測点 $X_i (i=1, 2, \dots, N)$ において、サンプル実現値 $\underline{W}(X_i, k)$ が観測されていることを考える。ここで、 $t = k\Delta$; ($k=0, 1, 2, \dots$) であり、 Δ は時間刻みである。

次に非観測点における確率場 $W(X_r, k)$ を推定するための補間式を、式(2)を改めて次式で与える。

$$W^*(X_r, k) = \widehat{W}(X_r, k) + \varepsilon(X_r, k) \dots \dots \dots (3)$$

$$W(X_r, k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=-M}^M \lambda_{ij}(X_r) W(X_i, k+j) \dots \dots \dots (4)$$

$$\varepsilon(X_r, k) = W(X_r, k) - \widehat{W}(X_r, k) \dots \dots \dots (5)$$

$\varepsilon(X_r, k)$ は、推定誤差関数である。

式(3)においてサンプル推定値は、 $\underline{W}^*(X_r, k) = \underline{\widehat{W}}(X_r,$

$k) + \varepsilon(X_r, k)$ となる。式(4)において $\widehat{W}(X_r, k)$ は、観測点における確率場 $W(X_i, k+j)$ 、 $i=1 \sim N$ 、 $j=-M \sim M$ の線形補間式により表される非観測点の確率場である。また式(4)は、時間方向に時刻 $k\Delta$ を中心とした $\pm M\Delta$ 時間の範囲の既観測値による補間式となっている。言い換えれば、 $W(X_r, k)$ および $W(X_r, l)$ において、時間差 $(k-l)\Delta$ が大きくなる場合には、多くの物理現象において相関が低くなることを仮定したことになる¹¹⁾。ここで、 $j=-\infty \sim +\infty$ とすれば、文献(2)における定式化と一致する。

また式(4)は、 $E[\widehat{W}(X_r, k)] = E[W(X_r, k)] = 0$ を満たすので不偏推定式であり、式(5)より $E[\varepsilon(X_r, k)] = 0$ であるので、 $E[W^*(X_r, k)] = 0$ である。

式(4)における未知係数 $\lambda_{ij}(X_r)$ を、推定誤差の自乗期待値が最小となるように決定すると、次式が得られる。

$$C(d_{rm}, -n) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=-M}^M \lambda_{ij}(X_r) C(dim, j-n), \dots \dots \dots (6)$$

$$m=1 \sim N$$

$$n=-M \sim M$$

ここで、 $d_{rm} = X_m - X_r$ 、 $dim = X_m - X_i$

式(6)において、 X_m 、 $m=1 \sim N$ および X_i 、 $i=1 \sim N$ は観測点座標を示し、 X_r は、非観測点座標を示している。式(6)の $\lambda_{ij}(X_r)$ は、不定解となる完全相関の場合を除いて解くことができる。

また、式(6)のもとで、 $\varepsilon(X_r, k)$ の分散は次式で与えられる。

$$\sigma^2 \varepsilon(X_r, k) = C(0, 0) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=-M}^M \lambda_{ij}(X_r) C(d_{ir}, -j) \dots \dots \dots (7)$$

ここで、式(6)が成立つとき $\varepsilon(X_r, k)$ は、次の性質を有する。

$$E[\widehat{W}(X_r, k)\varepsilon(X_r, k)] = 0 \dots \dots \dots (8)$$

$$E[(W(X_i, k+j)\varepsilon(X_r, k))] = 0, i=1 \sim N, j=-M \sim M \dots \dots \dots (9)$$

$$E[\varepsilon(X_r, k)\varepsilon(X_r, l)] = C(0, l-k) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=-M}^M \lambda_{ij}(X_r) C(d_{ri}, l-k-j) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=-M}^M \lambda_{ij}(X_r) C(d_{ri}, k-l-j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=-M}^M \sum_{i'=1}^N \sum_{j'=-M}^M \lambda_{ij}(X_r) \lambda_{i'j'}(X_r) C(d_{ri}, l-k-j'-j) \dots \dots \dots (10)$$

式(8)および式(9)は $\varepsilon(X_r, k)$ の、それぞれ Kriging 推定値 $\widehat{W}(X_r, k)$ および観測点における確率場 $W(X_i, k+j)$ に対する直交性を示し、式(10)は時間方向の相関を示している。

本研究の定式化では、 $W(X, t)$ を線形関係の補間式

として与えている。仮に式(3)を観測点における確率場 $W(Xi, k+j)$ の非線形式として表現すれば、出力としての $W(Xr, k)$ は、非ガウス確率場となり矛盾が生じることとなる。

既に星谷³⁾により確認されているが、ガウス確率場において最小誤差分散規範にもとづく線形補間式は、条件付き確率密度関数の理論式から求められる結果と同一のものとなる。したがって本研究で用いる補間式は、式(4)を定式化する際に用いた仮定のもとで、時空間確率場の条件付き確率密度関数から得られる理論解を与えていることになる。

(2) 条件付き平均値, 条件付き分散値およびいき値超過問題

本研究では補間式が線形であるので、観測点 $Xi, (i=1, 2, \dots, N)$ においてサンプル実現値が得られた場合の条件付き平均値は、式(3)および式(4)から容易に求めることができる。

$$\begin{aligned} & \mu_{W^*(Xr, k)|cond.} \\ & = E[W^*(Xr, k) | W(Xi, j), i=1 \sim N, j=1 \sim NT] \\ & \cong E[W^*(Xr, k) | W(Xi, k+j), i=1 \sim N, j=-M \sim M] \\ & = \sum_{i=1}^N \sum_{j=-M}^M \lambda_{ij}(Xr) W(Xi, k+j) \\ & + E[\varepsilon(Xr, k) | W(Xi, k+j), i=1 \sim N, j=-M \sim M] \\ & = \sum_{i=1}^N \sum_{j=-M}^M \lambda_{ij}(Xr) W(Xi, k+j) \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

ここで、 NT は時間方向における観測数である。また、条件付き分散値は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \sigma^2_{W^*(Xr, k)|cond.} \\ & = E[\varepsilon(Xr, k)^2] \\ & = C(0,0) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=-M}^M \lambda_{ij}(Xr) C(dir, -j) \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

ここで、式(11)より条件付き平均値は、得られた観測値の線形式として与えられ、無条件確率場の期待値 $E[W(X, k)] = 0$ とは異なるものとなっている。さらに式(12)より条件付き分散値は、非観測点と観測点の相関特性により与えられ、観測値には依存していないことが分かる。また当然の帰結であるが、観測値が得られたもとの条件付き分散値は、無条件の場合の分散値 $C(0, 0)$ より減少していることが分かる。

次に、式(11)および式(12)で得られた結果を用いて、文献(18)と同様に、条件付き確率過程 $W(Xr, t)$ が、微小時間 $[t, t+dt]$ においていき値 ζ を上向き (+) または下向き (-) に通過する平均回数 $\nu_{\pm W^*(Xr, k)}(\zeta, t) dt$ を求める^{18), 24)}。この問題は、Shinozuka と Yao²⁴⁾ により与えられた次式を用いて、求めることができる。

$$\begin{aligned} & \nu_{\pm W^*(Xr, k)}(\zeta, t) \\ & = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{W}^*(Xr, k)|cond.}}{\sigma_{W^*(Xr, k)|cond.}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta - \mu_{W^*(Xr, k)|cond.}}{\sigma_{W^*(Xr, k)|cond.}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\cdot \left[\exp \left(-\frac{\delta^2}{2} \right) \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta \left[1 + \text{erf} \left(\pm \frac{\delta}{\sqrt{2}} \right) \right] \right]$$

$$\delta = \frac{\mu_{\dot{W}^*(Xr, k)|cond.}}{\sigma_{\dot{W}^*(Xr, k)|cond.}}$$

$\text{erf}(\cdot)$ は誤差関数である。

ここで、 $W(Xr, t)$ が定常確率ガウス過程である場合には、その微分である $\dot{W}(Xr, t)$ も定常確率ガウス過程となる。この場合、 $W(Xr, t)$ と $\dot{W}(Xr, t)$ は、無相関となるので、式(13)における $\mu_{\dot{W}^*(Xr, k)|cond.}$ および $\sigma^2_{\dot{W}^*(Xr, k)|cond.}$ は、 $\dot{W}(Xi, t)$ に関する相互相関関数および既観測点において $\dot{W}(Xi, t)$ が与えられれば、式(11)および式(12)と同様にして求めることができる。

いき値 ζ を上向きまたは下向きに通過する単位時間当たりの平均回数は次式で表される

$$\begin{aligned} & \nu^a_{W^*(Xr, k)}(\zeta, t) = \nu^+_{W^*(Xr, k)}(\zeta, t) \\ & + \nu^-_{W^*(Xr, k)}(-\zeta, t) \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

したがって、時間 $[0, \tau]$ における最大値の確率分布関数は、いき値通過が独立に生起すると仮定すれば次式で与えられる¹⁸⁾。

$$F_z(\zeta; \tau) = a_0(\zeta) \exp \left[-\int_0^\tau \nu^a_{W^*(Xr, k)}(\zeta, t) dt \right] \dots \dots \dots (15)$$

$$a_0(\zeta) = P[|W(Xi, 0)| \leq |\zeta|] \dots \dots \dots (16)$$

(3) 条件付きサンプル場のシミュレート

条件付きサンプル場をシミュレートするためには、式(3)における $\dot{W}(Xr, k)$ (または $\lambda_{ij}(Xr)$) および $\varepsilon(Xr, k)$ を求めることが必要となる。ここで、式(6)から $\lambda_{ij}(Xr)$ は容易に決定できるが、次に示すような理由で $\varepsilon(Xr, k)$ の評価は困難なものとなる。ここで、 $\varepsilon(Xr, k)$ は、式(8)および式(9)から $W(Xr, k)$ および $W(Xi, k+j)$ に独立であるが、次のような性質がある。

$$E[\dot{W}(Xr, k+c)\varepsilon(Xr, k)] \cong 0, c = -M \sim -1 \dots (17)$$

故に、 $\varepsilon(Xr, k)$ は、式(10)および式(17)を同時に満足するようにシミュレートしなければならず、数値計算において複雑な手続きが必要となる。

そこで、これを避けるために、式(3)の基本式を次のように変形してみる⁶⁾。式(18)は、文献(2)における誤差分散値を用いる漸次拡張方式を基本としている。

$$\begin{aligned} & W^*(Xr, k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=-M}^M \lambda'_{ij}(Xr) W(Xi, k+j) \\ & + \sum_{i=-M}^{-1} \lambda'_{ri}(Xr) W(Xr, k+i) + \delta(Xr, k) \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

式(18)の右辺の第2項および第3項は、非観測点の時間方向の確率場を自己回帰形に表現した形式となっている。後述するが、 $\delta(Xr, k)$ の性質は、ガウス白色雑

音として与えられる。そして、非観測点の確率場 $W^*(Xr, k+l)$ を、 $W(Xr, k+l)$ として、右辺にとり込んだ形式となっているが、サンプル場 $\underline{W}^*(Xr, k+l)$ は、時間方向の逐次シミュレーションにより推定されるので既知の値として扱うことができる。式 (18) によると、非観測点の確率場を漸化的にシミュレートできる。

未知係数 $\lambda'ij(Xr)$ および $\lambda'rl(Xr)$ は、推定誤差の自乗期待値を最小とするように決定すると次式を得る。

式 (16) において、 Cxr および C は確率場 $W(X, k)$ の相互相関関数により規定される。

$$Cxr = C\lambda'(Xr) \dots\dots\dots (19)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \lambda'^T(Xr) &= [\lambda'1r - M(Xr)\lambda'1r - M+1(Xr) \dots \lambda'1r - 1(Xr) \\ &\quad : \lambda'11 - M(Xr) \dots \lambda'110(Xr) \dots \lambda'11M(Xr) : \\ &\quad \lambda'22 - M(Xr) \dots \lambda'220(Xr) \dots \lambda'22M(Xr) : \dots \\ &\quad \lambda'N - M(Xr) \dots \lambda'N0(Xr) \dots \lambda'N - 1M(Xr)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Wk^T &= [W(Xr, k-M)W(Xr, k-M+1) \dots W(Xr, k-1) : \\ &\quad W(X1, k-M) \dots W(X1, k) \dots W(X1, k+M) : \\ &\quad W(X2, k-M) \dots W(X2, k) \dots W(X2, k+M) : \dots \\ &\quad W(XN, k-M) \dots W(XN, k) \dots W(XN, k+M)] \end{aligned}$$

$$Cxr = E[WkW(Xr, k)]$$

$$C = E[WkWk^T]$$

式 (19) のもとで、 $\delta(Xr, k)$ の分散は次式で与えられる。

$$\sigma^2\delta_{(Xr, k)} = C(0, 0) - \lambda'^T(Xr)Cxr \dots\dots\dots (20)$$

また、 $\delta(Xr, k)$ は次の性質を有している。

$$\begin{aligned} E[W(Xi, k+j)\delta(Xr, k)] &= 0, \\ i &= 1 \sim N, j = -M \sim M \dots\dots\dots (21) \\ E[W(Xr, k+l)\delta(Xr, k)] &= 0, l = -M \sim -1 \dots (22) \end{aligned}$$

ここで、式 (21) および式 (22) より、 $\delta(Xr, k)$ は、それぞれ観測点における確率場 $W(Xi, k+j)$ ($i=1 \sim N, j=-M \sim M$) および非観測点における確率場 $W(Xr, k+l)$ ($l=-M \sim -1$) に無相関であることがわかる。したがって、条件付きシミュレーションは次のように行えばよい。第一段階は、式 (19) にもとづいて未知係数 $\lambda'ij(Xr)$ および $\lambda'rl(Xr)$ を求める。次に、平均値 $E[\delta(Xr, k)] = 0$ および式 (20) から分散が $\sigma^2\delta_{(Xr, k)}$ となるような $\underline{\delta}(Xr, k)$ を独立にシミュレートする。 $\underline{\delta}(Xr, k)$ のシミュレーションにおいて、 $j=-\infty \sim +\infty$ および $l=-\infty \sim -1$ とすれば、誤差共分散を用いる漸次拡張方式により、独立にシミュレートすることが理論的に可能²⁾となる。ここで時間方向に膨大な観測値を処理する必要性が生じるような時空間場において、式 (18) を定式化する際の $\pm M\Delta$ 時間の設定条件のもとで、 $\underline{\delta}(Xr, k)$ は独立にシミュレートされることとなる。その結果、 $\delta(Xr, k)$ は $E[\delta(Xr, k)\delta(Xr, l)] = 0(k \neq l)$ となり、 $\pm M\Delta$ 時間の範囲内において、ガウス白色雑音として与

えられる。本研究では詳細な検討は行わないが、 $\pm M\Delta$ は対象とする物理現象の観察と確率モデルの特性を考慮して決定することが重要である。

次に $\underline{W}(Xr, k)$ が得られた後に、時刻 k を $k+1$ として、同様に $\underline{W}(Xr, k+1)$ をシミュレートする。また、複数の非観測点における確率場は、 $\underline{W}(Xr, k)$ について、時間方向のシミュレートが完了したら、 $\underline{W}(Xr, k)$ の時系列を既知観測データとして取り込むことでシミュレートできる。すなわち既知観測点を $i=N+1$ とする。このようにして拡張していくことにより、複数の非観測点における確率場を推定できる^{2), 4)}。

ここで、非観測点 Xr が既観測点 Xm と一致した時には、式 (19) の解は、 $i=m, j=0$ の時、 $\lambda'm0(Xr) = 1$ となり、その他の係数は $\lambda'ij(Xr) = 0$ および $\lambda'rl(Xr) = 0$ となる。したがって、式 (20) は次のようになる。

$$\sigma^2\delta_{(Xr, k)} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

式 (23) より次式を得る。

$$\underline{\delta}(Xr, k) = 0 \dots\dots\dots (24)$$

また、(23) および式 (24) より、式 (18) は次のようになる。

$$\underline{W}^*(Xm, k) = \underline{W}(Xm, k) \dots\dots\dots (25)$$

式 (25) より、非観測点 Xr が任意の既観測点 Xm と一致したときには、推定値 $\underline{W}^*(Xm, k)$ が既知観測値と一致することを示している。

一方、非観測点 Xr が、各観測点から遠方に離れる場合には、 Xr において時間方向の相関特性のみを有することとなり、 $\lambda'ij(Xr) = 0$ となる。したがって、 $W^*(Xr, k) = \varepsilon(Xr, k)$ および $\sigma^2\varepsilon_{(Xr, k)} = C(0, 0)$ となり、 $W^*(Xr, k)$ は無条件のシミュレーションと等価になる。

3. 地震波動伝播現象のシミュレーション

(1) 地震波動伝播の確率モデル

アレー観測記録をもとに地震波動伝播現象を、相互相関関数、相互スペクトル密度関数およびFKスペクトル密度関数の確率モデルへと表現しようとする研究^{26)~29)}は数多く行われている。本研究では、式 (4) または式 (18) を具体的に確定するために相互相関関数を与条件としている。ここでは相互相関関数を、式 (26) ~ 式 (29) に示すように既往の研究成果から得られた相互スペクトル密度関数のフーリエ変換により与えることとする。

$$C(d, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(d, f) \exp(i2\pi f\tau) df \dots\dots\dots (26)$$

一般に、表層地盤の相互スペクトル密度関数は次式のように表される^{2), 25)}。

$$S(d, f) = S(f)\gamma(d, f) \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 $S(f)$ は定常・均一場の代表地点におけるパワー

表-1 モデルの数値諸元

A	α'	κ	b	f_0	$ \vec{c} $
0.736	0.147	5120 m	2.78	1.09	1000(m/s)

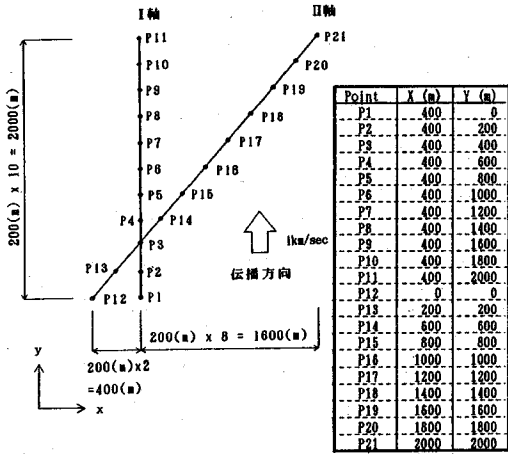


図-1 解析対象

スペクトル密度関数, $\gamma(d, f)$ = コヒーレンス・スペクトルである。

本研究では、パワースペクトル密度関数として後藤と亀田²⁸⁾の提案するモデルを用いる。

$$\begin{aligned}
 {}_A S(f) &= (2\pi f)^2 S(f) = (2\pi f)^2 S(f) \\
 &= (64 / (6\pi f g^5)) f^4 \cdot \exp\{-4|f|/fg\} \dots \dots (28)
 \end{aligned}$$

ここで、 fg = 地盤の卓越振動数, ${}_A S(f)$ = 均一な確率場の代表地点における加速度波形のパワースペクトル密度関数である。また、式(28)において添字 V および D は、それぞれ速度および変位波形のパワースペクトル密度関数を示す。

また、コヒーレンス・スペクトルとしては、Hari-chandran と Vanmarcke の提案するモデル²⁵⁾を採用する。式(29)は、地震動の位相ずれは、波動の伝播速度の方向ベクトル \vec{c} と 2 地点間の距離ベクトル \vec{d} によって異なるという異方性を考慮したモデルである。

$$\begin{aligned}
 \gamma(\vec{d}, f) &= |\gamma(\vec{d}, f)| \cdot \exp(-i2\pi f e) \\
 |\gamma(\vec{d}, f)| &= A \cdot \exp\{-2|\vec{d}|(1-A+\alpha'A)/\alpha'\theta(f)\} \\
 &+ (1-A) \exp\{-2|\vec{d}|(1-A+\alpha'A)/\theta(f)\} \\
 \theta(f) &= \kappa(1+(f/f_0)^b)^{-1/2} \\
 e &= \vec{c} \cdot \vec{d} / |\vec{c}|^2 \\
 &= |\vec{d}|/|\vec{c}| \cos\phi \dots \dots (29)
 \end{aligned}$$

ここで、 \vec{c} = 見かけの伝播速度, $\theta(f)$ = 相関距離指標, e = 位相時間ずれ, ϕ = 平面上で \vec{c} および \vec{d} のなす角である。式(28)および式(29)における定数 $A, \alpha', \kappa, b, f_0$ 等をアレー観測記録などの解析により定めれば、モデ

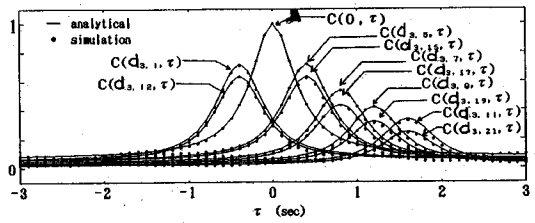


図-2 P3 と他点との相互相関関数および P3 の自己相関関数

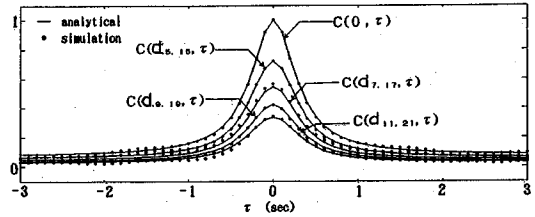


図-3 波動伝播方向と直交する相対位置ベクトルを有する 2 地点間の相互相関関数および P3 の自己相関関数

ルを確定することができるが、本研究では、数値解析に際して $M=40, \Delta=0.1(\text{sec})$ および表-1 に示した数値諸元を用いる⁹⁾。

(2) 数値計算例

解析対象地点の 2 次元空間座標を図-1 に示す。図-1 では、波動伝播方向と同一方向に、 $P1 \sim P11$ を 200 m ごとに配置し、伝播方向と 45° の角度をなす直線上に $P12 \sim P21$ を設けた。ここで本研究では、解析対象は図-1 に示した 21 地点のみを考え、任意地点で観測が行われたとすれば、非観測点は、既観測点以外の設定地点を対象とする。以下では、変位波形を対象としたシミュレーションにより本研究の数値解析による実証を行う。

a) 無条件確率場のシミュレーションによる精度の検証

式(18)において、既観測値 $W(X_i, k+j)$ が与えられなければ、非観測点の確率場 $W(X_r, k)$ は、 $W(X_r, k+l)$ および $\delta(X_r, k)$ により表現される。したがって非観測点の確率場において時間方向の相関特性のみを満足する無条件シミュレーション式となる。ここでは無条件の式(18)をもとに、漸次拡張方式を用いて多地点地震波動の無条件シミュレーションを行い、数値シミュレーションにより得られた結果と与えた確率場の相関特性を比較することで、手法の精度を検証する。

まず図-1 における 21 地点において、21 波の無条件サンプル波形をシミュレートして、1 組のサンプル場を得る。そして全ての地点において再度無条件シミュレーションを行い、これを繰り返すことにより、合計 100 組のサンプル場を求めた。

図-2 および図-3 は、注目した任意地点間の相互相関関数の理論値と 100 回の無条件シミュレーションから

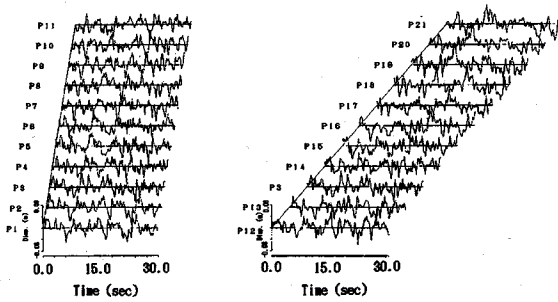


図-4 観測値

得られた相互相関関数を示している。

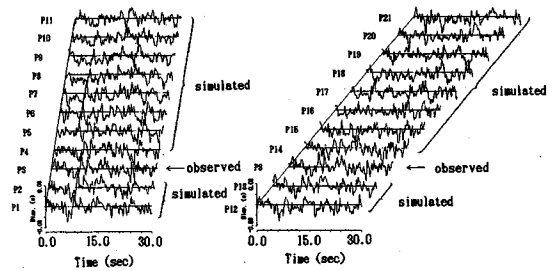
図-2は、 P_3 の自己相関関数および P_3 と任意数地点との相互相関関数を示している。ここで式(29)によると、 P_3 と各観測点の相互相関関数の位相時間ずれを求めることができる。例えば、 P_1 は P_3 に対して $|d_{3,1}|=400(\text{m})$ 、 $\phi=180^\circ$ として与えられることから $e=-0.4(\text{sec})$ となる。また P_{12} については、 $|d_{3,12}|=400\sqrt{2}(\text{m})$ 、 $\phi=225^\circ$ となり、 $e=-0.4(\text{sec})$ となるが、 P_3 との空間方向の相対距離が $|d_{3,1}|$ よりも大きくなるために、 $C(d_{3,12}, 0)$ は $C(d_{3,1}, 0)$ よりも小さな値となっている。 P_5 は、 P_3 を基準にして P_1 と対称な位置関係なので、 $e=0.4(\text{sec})$ となる。ここで、波動がI軸に沿って伝播しているので、I軸およびII軸上の各観測点においてy座標の等しい観測点については、位相差が生じないことが分かる。

図-3は、波動の伝播方向に直交する相対ベクトル成分を有する任意2地点の相互相関関数を示している。この場合任意2地点の波動は同一位相となり、相互相関関数のピーク値は空間方向の相対距離を指標として表現されることとなる。

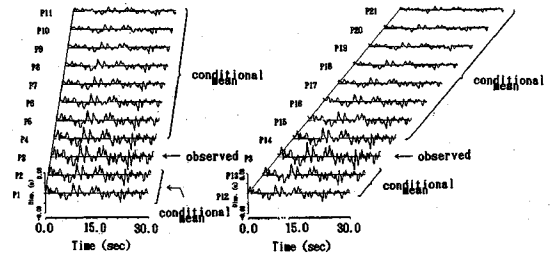
以上、図-2および図-3から、式(18)による無条件シミュレーションによる相互相関関数は、与えた確率場の特性と一致していることが分かる。したがって、文献2)、3)で示した誤差共分散を用いる漸次拡張方式の時空間場での検証および本研究で定式化した式(18)の精度について、数値解析にもとづいた妥当性を示しているものと考えられる。

b) 条件付き確率場のシミュレーション

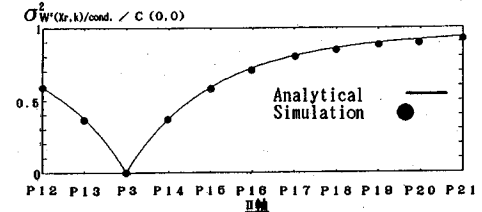
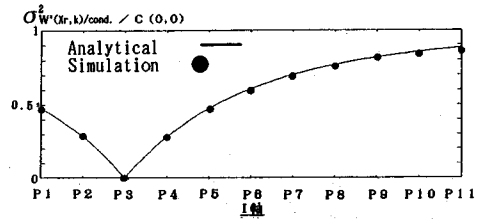
ここでは、観測値が得られたという条件付きのシミュレーションを行う。なお観測値は、表-1の諸元をもとに数値シミュレーションにより求められたものである。例えば、全ての観測点において波動が観測されたとすれば、図-4のように特定地震のサンプル実現値を得ることができる。図-4では、全ての地点で観測がなされていることから、既観測21地点において条件付き平均値は観測された時系列となり、条件付き分散値は0となる。すなわち、全地点における観測がなされているので、21



(a) 条件付きサンプル場



(b) 条件付き平均値



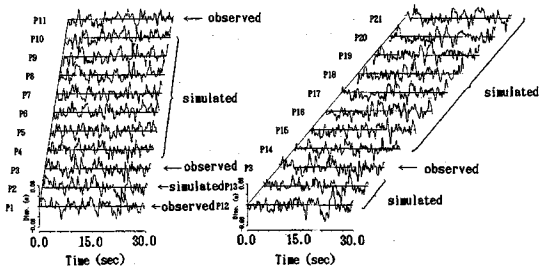
(c) 条件付き分散値

図-5 条件付きサンプル場、条件付き平均値および条件付き分散値(観測地点: P_3)

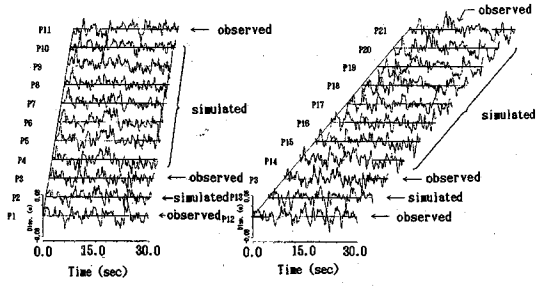
地点における観測値は確定量として与えられる。

さて図-4に示した現象が生じた際に、実際には空間上の1~5地点程度の観測点で測定がなされたという状況を設定してみる。

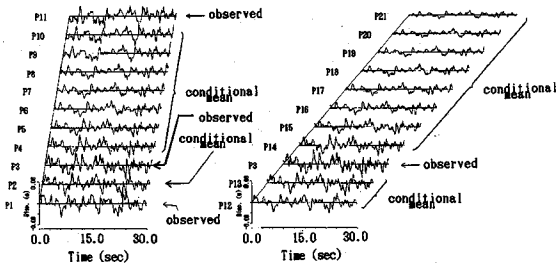
図-5は、 P_3 において観測値が得られた場合の外挿例を示している。図-5(a)は、条件付きサンプル場の1例を示し、図-5(b)および図-5(c)は、それぞれ条件付き平均値および条件付き分散値を示している。図-5(b)では、式(11)による理論解と式(18)を用いて図-5(a)に示すような条件付きサンプル場を100組シミュレートし、それらにもとづいて計算した解を比較しているが、非常に良い対応をしている。故に、重ね書きしたが区別がつかない図となっている。また、



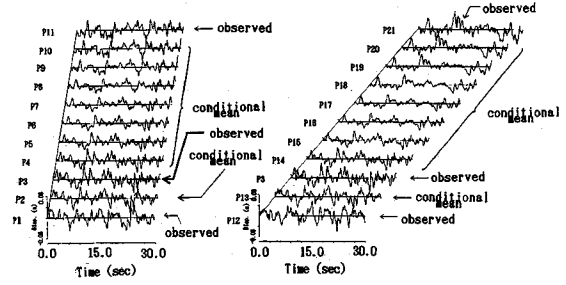
(a) 条件付きサンプル場



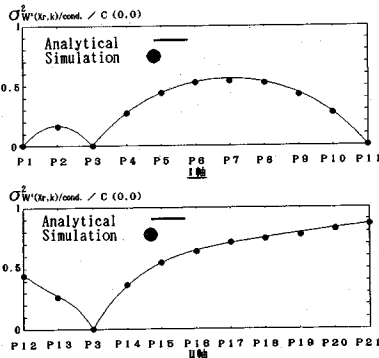
(a) 条件付きサンプル場



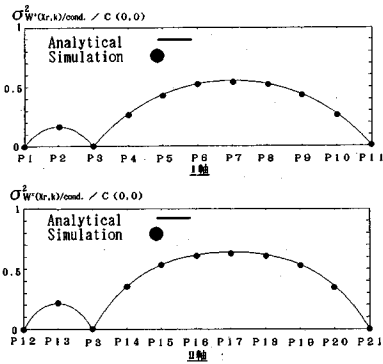
(b) 条件付き平均値



(b) 条件付き平均値



(c) 条件付き分散値



(c) 条件付き分散値

図—6 条件付きサンプル場, 条件付き平均値および条件付き分散値 (観測地点; P1, P3およびP11)

図—7 条件付きサンプル場, 条件付き平均値および条件付き分散値 (観測地点; P1, P3, P11, P12およびP21)

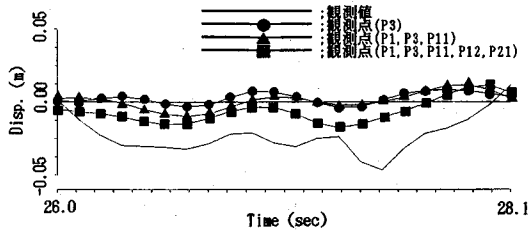
P3における観測値は確定量として与えられるが, 観測点から遠方に離れると条件付き平均値は, 無条件確率場の平均値として与えた $E[W(X, k)] = 0$ へと近づいていくことが分かる。

図—5 (c) では, 条件付き分散値について, 式 (12) による理論解と 100 組の条件付きサンプル場のシミュレートによる解を比較している。ここでは無条件確率場の分散値で正規化している。図—5 (c) において, P3 の条件付き分散値は 0 となり観測値は不確定性を有さない確定値であることを示している。また, 観測点 P3 からの空間的な距離が離れるにしたがって, 数値 1 に近づき無条件の分散値へと近づいていくことが分かる。したがって図—5 (b) および図—5 (c) より, 非観測点が遠方になると, 無条件シミュレーションと等価になって

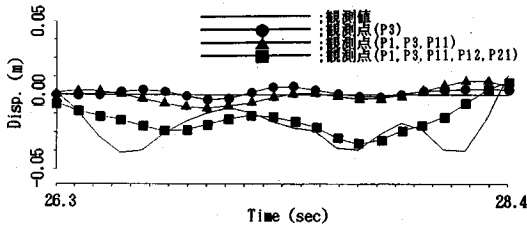
いることが分かる¹⁶⁾。

同様に図—6 では, P1, P3 および P11 において観測値が得られた場合の計算結果を示す。ここでは, 波動伝播方向と同一方向の I 軸上に観測点を設定しており, I 軸に関しては内挿, II 軸に関しては外挿を行っていることとなる。図—6 (b) において, 主に II 軸上の P17 から P21 では, 観測点からの空間的な距離が離れていることから, 条件付き平均値は無条件確率場の平均値 0 へと近づいていることが分かる¹⁶⁾。

図—7 は, 4 観測点 (P1, P3, P11, P12 および P21) で, 観測値が得られた場合であり, 対象平面に対する内挿を行っている。ここで, 図—5, 図—6 および図—7 より, 観測情報の増加により, シミュレートされるサンプル場は, 確定的な現象として与えられる図—4

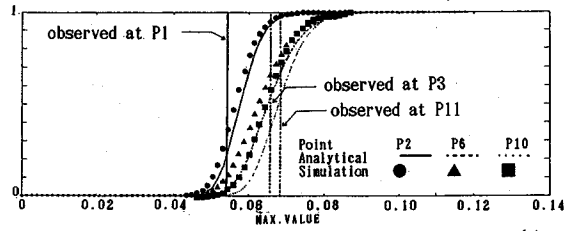


(a) P17

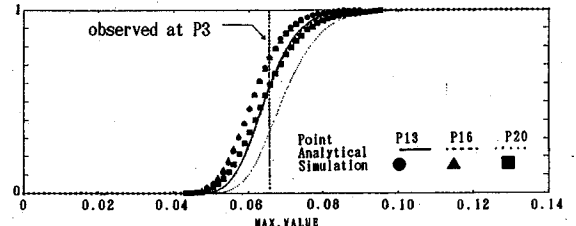


(b) P19

図-8 観測点数の増加による条件付き平均値の改良



(a) I軸



(b) II軸

図-9 いき値超過確率

へと近づいていることが分かる。図-8は、P17およびP19において観測点が増加することで改良される条件付き平均値と実現値を比較している。

以上の結果は、観測することで補間精度が向上し、条件付き確率場の理論により不確実性が低減するという事実を客観的に示している。また補間精度を向上させることは、条件付き分散値を減少させることに対応する。そして定められた数の観測地点を配置する場合には、条件付き分散値（または推定誤差分散）を最小とするような配置をすることが肝要と考える。

c) 初期超過確率

条件付き確率場の理論によると、物理現象の観測情報のもとでの動的信頼性を検討することが可能となる。本研究では、時空間条件付き確率場の理論研究を行ったが、最後に最も簡単な例題として空間上の任意1地点におけるいき値超過確率への適用例を示す¹⁾。ここでは、式(13)に示したShinozukaらの式と100組の条件付きシミュレーションから得られた解を比較している。

図-9は、図-6に対応してP1、P3およびP11において観測値が得られた場合に、空間上の任意点における最大値があるいき値を越える確率を示している。例えば、図-9(a)では、P2、P6およびP10に対して、横軸をいき値、縦軸を超過確率とした確率分布関数を示している。また、既観測点P1、P3およびP11では、いき値超過は確定的な現象であり、超過確率は波線に示すようになる。ここで、Shinozukaらの解は、様々な仮定のもとでの解析解であり、シミュレーション解の方が、精度良く超過確率の評価をしているものと考えられる。

なお、ライフラインの埋設管の信頼性を議論するには、埋設管に沿った複数点の同時いき値超過確率の推定が重

要となる。このためには、同時いき値超過確率理論の開発が必要である。

4. まとめ

本研究は、時空間ガウス確率場の条件付きシミュレーション理論について検討を行った。その際、観測点の時系列を用いて、最小誤差分散規範にもとづくKriging推定値を求め、漸化形式により推定誤差項 $\varepsilon(X_r, k)$ の評価を効率的に行う手法を示し、条件付き平均値および条件付き分散値の理論式を示した。また、本研究で定式化した理論を数値解析により検証した。

今後の課題としては、本研究で定式化した補間式におけるMの設定の仕方、実アレー観測記録への適用および空間的な広がりをもつ構造系の動的信頼性解析を考えている。

本研究は文部省科学研究費重点領域研究(1)、代表：和泉正哲教授(前：東北大学)の援助を受けている。また、亀田弘行教授(京都大学 防災研究所)、盛川仁氏(京都大学大学院)および野田茂助教授(鳥取大学)には、有益な議論をしていただいた。ここに記して謝意を表す。最後に本研究は、丸山および星谷が理論を、山口が数値解析による実証を担当した。

参考文献

- 1) 星谷勝：確率場の条件付きシミュレーションに関する考察，第47回土木学会年次学術講演会J-341, pp. 858~859, 1992.
- 2) 星谷勝：条件付き確率場のシミュレーション理論，土木学会論文集, No. 458/I-22, pp. 113~118, 1993.
- 3) 星谷・桑名：条件付き確率場のシミュレーション理論の検証，土木学会論文集, No. 477/I-25, pp. 93~96, 1993.

- 4) M. Hoshiya : Conditional Simulation of a Stochastic Field, Accepted for Publication in the ICOSSAR '93, 6th Int. Conf. on Structural Safety and Reliability, Innsbruck, Austria, 1993.
- 5) 丸山・星谷：定常均一確率場の条件付き地震波動シミュレーション，第47回土木学会年次学術講演会，I-342, pp.860~861, 1992.
- 6) M. Hoshiya and O. Maruyama : Stochastic Interpolation of Earthquake Wave Propagation, Accepted for Publication in the ICOSSAR '93, 6th Int. Conf. on Structural Safety and Reliability, Innsbruck, Austria, 1993.
- 7) E. Samaras, M. Shinozuka and A. Tsurui : ARMA Representation of Random Processes, Jour. of EM Div., ASCE, Vol.111, No.3, 1985.
- 8) G. Deodatis and M. Shinozuka : An Auto-Regressive Model for Non-Stationary, Stochastic Mechanics, Vol.11, Columbia Univ., pp.227~258, 1987.
- 9) 星谷・石井・栗田：空間・時間分布特性を有する地震動シミュレーション，土木学会論文集，No.386/I-8, pp.359~367, 1987.
- 10) M. Hoshiya, M. Naruyama and M. Kurita : Autoregressive Model of Spatially Propagating Earthquake Ground Motion, Proc. Probabilistic Methods in Civil Engineering, ASCE, Blacksburg, Va., pp.257~260, 1987.
- 11) M. Hoshiya and O. Maruyama : Adaptive Identification of Autoregressive Processes, Jour. EM Div., ASCE, Vol.117, No.7, pp.1442~1454, 1991.
- 12) 川上英二：一地点の観測記録を含む地震波形の時空間関数のシミュレーション，土木学会論文集，No.410/I-8, pp.435~443, 1987.
- 13) 川上・小野：一地点での観測記録を用いた時空間地震波形のシミュレーション，土木学会論文集 No.441/I-18, pp.167~175, 1992.
- 14) E.H. Vanmarcke and G.A. Fenton : Conditioned Simulation of Local Fields of Earthquake Ground Motion, Structural Safety, No.10, pp.247~264, 1991.
- 15) G.A. Fenton : Simulation and Analysis of Random Fields, Princeton University Dept. of Civil Engineering and Operations Research, Ph.D. Thesis, 1990.
- 16) H.Kameda and H.Morikawa : An Interpolating Stochastic Processes for Simulation of Conditional Random Fields, Prob. Engrg. Mech. Vol.7, pp.243~254, 1992.
- 17) 盛川・亀田：条件付確率場の理論構築とモンテカルロ・シミュレーションおよび初期通過問題への応用，第47回土木学会年次学術講演会，I-343, pp.862~863, 1992.
- 18) H. Kameda and H. Morikawa : Conditioned Stochastic Processes for Conditional Random Fields, submitted to ASCE, J. of Engrg. Mech., (dated March 1992).
- 19) D.G. Kridge : Two-Dimensional weighted Moving Averaging Trend Surfaces for Ore Evaluation, Proc. Symposium on Mathematical Statistics and Computer Applications for Ore Evaluation, Johannesburg, South Africa, pp.13~38, 1966.
- 20) G. Matheron : Kriging or Polynomial Interpolation Procedures, Can. Inst. Min. Bull. 60, 1967.
- 21) A.G. Journel : Geostatistics for Conditional Simulation of Ore Bodies, Economic Geology, Vol.69, pp.673~687, 1974.
- 22) 土岐・佐藤・清野・水谷：非均質な確率場を考慮した時空間波形のシミュレーション，第47回土木学会年次学術講演会，I-340, pp.856~857, 1992.
- 23) 清野・土岐・佐藤：非均質な確率場を考慮した不整形地盤上の地震動シミュレーション，第27回土質工学研究発表会，E-8, No.368, pp.991~994, 1992.
- 24) M. Shinozuka and J.T.P. Yao : On the Two-Sided Time-Dependent Barrier Problem, J. of Sound and Vibration, No.6, Vol.1, pp.98~104, 1967.
- 25) R.S. Harichandran and E.H. Vanmarcke : Stochastic Variation of Earthquake Ground Motion in Space and Time, Jour. of EM Div., ASCE, Vol.112, No.2, 1986.
- 26) C.H. Loh ; Analysis of Spatial Characteristics of Seismic Ground Motions SMART-1 Array Data, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.13, 1985.
- 27) F. Yamazaki and T. Türker : Stochastic Modeling of Earthquake Ground Motion Based on Chiba Array Records, Proc. ICASP 6, pp.580~587, 1991.
- 28) H. Goto and H. Kameda : Statical Influence of the Future Earthquake Ground Motion, Proc. 4 WCEE, Chile, Vol.1, A-1, pp.39~54, 1969.
- 29) 川上・佐藤：地盤の相対変位・ひずみの推定結果に及ぼす地震波動の変形の影響，土木学会論文報告集，No.337, pp.37~46, 1983.

(1994.2.15 受付)

CONDITIONAL SIMULATION OF GAUSSIAN STOCHASTIC FIELDS FOR EARTHQUAKE GROUND MOTION

Osamu MARUYAMA, Masaru HOSHIYA and Kazuhide YAMAGUCHI

The objective of this study is to develop a stochastic interpolation method of conditional simulation on a temporal and spatial gaussian field. The major contributions of this paper makes use of simple auto-regressive modeling in the time domain which expresses the very property of spatially and temporally deviating phenomena such as an earthquake wave propagation, and the development of an effective method in terms of computer time.