

構造全体系の固有値解析による骨組部材の合理的な有効座屈長の評価

野上邦栄*・山本一之**

鋼構造物の座屈設計では、有効座屈長の適切な評価が重要になる。この算出法として最近構造全体系の固有値解析を用いて決定することが多くなっているが、構造系によっては不合理な有効座屈長が得られるなど問題を残していることから、これを修正する方法が提案されている。ここでは、この修正法の有効性について数値計算により明らかにするとともに、構造全体系の固有値解析の適用に関する考察を行い、実設計上における有効座屈長の合理的な算出方法について一提案を行っている。

Key Words : effective buckling length, stability design, ultimate strength, frames

1. まえがき

多くの設計基準¹⁾では、鋼骨組構造物を構成する圧縮部材の許容軸圧縮応力度を両端単純支持、一様断面、一様圧縮の単一圧縮部材の弾性座屈強度に基づいた伝統的方法により決定している。したがって、トラス、ラーメン、アーチ、および吊構造を構成する圧縮部材などに関しては、これを適用するにあたって基本の条件に換算しての仮定の長さ、つまり有効座屈長を評価して対処している。この長さは、圧縮強度に直接にしかも大きく関与するため、設計上適切に判断することが極めて重要になる。

ところで、構造物が長大化し、さらに複雑な構造形式が多くなっている現状において、部材の有効座屈長は、拘束状態、荷重さらには剛性分布にも依存することから、一定ではなく、全ての構造に対して一義的に決定することは困難になっている。したがって、従来のように対象部材の曲げ剛性と隣接部材の曲げ剛性、および境界条件の関数として与えられるノモグラフから有効座屈長を決定することでは誤差が大きくなり、設計上対応仕切れない場合が生じている。しかも、そのような構造に対して設計基準の条文にはその解析法について特に規定されていない訳ではない。

したがって、上記座屈に影響する要因を考慮した有効座屈長を算出できるならば、より経済的な安全設計が可能になることは明らかである。そのため、最近では、従来の方法に比べてより厳密とされる構造全体系の固有値解析を適用して、断面の有効座屈長を評価することが行われている²⁾。この方法は、計算機が発達し計算コストも安価になり、ハード的には受け入れられる状況にある

が、設計上種々の問題点を残していることも事実である³⁾⁻⁵⁾。例えば、作用軸圧縮力が小さい部材や変断面部材では有効座屈長が長く算定され、それが感覚的にも不合理と思える長さになる事が良い例である。その結果、構造物の耐荷力を実際の耐荷力よりも過小評価してしまうことになる。

これを修正する対策として、最近、作用軸圧縮力の小さい部材に軸圧縮力を付加する方法^{6),7)} (以後、付加軸力法と呼ぶ)、着目部材単独の座屈に対する高次の固有値を用いる方法^{8),9)} (以後、高次固有値法と呼ぶ) および荷重条件に依存しない方法¹⁰⁾などが提案されている。

ここでは、有効座屈長を改善するこれらの方法の有効性について数値計算により検討するとともに、全体系の固有値解析の適用について考察を加えている。最後に、固有値解析に基づいて有効座屈長を合理的に求める一方法として、荷重条件に独立な、しかも接線剛性行列の軸圧縮力に各断面の限界軸圧縮力を用いた方法を提案している。

2. 座屈設計における有効座屈長

構造物の設計は、一般に微小変位、線形弾性の仮定のもとに行うことから、耐荷力を評価するための非線形の影響や不完全性を考慮するための条項が設けられる。例えば、軸圧縮力と1軸曲げモーメントを受ける部材の面内強度の限界は、一般に次の線形相関式

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_u} + \frac{\sigma_b}{\sigma_y(1-\sigma_c/\sigma_e)} \leq 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

が用いられる。ここに、

σ_c , σ_b : 作用軸圧縮応力度, 作用曲げ応力度

σ_u : 限界軸圧縮強度

σ_y : 降伏応力度

σ_e : オイラー強度

である。

* 工博 東京都立大学助手 工学部土木工学科
(〒192-03 東京都八王子市南大沢1-1)

** 工博 芝浦工業大学教授 工学部土木工学科

限界軸圧縮強度は、幾何学的非線形性や残留応力を含む材料不整を考慮した両端ピン柱の有効座屈長の関数として柱の基準耐荷力曲線から与えられる。また第2項には幾何学的非線形の影響による付加的曲げ応力度が考慮される。この式は、等曲げ、単純支持はり一柱の耐荷力をかなり正確に評価しており、他の荷重条件や境界条件に対する構造物の耐荷力評価の誤差をできるだけ最小になるように付加的な修正係数を導入している。

式(1)において、限界軸圧縮強度とオイラー強度を評価するためには部材の有効座屈長を決定する必要がある。現在、この有効座屈長の決定には、簡略式や図表を用いて決定する方法が設計基準に採用されているが、これは電子計算機が発達していなくハード的に整っていない時代において、構造全体系の固有値計算は困難であり、便宜的に、しかも安全側な評価になるように配慮したものと考えられる。

しかし、このような伝統的方法では一般に安全側過ぎる評価になってしまうことが指摘され、数値計算上のハード面およびソフト面の発展および普及を背景に、構造物の座屈に影響する構造形式、断面変化、拘束条件および荷重条件などを容易に考慮できる構造全体系の固有値解析が最近多用される傾向にある。

この方法は、特に新しい方法ではなく、実構造物の構造全体座屈は、実務上変形の影響を無視した接線剛性を用いた線形固有値解析により決定できることがこれまで多くの書籍に述べられており、また設計基準の解説^{1),11)}にも記述されている。具体的には、最も危険な組み合わせ荷重状態での構造解析(影響線解析)により得られる作用軸圧縮力状態における構造全体系の接線剛性行列に基づく固有値解析から分岐座屈強度を求め、曲げ剛性と座屈強度より各断面の有効座屈長を算出する方法である。現在、この方法には設計上、弾性固有値解析と有効接線弾性係数法¹¹⁾(以後、 E_f 法と呼ぶ。)がある。弾性固有値解析は前述した作用軸圧縮力に依存した構造全体系の弾性分岐座屈強度を求める方法であり、次式

$$|K_E(E_i, I_i) + \kappa K_G(N_i)| = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$l_{ei} = \pi \sqrt{\frac{E_i I_i}{\kappa N_i}} \dots\dots\dots (3)$$

により与えられる。ここに、

- K_E : 微小変位理論における剛性行列
- K_G : 基準状態における幾何剛性行列
- l_{ei} : 要素 i の有効座屈長
- E_i : 要素 i の弾性係数
- I_i : 要素 i の断面2次モーメント
- κ : 最小固有値
- N_i : 要素 i の軸圧縮力

である。

一方、 E_f 法は構造全体系の弾塑性分岐座屈強度を有効接線弾性係数を用いて近似的に求める方法である。ここでは、作用軸圧縮力分布および変断面分布に対応して断面ごとに有効接線弾性係数 E_{fi} を評価して有効座屈長を求める方法⁹⁾(以後、修正 E_f 法と呼ぶ)について述べる。この方法は式(2)、式(3)の E_i を座屈強度 σ_{ei} と柱の基準耐荷力 σ_{cr} が一致するように次式

$$E_{fi} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{ei}} E_i \dots\dots\dots (4)$$

で修正した有効接線弾性係数 E_{fi} に置き換え、繰り返し計算により有効座屈長を算出する方法である。つまり、次式

$$|K_E(E_{fi}, I_i) + \kappa K_G(N_i)| = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$l_{ei} = \pi \sqrt{\frac{E_{fi} I_i}{\kappa N_i}} \dots\dots\dots (6)$$

により各断面の有効座屈長を算出している。

これらの固有値解析から得られる有効座屈長は、断面変化が少なく、軸圧縮力に支配される構造系の場合に妥当な、しかも伝統的方法に比較して有利な値を評価できる。なお、 E_f 法および修正 E_f 法では、有効座屈長と同時に軸圧縮力支配の構造の耐荷力を精度良く得ることができる^{9),20)}。

3. 不合理な有効座屈長の修正

ところで、構造全体系の固有値解析による分岐座屈強度に相当する固有値は、ただ一つ存在するだけで部材ごとにある訳ではない。そのため、式(3)あるいは式(6)に基づいて各断面の有効座屈長を求めることは、各部材の圧縮強度 $N_{cr} = \kappa N_i$ と全体系の分岐座屈強度 P_{cr} を等価に定めること、つまり構造全体系と各部材は同時に座屈することを意味している。現行設計法に用いられている図表、およびノモグラフなどはこの仮定を前提にした近似法である⁹⁾。

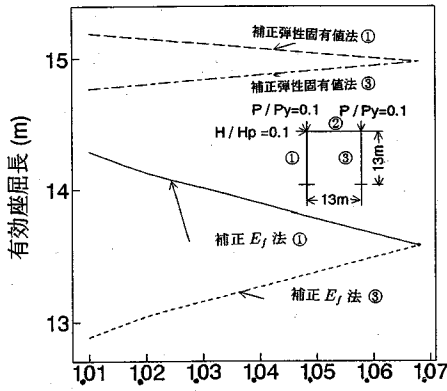
しかし、もし構造全体系の座屈現象において座屈を生じない剛な部材が存在するならば、その断面では一般に設計荷重下における作用軸圧縮力 N_i が小さいにもかかわらず、この小さな座屈強度 κN_i によりあたかも座屈するかのよう極めて長い有効座屈長となり、圧縮強度を過小評価してしまうか、または限界細長比を越えてしまつて設計できなくなってしまうことになる。この事実は、軸圧縮力に支配される構造系でも曲げ剛性が大きい変断面において同様に生じる。

最近、このような微小軸圧縮力やさらに境界条件の影響などにより得られる極端に長い有効座屈長に対する合理的な対策がいくつか提案されている。ここでは、付加軸力法および高次固有値法をとりあげ、簡単なモデルにより数値解析を行い、これらの方法の有効性について考えてみる。

表一 1層ラーメン構造の断面諸元

等断面			変断面			
部材	A	I	部材	A	I	σ_y
①	0.0528	0.003837	①	0.01739	0.000403	24000
②	0.0528	0.003837	②	0.01348	0.000215	24000
③	0.0528	0.003837	③	0.01348	0.000215	24000
			④	0.01348	0.000215	24000
			⑤	0.01739	0.000403	24000

単位: m, t



① 部材の軸力増分係数 α
 図一 有効座屈長と増分係数の関係

(1) 付加軸力法

構造物の耐荷力は、各部材の軸圧縮強度の中で最小軸圧縮強度を有する部材に支配されるから、最適設計された断面部材から構成された構造系は全ての部材の軸圧縮強度が一致した時に最大の耐荷力になる。

したがって、もし不合理な有効座屈長を与える部材が存在する場合、この部材は構造系の座屈に一義的に影響しないことから強度上余裕が存在することになる。このため、この断面の作用軸圧縮力のみを増加して調整し、上記の条件を満足するように修正するのが付加軸力法である。この場合、弾性固有値解析では式(2)式(3)に代わり、

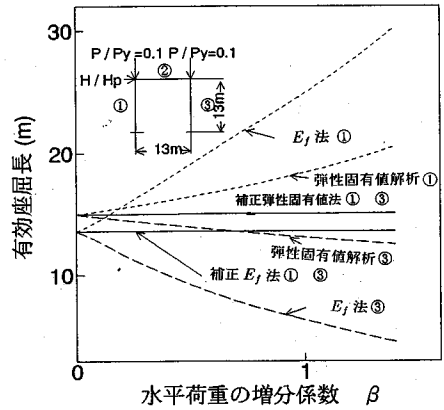
$$|K_E(E_i, I_i) + \bar{\kappa} K_C \bar{N}_i| = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$l_{ei} = \pi \sqrt{\frac{EI_i}{\bar{\kappa} \bar{N}_i}} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、

- $\bar{\kappa}$: α_i 倍の軸圧縮力を導入した場合の最小固有値
- \bar{N}_i : 微小軸圧縮力が作用する断面 i の α_i 倍の軸圧縮力 ($=\alpha_i N_i$)
- α_i : 任意の増分係数 ($\alpha_i \geq 1$)

により、すべての軸圧縮強度が等価になるまで繰り返し計算を行い、不合理な部材の有効座屈長を決定することになる。なお、他の部材の有効座屈長は、修正する前の有効座屈長を用いれば良い。修正 E_f 法の場合は、さら



図二 水平荷重の有効座屈長への影響

に E を断面ごとに E_{fi} に置き換えて繰り返し計算を行えば良い。

いま、具体的計算例として表一¹²⁾に示すような等断面の断面諸元を持つ部材で構成された1層ラーメン構造を取り上げ、付加軸力法により修正される有効座屈長について検討した。荷重は鉛直荷重 P/P_y と水平荷重 $H/H_p = \beta$ の組み合わせ荷重である。ここに、 $H_p = 4M_p/l$, M_p は全塑性モーメント、 l は部材長である。

まず、鉛直荷重 $P/P_y = 0.1$, 水平荷重 $\beta = 0.1$ の荷重状態(図一の挿入図参照)について弾性固有値解析と E_f 法の比較計算を行った。付加軸力により補正しない場合、 E_f 法により求められる柱部材①、③の有効座屈長は、各々 $l_{e1} = 14.3$ m, $l_{e3} = 12.8$ m となり、弾性固有値解析では $l_{e1} = 15.2$ m, $l_{e3} = 14.8$ m となった。いま、水平荷重の影響で部材①に最小軸圧縮力が生じているため、この部材の軸圧縮力を増加させて有効座屈長の修正を行った。

図一は、部材①の有効座屈長と軸力増分係数 α の関係を示している。 E_f 法に付加軸力を適用した方法(以後、補正 E_f 法と呼ぶ)では、 $\alpha = 1.07$ で $l_{e1} = 13.6$ m に収束した。同様に、弾性固有値解析に付加軸力法を適用した場合(以後、補正弾性固有値法と呼ぶ)は $l_{e1} = 15$ m になった。補正弾性固有値法と補正 E_f 法の比較では、補正 E_f 法が短めの有効座屈長を与えることがわかる。なお、部材③の有効座屈長 l_{e3} は補正しない時の値、つまり E_f 法の場合 $l_{e3} = 12.8$ m を、また、弾性固有値解析の場合 $l_{e3} = 14.8$ m をそのまま用いれば良い。

図二は、水平荷重の有効座屈長への影響を比較している。水平荷重 β の増加にともなって部材①の軸圧縮力が減少していくため、弾性固有値解析および E_f 法による部材①の有効座屈長は極めて長くなる。この傾向は、 E_f 法の方が弾性固有値解析より顕著に表れる。なお、 $\beta = 0$, つまり軸圧縮力のみを受ける場合 E_f 法の有効座屈長は弾性固有値解析のそれより低い値を示している。

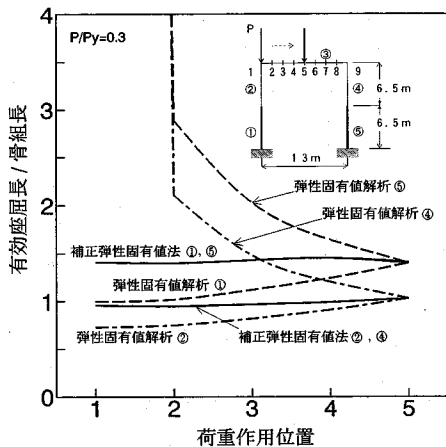


図-3 移動荷重の影響 ($P/P_v=0.3$)

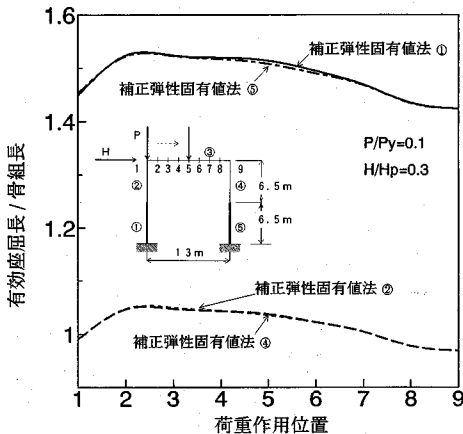


図-4 移動荷重の影響 ($P/P_v=0.1, H/H_p=0.3$)

これに対して、補正 E_f 法は両部材に等価な、しかも β の増加に対してほぼ一定の有効座屈長が得られる。さらに、補正 E_f 法の有効座屈長は補正弾性固有値法のそれと比較して短めになっている。

次に、表-1に示す2段階の変断面柱を有する1層ラーメン構造に $P/P_v=0.3$ の移動荷重が作用する場合(図-3の挿入図参照)の弾性固有値解析に基づく有効座屈長について検討した。その結果をまとめたのが図-3である。この場合、部材④、⑤の軸圧縮力は荷重位置2まではほぼ $N \approx 0$ であるため、弾性固有値解析による有効座屈長は極めて長くなってしまふ。そこで、補正弾性固有値法により部材④、⑤の軸圧縮力を増加させて修正すると、この領域の有効座屈長が $l_{e3} \approx 1.0l, l_{e4} \approx 1.4l$ (l は層間の長さ)に改善される。

また、荷重が中央に移動するにしたがって部材①、⑤の有効座屈長は18.3mから18.8mへ、部材②、④は12.3mから13.3mへと直線的に変化した。各々0.5m、1.0mの違いが生じたのは、荷重位置が中央に移動する

表-2 1層ラーメン構造の断面諸元

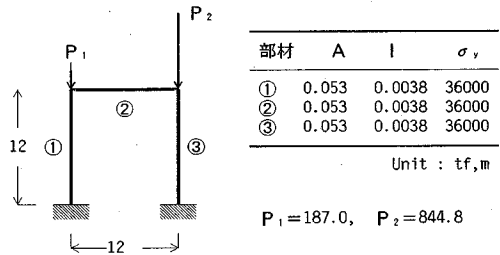


表-3 高次固有値法による有効座屈長(一層ラーメン構造)

	柱①	柱③	柱①	柱①	柱①
座屈モード	1次	3次	4次	5次	
固有値	8.1	46.1	85.6	97.9	
有効座屈長	24.1	10.8	10.1	7.4	7.0
部材長	12.0	12.0	12.0	12.0	12.0

単位 : m

にしたがって曲げモーメントの影響が表れたためである。さらに荷重作用位置が1の場合、部材①と②の軸圧縮力は等しいにも関わらずその有効座屈長が18.3m、12.3mと差が表れたのは、変断面剛性の影響であり、この方法では変断面に充分に対応できないことを示している。

図-4は、 $P/P_v=0.1$ に $H/H_p=0.3$ の水平荷重が作用した時の結果を示したものである。この場合部材①、②と部材④、⑤の軸圧縮力の差が図-3の場合より大きくなるため、各部材の最大有効座屈長の生じる鉛直荷重位置は、水平荷重の作用していない場合の中央から2の位置に移動するとともに、水平荷重の作用により鉛直荷重の作用位置の変化にともなう有効座屈長の変化は大きくなる。

(2) 高次固有値法

これまでの固有値解析では、構造全体系の最小固有値に着目した。これに対して構成する各部材単独の座屈に着目し、高次固有値を用いた方法によって各部材の有効座屈長を求める手法が実際の設計において適用され始めている。この方法は、構造全体系の最小固有値に対して不合理な有効座屈長になる部材が生じた場合、その部材単独の座屈に支配される構造系の高次の固有値を求め、得られる座屈強度 κN をこの部材の保有する限界軸圧縮強度とするとともに、この強度で構造系としても不安定になると考えているのである。ここでは、この方法の有用性についてラーメン構造を取り上げて数値計算を行った。

まず、表-2のような断面諸元を持つ1層ラーメン構造に非対称鉛直荷重 ($P_1=187$ tf, $P_2=844.8$ tf) を受ける場合について弾性固有値解析を行った。表-3は、高次固有値の有効座屈長を含めた計算結果をまとめたもの

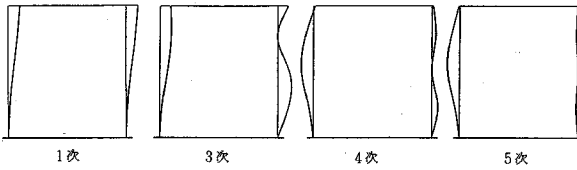


図-5 座屈モード

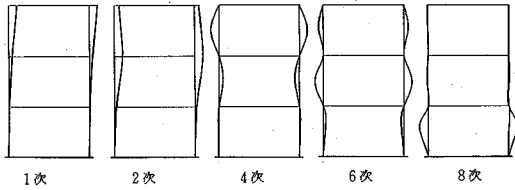


図-6 座屈モード

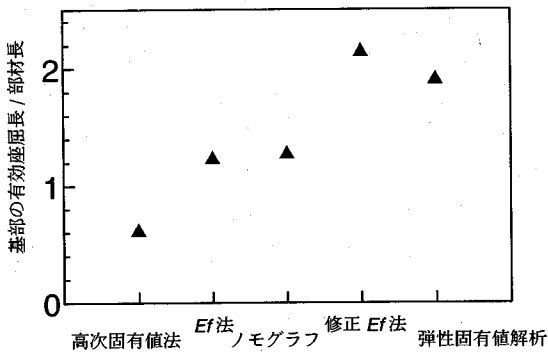


図-7 算出法の違いによる有効座屈長の比較

である。軸圧縮力が部材③に比べて小さい部材①では最小座屈固有値において有効座屈長が $l_e = 24.1$ m と部材長 l の2倍になる。これを不合理な部材と考える時、この部材が座屈する高次固有値を図-5の座屈モードから判定すると3次の固有値になり、有効座屈長が $l_e = 10.1$ m と修正される。さらに単独の座屈としては4次、5次の固有値が存在するが、座屈モードから見てこの場合の有効座屈長を採用するような誤った判断はしないと考えるもののその保証はない。

次に、表-4のような断面諸元を持つ3層ラーメン構造に対称荷重が作用する問題について解析した。固有値解析による有効座屈長および座屈モードをまとめたのが各々表-5、図-6である。この構造は一樣軸圧縮力 ($N_c = 9000$ tf) に支配される系ではあるが変断面のため、曲げ剛性の大きい基部の有効座屈長が $l_e = 64$ m とかなり長くなる。この着目部材のみが座屈する高次座屈モードを調べると8次の固有値になる。この時の有効座屈長は $l_e = 20.7$ m と修正されるので有効座屈長係数は $l_e/l = 0.613$ となり、両端固定部材の $l_e/l = 0.5$ から一端ヒンジの $l_e/l = 0.7$ の中間値を示していることがわかる。

さらに、基部の有効座屈長係数について、現在有効座

表-4 3層ラーメン構造の断面諸元

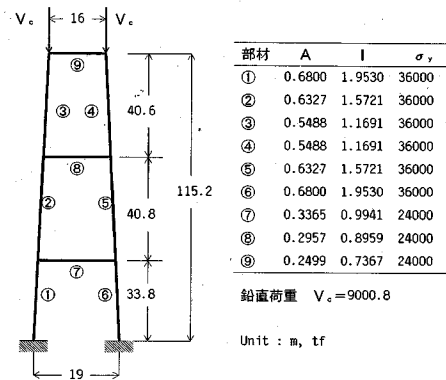


表-5 高次固有値法による有効座屈長 (3層ラーメン構造)

	頂部	中央部	基部	基部
座屈モード		1次		8次
固有値		10.9		104.6
有効座屈長	49.6	57.5	64.1	20.7
部材長	40.6	40.8	33.8	33.8

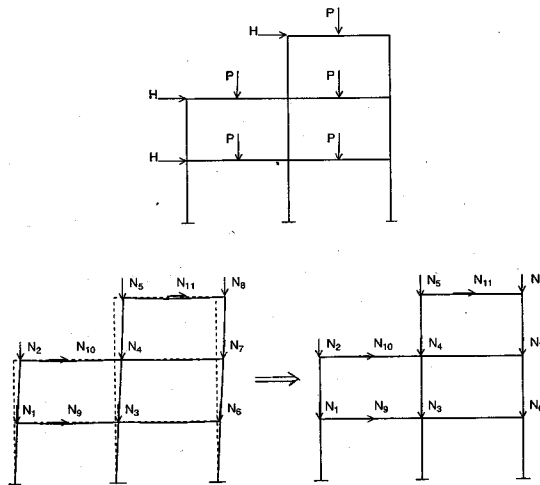
単位 : m

屈長算法として広く用いられているノモグラフ、 E_f 法、および修正 E_f 法の結果を含めて比較したのが図-7である。従来法に比べて高次固有値法による有効座屈長係数は極めて短くなり設計上有利になる。

(3) 修正法の問題点

不合理な有効座屈長に対する対策法である付加軸力法および高次固有値法は、構造全体系の弾性固有値解析により得られる長めの有効座屈長を妥当な値に修正するとともに、構造部材の限界軸圧縮力を精度よく評価できることが期待される。また、高次固有値法は収束計算を必要とせず、簡易に求めることができる利点を有している。しかし、これらの方法には、幾つかの問題点があることも明らかになった。それらをまとめると次のようになる。

1. 付加軸力法は、複雑な構造の場合、 α の増分係数の刻み幅の設定に注意が必要であり、収束計算に大きく影響する。また、微小軸圧縮力を受ける部材の軸圧縮力のみを増加させることにより、得られる固有値が低下するため、他の部材の軸圧縮強度に変化が現れることになる。実構造物ではその影響は小さいものと考えられるが、構造全体系をみて適切に付加軸圧縮力を判断する必要がある。
2. また、変断面部材から構成される構造系では、軸圧縮力に支配されていても、その大きな変断面での有効座屈長が極めて長くなる場合、付加軸力法によって改善することは困難である。
3. 高次固有値法では、軸圧縮力分布、剛性分布の複



図—8 固有値解析と軸圧縮力の関係

複雑な構造系における着目部材を支配する座屈モードの判定が困難である。実際には、設計技術者の主観による視覚的判断に委ねられている。

4. 両修正法には、用いる荷重の問題が共通に存在する。固有値解析における基準状態の幾何剛性行列 K_G に用いる軸圧縮力は、通常設計荷重を作用させて得られる作用軸圧縮力を適用しているが、座屈を支配する最悪荷重の組み合わせの設定が明確になっていない。
5. この修正によって得られる有効座屈長が、ノモグラフ、 E_f 法の有効座屈長に比較して本当に妥当な圧縮強度を評価しているかは明確でなく、さらにその結果としての構造物の耐荷力は、常に安全側の設計を可能にする保証が無い。そのため、実際には別途弾塑性有限変位解析や実験などにより確認が必要となる。

4. 固有値解析の適用に関する考察

(1) 設計荷重下における座屈前の変形

一般に、座屈荷重さらには有効座屈長は、図—8 から明らかなように設計荷重下での構造物のすべての部材に生じる作用軸圧縮力を求め、式(2)の線形化された固有値解析により完全系の分岐問題として、この作用軸圧縮力がそのままの分布状態で比例的に増えたとして不安定となる倍率 κ を求めている。これは、土木構造物は対称構造が多いこと、設計荷重下においては座屈前の変形が小さく、接線剛性行列の非線形性は解析結果に大きな影響を及ぼさないことから無視できるものとしていることなどに起因している。

しかし、実際には複雑な非対称・変断面構造も増えており、また設計荷重は組み合わせ荷重状態であり、その荷重状態および構造形式によっては座屈前に無視できな

いほどの大きな変位成分が発生する可能性がある。また、座屈点近傍における断面力の分布は、設計荷重下の断面力の κ 倍の分布とは異なると考えるのが自然であり、大きな曲げモーメントが存在する場合、部材の終局状態において軸圧縮力はその限界値に達しえない。

したがって、式(1)の左辺が最も大きくなる設計荷重下で固有値解析を行う場合、厳密には座屈前の変位成分を含む非線形接線剛性方程式を用いて固有値を求める必要がある。実際には、釣合方程式にもこの変位成分が含まれているため、非線形接線剛性方程式に基づく固有値解析を行うには、 n 自由度からなる外力 F_i を受ける構造系の場合、その変位 δ_i における次式の非線形釣合方程式

$$F = f(\delta) \dots \dots \dots (9)$$

ここに、

$$F = \{F_i\}, \delta = \{\delta_i\}, i = 1, \dots, n$$

により座屈前の変形様式である基準状態の釣合を求め、この釣合点で、非線形座屈特性式

$$\left| K_i = \frac{\partial f(\delta)}{\partial \delta} \right| = 0 \dots \dots \dots (10)$$

を満足するかどうかを決定することになる¹³⁾。

(2) 部材強度と全体強度

実際の断面設計では、仮定断面の設定時における有効座屈長に対して、設計断面が整合しない場合、仮定断面に立ち戻って設計は行わず、仮定断面時の有効座屈長を基礎に、設計断面が照査式を満足するように作り替えるのが通例のようである⁹⁾。この時、設計技術者のこれまでの経験と実績が生かされている。

構造全体系の座屈に支配的影響をする部材については、全体系の圧縮強度と等しいという意味で適切な部材強度を定めていることになるが、その影響の小さい部材、あるいは拘束部材や補剛材は、軸圧縮力が小さく有効座屈長を大きく評価し、結果として過大設計になる。

また、座屈強度を決定しているものが個々の部材ではなく構造全体系としての総合的影響であるとする、構造全体系の分岐座屈強度が低すぎるという結果がでた場合、設計が困難になる。つまり、前者は部材強度より全体座屈強度が大きくなる断面設計であり、後者は部材強度が全体座屈強度より大きくなる断面設計をした場合に生じる問題である^{14), 15)}。

これは、常に構造全体系の座屈安定性と部材のそれとが等価になるように断面の最適設計が可能かどうかを問われていることになる。実務上、設計技術者による断面決定は、実績データに基づく経験的な面が多く、その決定要因が座屈安定性ばかりでなく、耐風・耐震設計や製作・架設なども関係するため、前述のように全体座屈と部材座屈が同時に生じるような断面を常に設計することは困難であろう。しかし、前章の両修正法は全体系と部

材が同時に座屈するように最適設計された構造、あるいは部材座屈に支配される構造であることを前提に、妥当な有効座屈長に修正しようとしているのである。

(3) 安定照査式

鋼構造物の設計は、第2章でも述べたように設計荷重の作用状態のもとでは有限変位の影響が大きく表れることは少なく、一般には微小変位理論による骨組構造解析を用いて安全性照査を行えば良いとする部材単位的设计法である。したがって、部材強度への非線形性の影響は応力度照査式および安定照査式の強度側に考慮されている。

本来、はり一柱の耐荷力を厳密に求めるべきであるが、大層手間のかかる計算を必要とし、実用的には不便であることから、これまでの多くの研究成果を基に精度の高い経験式が、この安全性照査式に用いられている。式(1)の1軸曲げを受けるはり一柱の相関式はその例であり、通常厳密解と比較してかなり安全側になっているが、実用的には充分なものが見なされている。ただし、この相関式で与えられる強度限界と部材を組み合わせて作られる構造全体の終局強度との間には、直接的な関係はない。

この照査式は、純圧縮状態と純曲げ状態の極端な荷重状態に対する強度限界を含んだ強度相関式であり、当然はり一柱の最悪荷重状態に対して常に安全側の評価を与える必要がある。したがって、曲げモーメントが零の場合の相関式は、純圧縮状態の耐荷力を評価していなければならないため、許容軸圧縮応力度 σ_{ca} は軸圧縮力のみを受ける部材に対する有効座屈長によって評価している。

構造全体系の固有値解析は、この純圧縮状態に対する有効座屈長を評価するために適用されているのである。

5. 合理的な有効座屈長の算定法

前章までの数値計算ならびに構造全体系の固有値解析に関する考察の結果、次のような点が明らかになった。

- 1) 構造全体系の固有値解析から得られる最小固有値を用いて式(3)あるいは式(6)から有効座屈長を評価することは、物理的には構造全体系と各部材が同時に座屈する条件を前提にしていることを意味する。つまり部材強度と全体座屈強度が等価になる構造を対象にしているのである。
- 2) 現行設計法は、部材単位の照査体系となっており、したがって、安定照査式により与えられる強度限界と構造全体系としての終局強度との間には、直接的な関係はない。しかも、構造全体系の固有値解析は、安定照査式における純圧縮状態に対する有効座屈長を算出するために適用されているのである。
- 3) 付加軸力法は、設計荷重下における断面力に対し

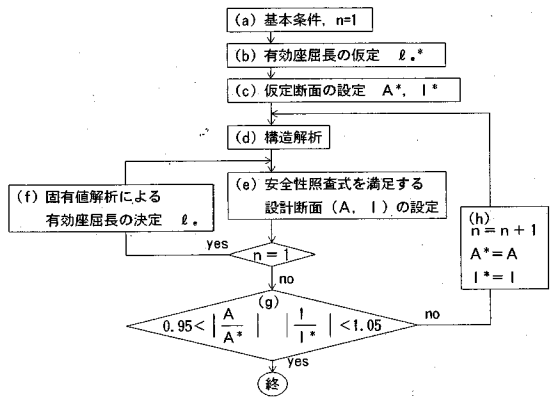


図9 設計断面の決定手順

て、各部材が同等の安全率を有する強度を保有した断面になっていることを条件に付加軸力を導入し、有効座屈長を修正している。一方、高次固有値法は、不合理な有効座屈長となる部材に対して、その部材が単独で座屈するような高次の固有値によって修正している。これは、その断面の持っている限界強度を振り所に修正していることになり、その物理的意味合いは付加軸力と同等である。

したがって、実務上合理的な設計を行うことを可能にする信頼の高い有効座屈長を算出するには、固有値解析における幾何剛性行列 $K_G(N_i)$ の軸圧縮力 N_i と断面の保有する限界軸圧縮力を整合させることが重要になる。このことは、最悪荷重条件下における作用軸圧縮力分布を用いるのではなく、限界軸圧縮力分布に等価となるように調整された軸圧縮力を固有値計算に用いる必要があることを意味している。

ところで、一般に断面の設計は、図9の手順により行われている。つまり、(a) 自然条件、荷重条件、構造形式などの基本条件の基、まず (b) 有効座屈長 l_e^* を設定する。(c) 断面 (A^*, I^*) を仮定し、この断面の基で構造解析により断面力を求め、応力度照査式(例えば $\sigma_c + \sigma_b \approx \sigma_{cal}$, σ_{cal} : 局部座屈応力度)、安定照査式(例えば $\sigma_c / \sigma_{ca} + \sigma_b / \sigma_{ba} / (1 - \sigma_c / \sigma_{ca}) \approx 1.0$, σ_{ca} , σ_{ba} , σ_{ca} : 許容軸圧縮応力度, 許容曲げ応力度, 許容座屈応力度)を満足するように断面を修正して仮定断面 (A^*, I^*) を決定する。この時、有効座屈長 l_e^* は (b) の仮定値に固定している。(d) この断面に対する設計荷重下での微小変位解析を行い、(e) 応力度照査式、安定照査式を満足するように断面を変更して設計断面 (A, I) を設定する。(f) 第1ループ ($n=1$) において、(d) から得られた作用軸圧縮力を用いた接線剛性行列に基づく固有値解析を行い、その最小固有値により有効座屈長 l_e を決定する。この時、構造系や荷重状態によっては $l_e \neq l_e^*$ となり、第3章で述べたような不合理な有効座屈長

が得られる問題点を生じる。次に、決定された有効座屈長の基で (e) のステップに戻り、同様にして設計断面を決定し、(g) 前回の断面に対する今回の断面の比が ±5% の許容誤差内に収まるように、設計断面を修正して (d) ステップに戻り繰り返し計算することになる。第2ループ以後の断面変更において、有効座屈長は l_e をそのまま用いている。

以上のような固有値解析、および実際の断面設計の手順に関する考察を背景に、ここでは、構造系の主要部材の有効座屈長を求める実用的方法として、荷重条件に独立な各断面の保有する限界軸圧縮力を用いる方法を提案したい。この方法は、付加軸力法や高次固有値法の修正版と位置づけることができる。また、現在の実務設計において図-9 の設計手順を一部修正するのみで良く、容易に適用できる方法である。

具体的算出方法は、弾性固有値解析の場合

1. 設計断面 (A_i, I_i) を設定する。
2. 仮定断面を設定する時に目標とした有効座屈長を基礎にした各部材の有効座屈長 l_{ei}^* 、あるいはノモグラフなどの近似公式による各部材の有効座屈長 l_{ei}^* を設定する。
3. 得られた有効座屈長を基に柱の基準耐荷力曲線より限界軸圧縮力を算出する。
4. 各断面の限界軸圧縮力を用いて幾何剛性行列 K_G を作成する。
5. 式 (2) の線形固有値解析を行い、最小固有値 κ を求める。
6. 式 (3) により有効座屈長 l_{ei} を求める。

の計算手順に従う。なお、修正 E_f 法を用いる場合には、第5、第6ステップには各々式 (5) 式 (6) を用いることになり、式 (4) で与えられる有効接線弾性係数が収束するまで第5ステップに戻り繰り返し計算を行えば良い。

なお、本提案法の概念と同様な立場にたった算出方法¹⁰⁾が依田らによって提案されている。この方法は、設計断面が与えられた状態において、上記第2ステップから第6ステップの計算を行う荷重に依存しない算出法であり、そこでは本手順の第3ステップの軸圧縮力にオイラー荷重値 ($N_i = EI_i \pi^2 / l_{ei}^{*2}$) を用いており、第5ステップの最小固有値が $\kappa \approx 1$ を満たさない時、第2ステップの有効座屈長 l_{ei}^* を修正して収束するまで繰り返し計算を要求している。

いま、表-4 の3層ラーメン構造モデルを取り上げて、この提案法および文献10) の方法と弾性固有値解析、修正 E_f 法の比較計算を行った。

表-6 は、各算出法で用いる軸圧縮力、有効座屈長および固有値をまとめたものである。表-5 に示したように一様分布の作用軸圧縮力 ($N_i = 9000$ tf) を用いた弾

表-6 提案法と従来法による有効座屈長の比較

修正 E_f 法			
	頂部	中央部	基部
部材長	40.6	40.8	33.8
作用軸圧縮力	9000.8	9000.8	9000.8
有効座屈長	41.2	70.3	88.8
固有値	1.99		

提案法 (修正 E_f 法の場合)			
	頂部	中央部	基部
ノモグラフ	52.0	59.6	42.9
限界軸圧縮力	9745.6	11026.1	13126.7
有効座屈長	39.1	46.3	41.0
固有値	1.66		

提案法 (弾性固有値解析の場合)			
	頂部	中央部	基部
有効座屈長	50.2	54.7	55.9
固有値	9.87		

文献10)の方法 (弾性固有値解析の場合)			
	頂部	中央部	基部
ノモグラフ	52.0	59.6	42.9
オイラー軸力	89611.6	91729.0	219941.2
有効座屈長	51.6	59.1	42.6
固有値	1.02		

単位: m, tf

性固有値解析では基部で $l_{e1} = 64.1$ m、また修正 E_f 法では、基部で $l_{e1} = 88.8$ m、中央部で $l_{e2} = 70.3$ m と極めて長めの有効座屈長が得られた。これに対して提案の方法では、限界軸圧縮力を用いることにより弾性固有値解析の場合 $l_{e1} = 55.9$ m、修正 E_f 法の場合 $l_{e1} = 41.0$ m、 $l_{e2} = 46.3$ m と改善され、有効座屈長の不合理性がなくなることがわかる。

また、文献10)の方法では、最小固有値が $\kappa = 1.02$ になり、得られた有効座屈長はノモグラフによる有効座屈長とほぼ等しい値になった。つまり、この構造モデルの場合、ノモグラフによる有効座屈長は良い近似値であることがわかる。一方、この方法を修正 E_f 法に適用した場合には、作用軸圧縮力を用いた場合より長めの有効座屈長を与える。これは、軸圧縮力に極めて大きなオイラー軸力を導入しているため、有効接線弾性係数がより低下し、得られる固有値がかなり小さな値になるためである。したがって、 $\kappa \approx 1$ の条件を満足しないため、適切なオイラー軸力の修正が必要になるが、そのための有効座屈長は試行錯誤により修正することになる。

全体的な傾向としては、修正 E_f 法を用いた本提案法が他の方法に比べて短かめ有効座屈長を与えており、伝統的方法に比べても有利な有効座屈長評価が可能になっている。また、弾性固有値解析の場合に対する文献

10)の方法と本提案法の比較では、基部において文献10)の方法が短い値を示しているが、全体として両方法は同等の評価を示している。

さらに、本提案法は、文献10)の方法と違い、固有値計算の軸圧縮力にこれまでの実績データや経験に基づいた精度の良い有効座屈長 l_e^* やノモグラフを適用することにより収束計算を必要とせず、しかも有用な有効座屈長を得ることができる。

6. ま と め

実務設計において、有効座屈長を求めるのに用いられている弾性固有値解析、 E_f 法および修正 E_f 法、さらにそれらを補正する方法についてその特徴と問題点を整理し、構造全体系の固有値解析の適用に関する考察を行った。

現在多用されている構造全体系の固有値解析は、設計荷重下での作用軸圧縮力を用いていることに問題があり、設計断面の保有する限界軸圧縮力を適用した新しい提案法では有効座屈長の不合理性が改善され、しかも短めの有効座屈長を得ることができた。特に、修正 E_f 法を用いた本提案法は、最も合理的な有効座屈長の算出法であると言える。

限界軸圧縮力を求めるにあたっては、数値計算例ではノモグラフの近似式により算出したが、変断面の持つ厳密な限界軸圧縮分布が得られればより正しい有効座屈長を決定できるのは当然であるが、有効座屈長を用いて柱の耐荷力を評価する概念自体がかなり近似的なものであることを考慮するならば許容されるであろう。なお、実設計では、これまでの実績データから想定した有効座屈長を用いる方法がより有効である。

本提案法により得られる有効座屈長の妥当性の判断は、今後多くの実構造レベルの数値計算例において現行法との比較から明らかにしていく必要がある。また、曲げ材、2次部材と考えると良い部材などには、全体系の固有値解析の結果に関わらず、構造形式に対応した有効座屈長の適切な限界値(例えば骨組長)を設定し、頭切りすることにより十分安全な設計が可能になるものと考え²⁾。ただし、この限界値については、構造系によって変わることが予想されることから具体的な数値については今後の検討課題としたい。

一方、付加軸力法や高次固有値法は、現在作用軸圧縮力の下で得られた不合理な有効座屈長を修正するために用いられている方法であることから、前述した問題点を克服することにより有効な修正法になるものと考えられ、これからの研究成果が期待される。

ところで、許容軸圧縮応力度はそれが座屈荷重ではなく、耐荷力を基にして定められることから、有効座屈長を用いることは、厳密には圧縮部材の正しい扱い方では

ない。実際の設計に現れる各種の条件下にある柱の耐荷力を容易に求めることが可能になれば、より合理的な設計法が期待できる。その意味で、最近従来¹⁰⁾の設計法にとらわれない新しい設計法に関する研究成果が報告され、活発な議論が行われていることは注目される¹⁰⁾⁻²⁰⁾。

謝辞：本研究を進めるにあたり、鋼橋技術研究会設計部会(部長：依田照彦教授・早稲田大学)Bグループ(グループ長：井浦雅司助教授・東京電機大学)の委員の方々には、多くのご助言をいただいた。ここに感謝する次第です。

参 考 文 献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，1990. 2.
- 2) 西野文雄・三木千寿・鈴木篤：道路橋示方書・鋼橋編改訂の背景と運用，13章ラーメン構造，橋梁と基礎，pp. 82~85, 1981. 10.
- 3) 野上邦栄：ラーメン柱の有効座屈長算出法に関する一考察，構造工学論文集，No. 39A, pp. 199~210, 1993. 3.
- 4) 宇佐美勉：鋼骨組構造物の座屈設計法の問題点，SGST 拡大研究論文集，No. 1, pp. 107~120, 1992. 11.
- 5) 倉方慶夫・西野文雄・長谷川彰夫：骨組構造物における現行の座屈設計法の問題点(上，下)，橋梁と基礎，pp. 19~27, 1992. 2, pp. 41~46, 1992. 3.
- 6) F. Nishino and W. Attia : A proposal for in-plane stability design of steel framed structure, Proc. of JSCE, pp. 1~10, 1992. 1.
- 7) 野上邦栄・高瀬弘・山本一之：微小軸圧縮力を受ける骨組部材の有効座屈長に関する一考察，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第16巻，pp. 385~390, 1992. 7.
- 8) 尾下里治・吉田昭仁：高次の座屈固有値を用いた有効座屈長の決定方法の提案，土木学会第47回年次学術講演会，pp. 248~249, 1992. 9.
- 9) 野上邦栄・河野明寛・山本一之：高次固有値法によって算出される有効座屈長に関する一考察，土木学会第48回年次学術講演会，pp. 180~181, 1993. 9.
- 10) 依田照彦・広瀬剛：平面骨組構造の有効座屈長に関する一考察，土木学会第20回関東支部技術研究発表会，pp. 48~49, 1993. 3.
- 11) 本州四国連絡橋公団：吊橋主塔設計要領・同解説，1988. 2.
- 12) 宇佐美勉・垣内辰雄・水野巨彦：鋼ラーメン構造物の合理的設計式の一提案，土木学会論文集，No. 404/I-11, pp. 331~340, 1989. 4.
- 13) 後藤芳顕：有限変位解析と設計，土木学会鋼構造委員会終局強度研究小委員会成果報告書(案)，1993. 9.
- 14) 崎元達郎：報告書の内容について，土木学会鋼構造委員会終局強度研究小委員会終局強度設計分科会資料，1991. 9.
- 15) 伊藤文人：構造安定論，第5章，技報堂出版，1989. 2.
- 16) 野上邦栄：鋼ラーメン柱の実用的座屈設計法の一提案，土木学会論文集，No. 459/I-22, pp. 159~162, 1993. 1.
- 17) 倉方慶夫・西野文雄・長谷川彰夫・梶田順一：鋼骨組構造物の座屈設計法に対する提案，土木学会論文集，

No. 459/I-22, pp. 73~82, 1993. 1.

- 18) 三輪清貴・崎元達郎・山尾敏孝：局部座屈の影響を考慮した箱型断面鋼骨組の終局強度解析法，土木学会第48回年次学術講演会，pp. 202~203, 1993. 9.
- 19) 織田博孝・宇佐美勉・尾島一博：弾性2次解析法を用いた変断面骨組の座屈設計における等価初期たわみの算定法，土木学会第48回年次学術講演会，pp. 150~151, 1993. 9.
- 20) 長井正嗣・浅野浩一：斜張橋主桁耐荷力評価に着目した E_r 法の適用と設計法に関する一考察，土木学会第48回年次学術講演会，pp. 254~255, 1993. 9.

(1993. 7. 15 受付)

ON THE EFFECTIVE BUCKLING LENGTH OF FRAMED COLUMNS USING EIGENVALUE ANALYSIS

Kunieo NOGAMI and Kazuyuki YAMAMOTO

Appropriate evaluation of effective length is important in the buckling design of steel structures. Recently, eigenvalue analyses of overall structures have frequently been used as a method for the calculation of effective length. However, depending on the type of structure, the effective length obtained by this method does not produce rational values, and this sometimes presents a problem. Some methods have been proposed for the modification of this analysis. In this study, the effectiveness of this modified procedure is evaluated by means of numerical evaluations. Discussion on the application of eigenvalue analyses to an overall structure is presented, and a rational method for the calculation of effective length in practical designing is proposed.