

# 弾性2次解析による変断面骨組の座屈設計法

織田博孝\*・宇佐美勉\*\*

本研究では、有効座屈長の概念を用いない新しい骨組の座屈設計法を示している。ここで示す弾性2次解析を用いた設計法では、あらゆる初期不整に等価な初期たわみの決定が最も重要な問題である。本研究では、曲率に着目した新しい等価初期たわみ算定式を求め、これを変断面骨組にシステマチックに適用する方法を提案している。そして例題により、提案法の妥当性を検証している。

**Key Words :** stability design, second-order analysis, frames, ultimate strength, design code

## 1. ま え が き

現行の道路橋示方書<sup>1)</sup>(以下、道示と略称する)による鋼骨組構造物の座屈設計法は、有効座屈長の概念を用いた方法である。有効座屈長の決定で任意の構造物に適用できる汎用的な方法として線形座屈固有値解析(以下、座屈解析と呼ぶ)を用いた方法<sup>2)</sup>、それに非弾性効果を考慮したE<sub>f</sub>法<sup>3)</sup>がある。しかし、これらの方法によると、微小軸圧縮力部材の有効座屈長が過大に評価されて設計不能になってしまうことがある<sup>4)</sup>。特に斜張橋の設計では必ずと言ってよいほど、このことが問題となり設計者を悩ませている。今後、多くの長大斜張橋が計画されており、合理的な骨組の座屈設計法の開発は急務であると考えられる。

そのため、最近、上述の問題に対する骨組の座屈設計法の改善のための提案がなされている。改善の方向は3つに分類できる。第1に有効座屈長をより合理的に算定しようとするもので、微小軸圧縮力部材に付加軸力を加える方法<sup>5)</sup>、線形化有限変位解析から算定する方法<sup>6)</sup>、高次の固有値を用いる方法<sup>7)</sup>がある。第2に、有効座屈長を用いずに座屈解析から直接、非弾性座屈荷重を求める方法で、等価接線係数法<sup>8)</sup>、 $\xi$ 法<sup>9)</sup>がある。第3にP- $\Delta$ 効果を構造解析の中に導入する方法で、長方形ラーメン構造に適用可能な、いわゆるP- $\Delta$ 法<sup>10),11)</sup>と任意の骨組に適用可能な弾性2次解析法<sup>12),13)</sup>(線形化有限変位解析)がある。この論文では、有効座屈長の概念を用いない弾性2次解析を用いた設計手法の可能性を検討する。

現行の骨組の耐荷力照査式では、構造解析は弾性1次解析(微小変位解析)を前提とし、材料非線形および幾何学的非線形の影響は有効座屈長の概念を用いた部材安

定照査式および断面強度照査式に含まれている。これに対して弾性2次解析を用いる方法は、次の概念に基づく。すなわち、骨組の耐荷力は基本的に座屈問題であるから幾何学的非線形の影響を考慮する必要がある。これを構造解析の中で合理的に評価することにより部材安定照査式は不要になり、有効座屈長を含まない断面強度照査のみによって耐荷力が評価できるというものである。ここで、局所的な断面のみに対する影響は断面強度式で評価される。しかし、安定照査式に含まれていた初期たわみや残留応力などの初期不整が、剛性を初期から低下させ骨組を不安定にする影響は、構造解析(弾性2次解析)の中で考慮するのが合理的である。このために、あらゆる初期不整に等価な初期たわみを導入する必要がある。

したがって、弾性2次解析を用いた骨組の座屈設計法では等価初期たわみ量とそのモードの決定が、解析精度を左右する最も重要な問題である。等価初期たわみの提案は長方形ラーメン構造に対してEurocode 3<sup>14)</sup>、中井・酒造<sup>11)</sup>、宇佐美<sup>15)</sup>があり、単一部材に対してEurocode 3、野上<sup>16)</sup>がある。これらは適用対象が限られており、任意の変断面骨組構造物に適用するには十分ではない。そこで本論文では、過去に提案されている代表的な等価初期たわみ算定式を再検討し、新たな算定式を提案する。さらに、それを任意の変断面骨組にシステマチックに適用する方法も提案し、2~3の例により妥当性を検証する。最後に現行設計法との比較により、現行設計法の問題点、提案法の合理性を明らかにする。

検証のための精密解を求めるため、弾塑性有限変位解析を行うが、それには汎用有限要素法プログラムMARC<sup>19)</sup>を用いる。

## 2. 等 価 初 期 た わ み

### (1) 等価初期たわみ量算定式

既存の等価初期たわみ量算定式を、単一のはり-柱部材

\* 正会員 工修 名古屋大学助手 工学部土木工学科  
(〒464-01 名古屋市千種区不老町)

\*\* 正会員 D.Sc. 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

の等価初期たわみとの比較により再検討し、新たな算定式を提案する。

これまでに提案された代表的な等価初期たわみ量  $f_0$  および初期部材回転角  $\Psi_0$  の算定式としては、以下のようなものがある<sup>14),15)</sup>。

$$f_0 = \alpha (\bar{\lambda} - 0.2) \cdot \frac{W_c}{A_c} \dots\dots\dots (1)$$

$$\Psi_0 = \frac{1}{200} r_1 r_2 \dots\dots\dots (2)$$

$$\Psi_0 = 0.25 \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} (\bar{\lambda} - 0.2) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $f_0$  : 部材中央の初期たわみ、 $W_c$  : 部材中央での断面係数、 $A_c$  : 部材中央での断面積、 $\alpha$  : 柱の耐荷力曲線を決めるための初期不整係数、 $r_1, r_2$  : 層数または層の柱本数などによって決まる係数、 $\sigma_y$  : 降伏応力、 $E$  : ヤング係数である。細長比パラメータ  $\bar{\lambda}$  は次式で表される。

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{1}{\pi} \frac{l_e}{r} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \\ &= \sqrt{\frac{N_y}{N_E}} = \sqrt{\frac{N_y}{\Lambda \cdot N}} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここに、 $l_e$  : 有効座屈長、 $r$  : 断面2次半径、 $N_y$  : 部材の降伏軸力、 $N_E$  : 部材のオイラー座屈軸力、 $\Lambda$  : 座屈解析から得られる固有値、 $N$  : 部材軸力である。座屈解析から  $\bar{\lambda}$  を求める場合は式(4)の第2式を用いる。

Eurocode 3<sup>14)</sup>において、式(1)は節点移動のない部材に用いる初期たわみ算定式である。式(2)は長方形ラーメンに適用可能な  $P-\Delta$ 法に用いる初期部材回転角の算定式であり、節点移動のある骨組に用いる。式(3)は宇佐美<sup>15)</sup>による提案式で、箱形断面部材から成る1層1径間のラーメンに対して、有効座屈長法と  $P-\Delta$ 法で求める強度がほぼ一致する条件から得られた算定式である。

式(1)~(3)は形の異なった表現式であり、相互の物理的關係は明らかにされていない。そこで、軸方向圧縮力  $P$  と等モーメント  $M_0$  を受ける両端単純支持の等断面はり一柱(図-1の挿図参照)の等価初期たわみを求め、式(1)~(3)との関係を検討する。この等価初期たわみは、耐荷力に対する十分な精度が確認されている部材強度相関式と弾性2次解析法による強度が一致する条件から、以下の手順で求める。

まず、弾性2次解析法に用いる断面強度としては、次の初期降伏条件式を考える。

$$\frac{N}{N_y} + \frac{M}{M_y} = 1 \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $N, M$  : それぞれ断面に作用する軸力、曲げモーメント、 $N_y, M_y$  : それぞれ断面の降伏軸力、降伏曲げモーメントである。次に、式(6)で表される初期たわみのある両端単純支持のはり一柱を考える。

$$y_0 = f_0 \sin \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $f_0$  : 部材中央の初期たわみ、 $l$  : 部材長である。

これの弾性2次解析法による解として、はり一柱の微分方程式を解くことにより、支間中央の最大曲げモーメント  $M_{max}$  は次式で得られる。

$$\frac{M_{max}}{M_y} = \frac{1}{1 - N/N_E} \frac{N}{N_y} \eta + \frac{M_0}{M_y} \sec \frac{k l}{2} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $k = \sqrt{N/EI}$  である。 $\eta$  は無次元化された初期たわみで式(8)で表される。

$$\eta = f_0 \frac{A}{W} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $A$  : 断面積、 $W$  : 断面係数である。

さらに、式(2),(3)との比較のために、図-2の挿図に示すような部材回転角に変換しておく。この変換により(例えば片持柱の)部材回転角を両端単純支持柱のたわみと対比させることができる。

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \frac{2f_0}{l} = \frac{2W}{lA} \eta = \frac{2}{l} \frac{r^2}{e} \eta \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \frac{r}{e} \frac{\eta}{\bar{\lambda}} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに、 $e$  : 中立軸から圧縮縁までの距離である。そこで無次元化された部材回転角  $\phi$  を次式で定義する。

$$\phi = \frac{\eta}{\bar{\lambda}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} \frac{e}{r} \Psi_0 \dots\dots\dots (10)$$

したがって弾性2次解析法による、はり一柱の強度は軸力  $N (= P)$  および式(7)で表される最大曲げモーメントを式(5)に代入して、次式で得られる。

$$\frac{N}{N_y} + \frac{N/N_y}{1 - N/N_E} \eta + \frac{M_0}{M_y} \sec \frac{k l}{2} = 1 \dots\dots\dots (11)$$

一方、はり一柱の部材強度相関式は次式で表される。

$$\frac{N}{N_u} + \frac{1}{1 - N/N_E} \frac{M_0}{M_y} = 1 \dots\dots\dots (12)$$

ここに  $N_u$  は部材の軸圧縮強度で、断面区分に応じた柱の耐荷力曲線によって求められる。部材の曲げ強度は、平面骨組構造物を対象に現行の道示と同レベルの設計をするために  $M_y$  としている。

以上により、式(11)と式(12)で決まる  $P (= N)$  と  $M_0$  が一致するように等価初期たわみ  $\eta$ 、あるいは等価初期部材回転角  $\phi$  を定める。ここで、式(11)の第3項と式(12)の第2項はほぼ一致することから、式(11)の第1,2項を合わせたものが式(12)の第1項に等しくなるように  $\eta$  が決められる。そこで、本論文の議論を厳密にするため、式(11)の第2項を  $P-\delta$ 効果、第3項の  $\sec(kl/2)$  を  $P-\Delta$ 効果と呼ぶ。一般的には、節点移動のない部材に発生する2次曲げモーメントを  $P-\delta$ 効果、節点移動のある骨組に発生する2次曲げモーメントを  $P-\Delta$ 効果と言っている<sup>10)</sup>。あるいは式(12)の第2項の  $1/(1 - N/N_E)$  を  $P-\delta$ 効果、式(12)では考慮していないが、水平移動座屈に対する  $M_0$  の修正係数 0.85 を  $P-\Delta$ 効果<sup>10)</sup> としている。しかし、弾性2次解析法では解析の中に2種類の2

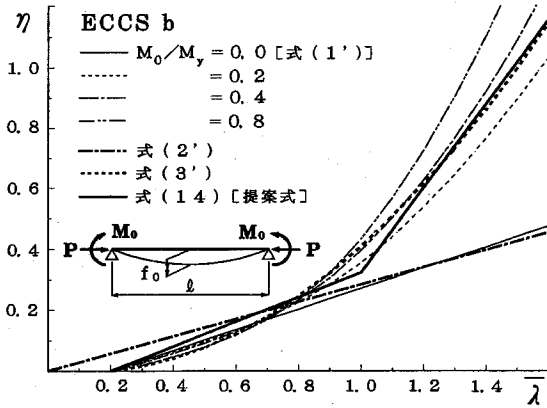


図-1 等価初期たわみ

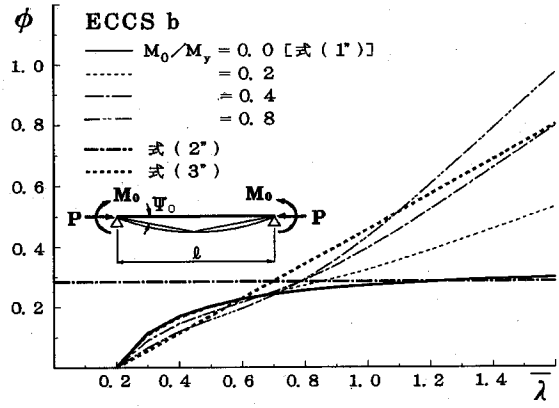


図-2 等価初期部材回転角

次曲げモーメントは同時に考慮されるので、上記のような定義は適当ではない。そこで軸圧縮強度に対する初期不整の影響を  $P-\delta$  効果、幾何学的非線形による初期曲げモーメントの増幅を  $P-\Delta$  効果と定義する。したがって、等価初期たわみは本論文で定義する  $P-\delta$  効果を導入する効果があり、この点が以下の議論で重要となる。

部材の軸圧縮強度は箱形断面柱に対する ECCS-b 曲線を用い、 $M_0/M_1$  をパラメータとして等断面はり一柱に対する無次元量  $\eta, \phi$  を求める。比較のために式 (1) ~ (3) を  $\eta, \phi$  の表現式に変換すると、式 (1') ~ (3') および式 (1'') ~ (3'') のようになる。変換の際、ECCS-b 曲線に対して式 (1) の係数は  $\alpha = 0.34$ 、式 (2) の係数は  $r_1 = r_2 = 1$  の基準値とする。また箱形断面を仮定して、 $r/e \approx 2/\sqrt{6}$  とし、鋼種は SS400 で  $\sigma_y = 235\text{MPa}$ 、 $E = 206\text{GPa}$  としている。

$$\begin{aligned} \eta &= 0.34(\bar{\lambda} - 0.2) && \dots\dots\dots (1') \\ \eta &= 0.285\bar{\lambda} && \dots\dots\dots (2') \\ \eta &= 0.481\bar{\lambda}(\bar{\lambda} - 0.2) && \dots\dots\dots (3') \\ \phi &= 0.34(1.0 - 0.2/\bar{\lambda}) && \dots\dots\dots (1'') \\ \phi &= 0.285 && \dots\dots\dots (2'') \\ \phi &= 0.481(\bar{\lambda} - 0.2) && \dots\dots\dots (3'') \end{aligned}$$

等断面はり一柱の  $\eta, \phi$  と式 (1) ~ (3) の比較を図-1 および図-2 に示す。  $\bar{\lambda} > 1.0$  の範囲で、 $M_0$  が大きくなるほど等価初期たわみが大きく算定されているのは、初期曲げモーメント  $M_0$  に対する  $P-\Delta$  効果がかかなり大きくなり、見かけ上、軸圧縮強度が低減するためである。ただし、節 (2) で述べるように  $M_0$  が大きい場合は初期たわみが強度評価に与える影響は余り大きくない。

図-1 に示すように  $M_0 = 0$  の初期たわみは式 (1) に一致する。なぜならば、式 (1') は Perry-Robertson 型公式で表された柱の耐力式初期不整に関する項そのものだからである。図-1 から判断すると  $\bar{\lambda}$  が約 0.8 以上で曲げが作用する場合には等価初期たわみを小さく評価する。

式 (1') を部材回転角として表すと、式 (1'') に示す  $\bar{\lambda}$  の反比例関数となり、図-2 に示されるように  $\bar{\lambda}$  が大きい場合にはほぼ一定値として近似できることがわかる。 $M_0 = 0$  の場合である式 (1'') を  $\bar{\lambda}$  が 0.2 ~ 1.6 の範囲で最小 2 乗近似した一定の部材回転角  $\psi_0$  は  $1/240$  ( $\phi = 0.237$ ) となり、式 (2'') に近いことがわかる。式 (2'') は  $\phi$  の表現において  $\bar{\lambda}$  を含まない単純な式であるが、 $\eta$  の表現である図-1 から判断すると式 (2') は、曲げが作用する場合には、およそ  $0.6 < \bar{\lambda} < 0.9$  の間のみ妥当な初期たわみとなる。

一方、図-2 から曲げモーメントが作用する場合も含めて  $\phi$  は良い相関で直線近似できることがわかる。式 (3'') は、この最小 2 乗近似で定めた直線とほぼ一致し、曲げが作用する場合にも妥当な等価初期たわみを与える最も合理的な式と考えられる。式 (3) は ECCS-b 曲線を前提としているため、他の柱耐力曲線を用いる場合、式 (3') の係数を決め直す必要がある。式 (3') の一般形は次式のように表される。

$$\eta = \alpha_0 \bar{\lambda} (\bar{\lambda} - 0.2) \dots\dots\dots (13)$$

そこで、最小 2 乗法により  $\alpha_0$  を他の ECCS 柱耐力曲線について定め、図示したものが図-3 である。式 (13) は  $\alpha_0, d$  曲線の場合に多少相関が良くないことがわかる。

そこで、本論文では等価初期たわみ算定式として次式を提案する。

$$\begin{aligned} \eta &= \alpha_1 (\bar{\lambda} - 0.2) && (0.2 \leq \bar{\lambda} \leq 1.0) \\ &= \alpha_2 (\bar{\lambda} - \beta) && (1.0 < \bar{\lambda}) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

上式の係数  $\alpha_1, \alpha_2$ 、及び  $\beta$  を、同様に最小 2 乗法によって定める。式 (14) を式 (13) と合わせて図-3 に示しているが、式 (14) はどの場合にも相関がよい。また、道示<sup>1)</sup>、福本・伊藤<sup>17), 18)</sup>、Eurocode 3<sup>14)</sup> の柱の耐力曲線に対して定めた式 (14) の係数の値を表-1 に示す。

提案する等価初期たわみ算定式が  $\bar{\lambda}$ 、すなわち有効座屈長の関数になっていることは矛盾に感じられるかもし

表-1 等価初期たわみ算定式の係数

	道示 <sup>1)</sup>	福本・伊藤 <sup>17),18)</sup>			Eurocode 3 <sup>14)</sup>				
		Group1	Group2	Group3	$a_0$	$a$	$b$	$c$	$d$
$\alpha_1$	0.539	0.072	0.260	0.515	0.125	0.236	0.404	0.582	0.884
$\alpha_2$	1.337	1.165	1.281	1.475	1.194	1.265	1.338	1.529	1.784
$\beta$	0.678	0.951	0.838	0.721	0.916	0.851	0.767	0.696	0.604

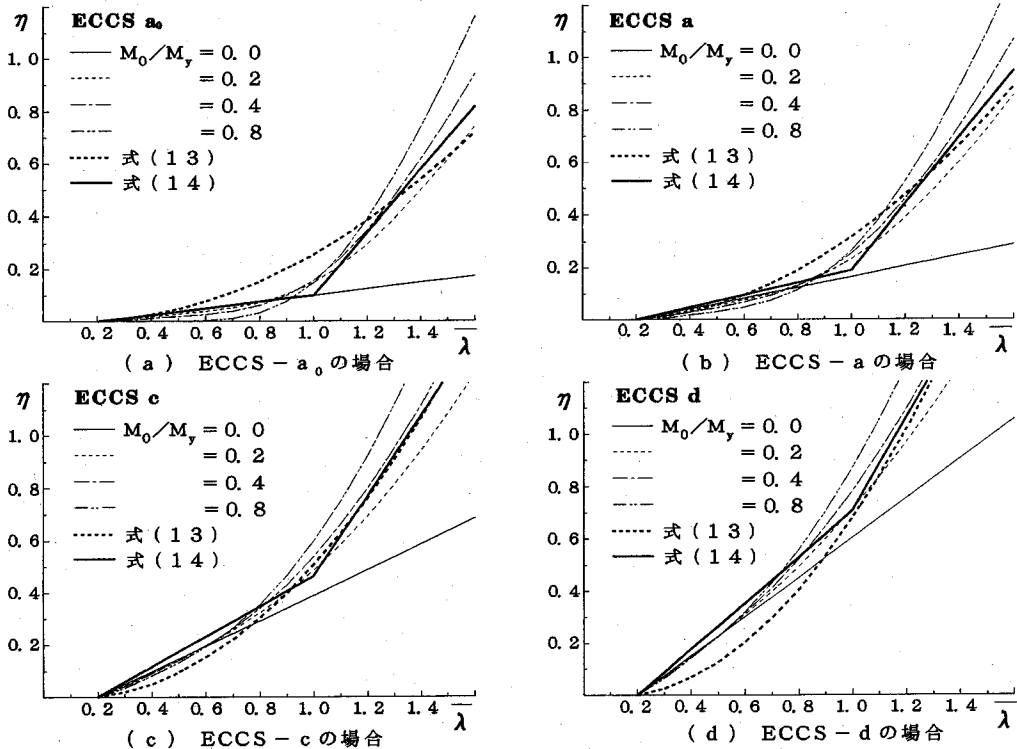


図-3 ECCS の各柱曲線に対する等価初期たわみ式の比較

れない。しかし、本論文で提案する設計法は照査式に有効座屈長を用いない方法であり、あらゆる条件の構造物の等価初期たわみを精度よく算定するためには、 $\bar{\lambda}$ を用いるのが良いと考えられる。複数の部材から成る一般の骨組の等価初期たわみの算定法は節(3)で詳しく述べるが、構造物の代表的な $\bar{\lambda}$ を用いるので、微小軸圧縮部材の $\bar{\lambda}$ が過大となることは問題とはならない。

(2) 等価初期たわみモード

弾性2次解析法で用いる等価初期たわみモードとしてどのようなモードを用いればよいか問題となる。例えば、斜張橋の桁では座屈解析から得られる座屈モードと弾塑性有限変位解析から得られる崩壊モードが極端に異なることがある<sup>4)</sup>。座屈解析では軸力のみを考えるのに対して、この場合の弾塑性有限変位解析では曲げモーメントが支配的な影響を及ぼしているためである。そこで

軸力と曲げモーメントの比に着目し、座屈モードと曲げ崩壊モードの2つを初期たわみモードとして弾性2次解析および弾塑性有限変位解析を行い、どちらを等価初期たわみモードとするべきかを検討する。

簡単のため、解析のモデルとしては図-4に示すような変断面2径間連続はり一柱を用いる。断面形などの諸元は3章(1)節で後述する。変断面とした理由は以下のとおりである。弾性2次解析法では順次、塑性ヒンジが形成される崩壊メカニズムは追跡できない。そこで中間支点と両支間中央とが同時に崩壊するように各荷重の組合せケースに応じて現行設計法で断面を予め設計した。 $Q = 0$ のケースでは一定の軸力のみ作用するので等断面となる。このモデルの座屈モードと曲げ崩壊モードは図-4に示している。両モードの初期たわみの大きさは、弾塑性有限変位解析では $l/1000$  ( $l$ : 支間長)とし、弾性

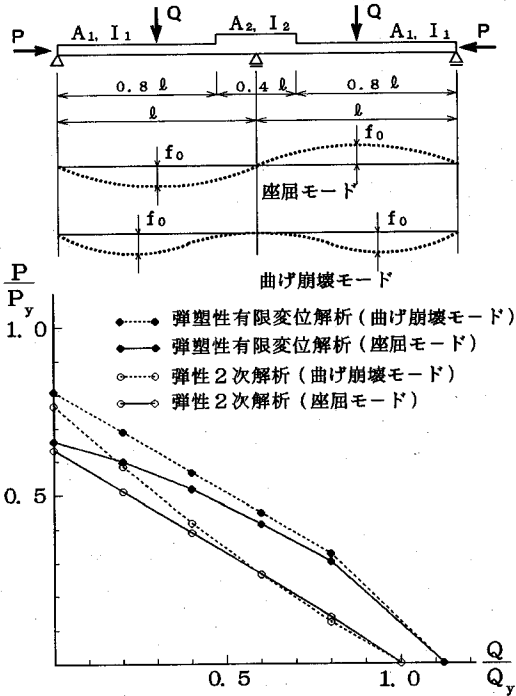


図-4 初期たわみモードの比較

2次解析では後述する提案法により定める。

解析結果を図-4に示す。図中の $P_y, Q_y$ は $Q=0$ のケースの断面とした場合の軸方向降伏荷重、支間中央断面が降伏モーメントに達する横荷重を示す。軸力 $P$ が横荷重 $Q$ （すなわち曲げモーメント）に対して比較的大きい場合は、当然座屈モードの方が曲げ崩壊モードよりも強度は小さい。曲げが軸力に対して大きくなるに従って、両モードの差は消滅していく。すなわち、曲げが大きい場合には $P-\Delta$ 効果が卓越し $P-\delta$ 効果の影響は小さいことがわかる。また、それぞれの解析による破壊時の変位形状および曲げモーメント分布を調べたところ、弾性2次解析と弾塑性有限変位解析はともに相似な分布となっており、両解析法の相関には問題がないことがわかった。

以上により、等価初期たわみモードとして、どのような荷重に対しても座屈解析から得られる1次モードを用いて、安全側の妥当な結果が得られると考えられる。また、前節で述べたように等価初期たわみは $P-\delta$ 効果、すなわち軸方向圧縮強度に対する初期不整の影響を導入するためのものであるから、軸力による座屈不安定に最も影響の大きい1次の座屈モードを初期たわみモードとすることに物理的な意味があると考えられる。

弾性2次解析と弾塑性有限変位解析の結果に差が多少生じているが、これは弾塑性有限変位解析が全塑性モーメントに達するのに対し、弾性2次解析は降伏に達したときの荷重を耐荷力としているためである。

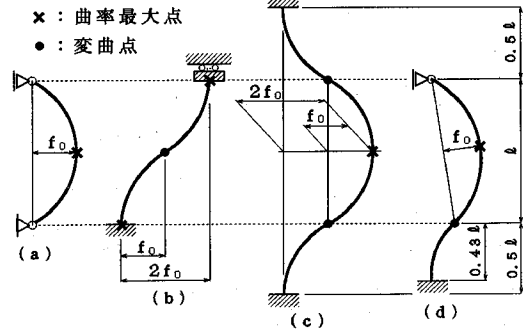


図-5 種々の境界条件の柱の等価初期たわみ量

(3) 変断面骨組の等価初期たわみの算定法

式(14)で提案した等価初期たわみ算定式を、任意の境界条件を持つ変断面骨組へ適用する方法を示す。ここで提案する方法は、曲率に着目した方法である。そこで、式(14)を曲率の表現式に変換する。式(6)を微分することにより、両端単純支持はり一柱（以下、換算柱と呼ぶ）の端部のたわみ角 $\theta_0$ として式(15)、中央の曲率 $\kappa_0$ として式(16)の形が得られる。

$$\theta_0 = \frac{\eta}{\lambda} \left( \frac{r}{e} \right) \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \dots \dots \dots (15)$$

$$\kappa_0 = \frac{\eta}{\lambda^2} \left( \frac{1}{e} \right) \left( \frac{\sigma_y}{E} \right) \dots \dots \dots (16)$$

ここに、 $\eta$ は式(14)で与えられる。

まず、曲率を用いる理由を図-5で説明する。図に示す柱の $\lambda$ はすべて同じであり、中心軸圧縮柱としての強度も同じと考えられる。弾性2次解析によって強度を等しくする等価初期たわみは、正確には変曲点間の相対的な最大たわみとして与える必要がある。しかし、図-5(b)に柱の示す最大曲率を、(a)の両端単純支持柱の最大曲率と一致するように座屈モードを増幅させると、(b)の変曲点から曲率最大点までの相対たわみは(a)のたわみ $f_0$ に等しく、(b)の最大たわみは $2f_0$ となる。他の場合も同様である。つまり、座屈モードの曲率最大点で式(16)の等価初期曲率を与えれば、境界条件の影響は座屈モードに考慮されているので、変曲点の位置を考慮しなくても初期たわみを適切に算定することができる。

次に曲率に着目した変断面骨組における等価初期たわみ算定手順を説明する。

- 1) 設計荷重を作用させた初期たわみのない骨組に対して座屈固有値解析を行う。それから、細長比パラメータ $\bar{\lambda} (= \sqrt{N_y/N_E})$ と座屈モードを求める。
- 2) 骨組中で $\bar{\lambda}$ が最小の部材に着目する。この部材は、 $N/N_u$ が最大となる部材である。ここに、 $N$ : 作用部材軸力、 $N_u$ : 柱の耐荷力曲線に $\bar{\lambda}$ を用いて求められる部材

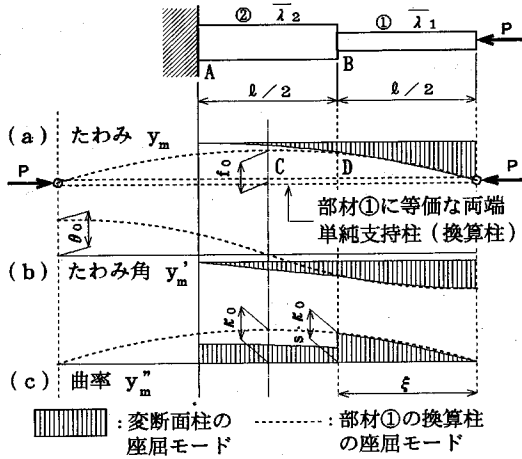


図-6 変断面部材の等価初期たわみの決定

の軸圧縮強度。

3) 着目部材に対して、座屈モードから曲率 $\kappa_m$ を計算する。これはマトリックス法で用いる棒要素の形状関数と節点変位（座屈モード値）から容易に計算できる。

4) 着目部材中で $\kappa_m$ が最大となる点に着目し、その点で着目部材の支持状態を考慮した等価初期曲率、 $\bar{\kappa}_0 = s \cdot \kappa_0$ を式(16)と次式(17)から求める。

$$s = \sin \xi \quad \dots \dots \dots (17)$$

$$\text{ここに、} \xi = \cot^{-1} \left( \frac{\theta_m / \theta_0}{\kappa_m / \kappa_0} \right) \quad \dots \dots \dots (18)$$

$\theta_m, \kappa_m$ : 座屈モードから求められる着目点のたわみ角および曲率

$\theta_0, \kappa_0$ : 式(15),(16)から計算される等価初期たわみ角および曲率

5) 着目点での曲率が上の等価初期曲率 $\bar{\kappa}_0$ に一致するように、1)で求められた座屈モードを比例増幅させ等価初期たわみとする。

この算定手順を物理的な視点から説明する。まず、式(11)と(12)の比較により、等価初期たわみは $P-\delta$ 効果(式(12)における $N/N_u$ )を考慮するものであるから、変断面骨組では $N/N_u$ が最大の部材、すなわち最も座屈に弱い部材に着目するのが合理的である。 $N/N_u$ が最大の部材の $\bar{\lambda}$ が最小となる理由は補遺Iに示す。また、座屈モードにおける曲率分布は $P-\delta$ 効果によって生じる2次曲げモーメント分布に比例する。曲率最大点は、着目部材中で2次曲げモーメントが最大となる点である。

次に部材の支持状態を考慮する係数 $s$ について、図-6により説明する。図-6では部材①②から成る変断面片持柱を例に示す。図-6(a)~(c)におけるハッチング部は、それぞれ座屈モードにおけるたわみ、たわみ角、曲率を示している。まず、上述の算定手順により、部材①②

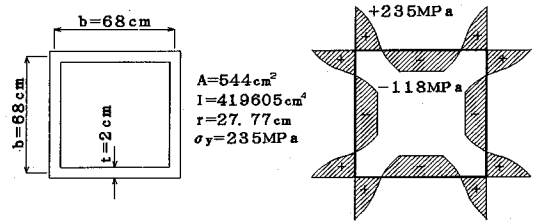


図-7 断面諸元と残留応力分布

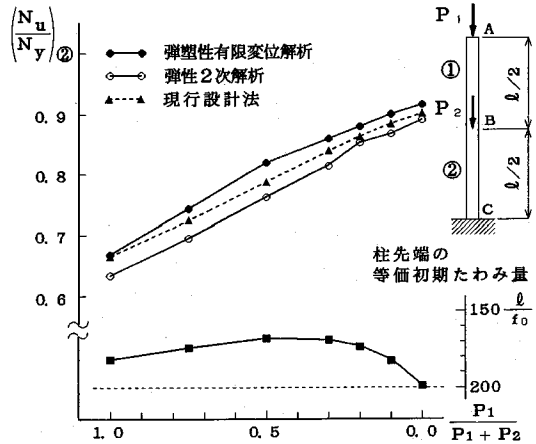


図-8 中間荷重を受ける片持柱の軸圧縮強度

を比較し $\bar{\lambda}$ が小さい部材①に着目する。そこで、この変断面柱の座屈モードに、部材①に等価な換算柱の座屈モードを合わせてみると、曲率最大点Bは換算柱の中央点Cに一致しない。したがって、着目点Bに与える曲率は換算柱中央の $\kappa_0$ ではなく、対応するD点の $s \cdot \kappa_0$ とするのが合理的である。そのために、式(18)により換算柱における対応位置 $\xi$ を求め、式(17)により換算柱中央Cと対応点Dの比 $s$ を求める。式(17),(18)の誘導は補遺IIに示す。一般の複雑な変断面骨組に対して、座屈モード図から係数 $s$ を求めることは困難であるが、式(17),(18)によれば着目点の諸量だけで機械的に求めることができる。したがって任意の変断面骨組に対してシステムチックに適用でき、極めて汎用性が高い方法と言える。

### 3. 変断面骨組への適用と解析結果

#### (1) 解析に用いる断面形状

この章では、中間荷重を受ける片持柱、変断面片持柱、非対称荷重を受ける門形ラーメンの提案法による耐荷力の解析例を示す。すべて図-7に示すような箱形断面からなり、圧縮残留応力は $0.5\sigma_y$ である。これは初期たわみ $l/1000$ を考えた中心軸圧縮柱の耐荷力がECCSのb曲線にはほぼ等しくなるように定めた。それぞれの解析例において、図-7の断面を用い $\bar{\lambda}$ が一定となる等断面、等軸力の基準状態で、 $\bar{\lambda} = 0.9$ となるように構造物の寸法を

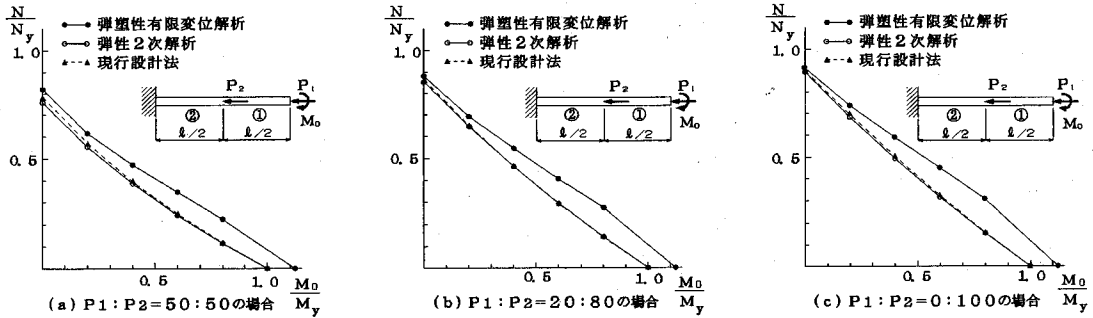


図-9 中間軸力と曲げを受ける片持柱の強度相関曲線

定めている。つまり、骨組が $\bar{\lambda} = 0.9$ の基準状態から変断面へ変化した場合の耐力力を、提案法により精度よく推定できるかを調べる。等価初期たわみ算定式(14)の係数は、箱形断面柱を対象とする ECCS の b 曲線に対して定めた $\alpha_1 = 0.404$ を用いる。

(2) 中間荷重を受ける片持柱

解析のモデルとなる片持柱を図-8中に示す。部材①②の断面は同じであるが、柱先端 A と中間点 B に作用する軸力  $P_1, P_2$  の比によって部材①②の $\bar{\lambda}$ は変化する。降伏軸力  $N_y$  は同じであるが、作用軸力の小さい部材①の $\bar{\lambda}$ は部材②の $\bar{\lambda}$ より大きく、 $P_1 = 0$  で①は $\bar{\lambda} = \infty$ となる。

この解析例では、着目部材は②となる。着目する曲率最大点は下端 C となるが、この点は固定であるため、式(17)の部材の支持状態の係数は  $s = 1.0$  となる。こうして提案法により求められた柱先端 A の等価初期たわみ量  $f_0$  を柱の長さ  $l$  で無次元化して図-8に示している。弾塑性有限変位解析に用いる初期たわみは、柱の先端で  $l/500$  としている。

弾塑性有限変位解析と弾性 2 次解析による強度の比較を図-8に示す。提案法と弾塑性有限変位解析による強度の差は最大 7.2% で十分精度が良い。  $P_2 = 0$  の基準状態でもやや安全側となる理由は、等価初期たわみ算定式の決定法による影響である。つまり、等価初期たわみ算定式は等断面部材が曲げを受ける場合も含めて平均化することで定められており、 $\bar{\lambda} = 0.9$  では軸力のみ状態に対して等価初期たわみがやや大きめとなるからである。

また、同図には現行設計法による推定強度も示している。これは、座屈解析から得られた $\bar{\lambda}$ を柱の耐力曲線に代入して求められる。 $\bar{\lambda}$ の大きい部材①の強度は部材②の強度より小さいが、作用軸力も小さいため結局、現行設計法による強度は部材②で決まっている。この現行設計法による強度推定に問題はないことがわかる。

次に軸力と柱先端に曲げが作用する片持柱の解析結果を図-9に示す。曲げが大きい場合に弾塑性有限変位解析とやや差があるのは、弾性 2 次解析では降伏モーメント

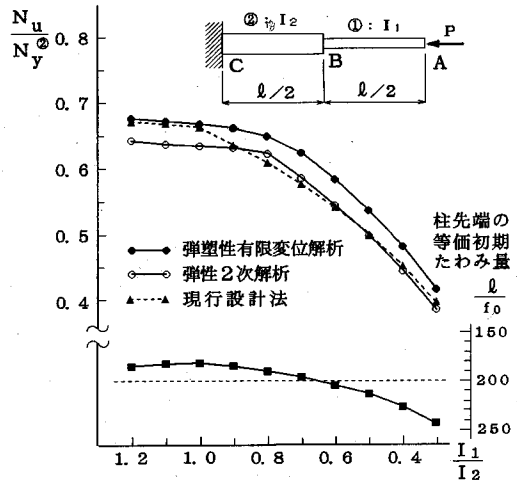


図-10 変断面片持柱の軸圧縮強度

$M_y$  を限界とする断面強度を用いているためである。したがって、その差は形状係数にはほぼ等しく、両者による耐力力の相関度は十分によい。

(3) 変断面片持柱

解析のモデルは図-10中に示す。部材②の断面は、図-7で示した断面で一定とし、部材①と②の断面 2 次モーメントの比をパラメータとして部材①の断面を変化させる。また軸圧縮力は柱先端 A のみに作用させる。作用軸力は同じであるから、降伏軸力の小さい、すなわち断面の小さい部材の $\bar{\lambda}$ が小さくなる。

$I_1/I_2 > 1.0$  では着目部材は②で、着目点は左端 C となる。 $I_1/I_2 < 1.0$  では着目部材は①で、着目点は断面変化点 B となる。B 点で部材①は固定支持されていないため、支持状態の係数  $s$  は 1.0 とならない。提案法による柱先端 A の等価初期たわみ量を図-10に示す。係数  $s$  を考慮するため等価初期たわみ量の変化は、着目点が変わる  $I_1/I_2 = 1.0$  で不連続にならず合理的に算定されている。弾塑性有限変位解析の初期たわみは、柱の先端で  $l/500$  としている。

弾塑性有限変位解析と弾性 2 次解析による強度を図-10

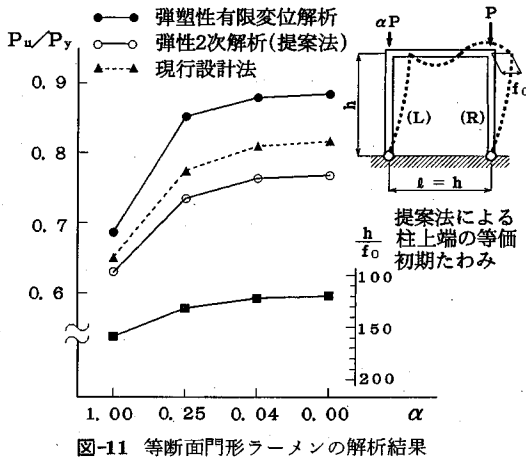


図-11 等断面門形ラーメンの解析結果

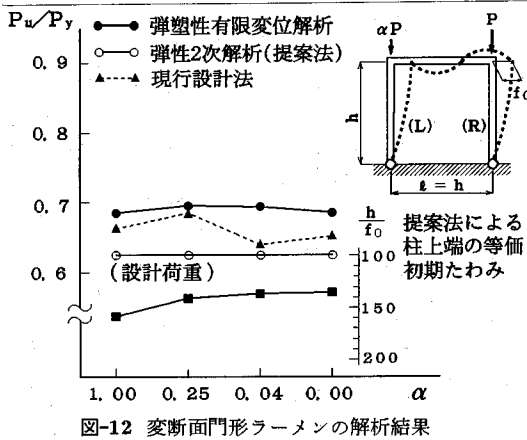


図-12 変断面門形ラーメンの解析結果

に示す。強度は部材②の $N_y$ で無次元化している。弾性2次解析による強度は、 $I_1/I_2 > 0.8$ では部材②、 $I_1/I_2 < 0.8$ では部材①で決まっている。最大誤差は7.9%で十分に精度がよい。また、全体的に安全側になるのは前項で述べたのと同じ理由による。

中間荷重を受ける片持柱と同様に、現行設計法による推定強度も示している。この強度は $\bar{\lambda}$ の小さい、すなわち断面の小さい方の部材により決まっている。やはり、現行設計法による強度推定に余り問題はない。ただし、耐荷力に対する安全度は提案法がほぼ一定なのに対して、現行設計法は変動がある。

#### (4) 非対称荷重を受ける門形ラーメン

解析のモデルとなる柱脚ヒンジ門形ラーメンを図-11に示す。すべての部材は図-7の断面で同じである。左右の柱に作用する荷重は等しくなく、その比を $\alpha (\leq 1.0)$ で表している。 $\alpha$ を変えた荷重ケースを解析し、 $\alpha = 0.0$ のとき左柱は $\bar{\lambda} = \infty$ となる。弾塑性有限変位解析に導入する初期たわみは、 $\alpha = 1.0$ のときの有効座屈長係数 $K = 2.328$ を考慮して $h/430$ としている。弾性2次解析

での等価初期たわみは、提案法により右柱の上端の曲率で決定される。

解析結果を図-11に示す。図では、終局強度に達したときに右柱に作用する荷重を降伏軸力で無次元化している。図から $\alpha$ が小さくなるにしたがって、弾塑性有限変位解析と弾性2次解析の差が大きくなっている。この構造物は1次不静定であるが、 $\alpha = 1.0$ のときは左右の柱が同時に崩壊して構造物の終局強度に達する。しかし $\alpha \neq 1.0$ のときは左柱が右柱の崩壊を拘束するように働くので、ある断面が限界強度に達したときに構造物の終局強度と判定する弾性2次解析法では余剰耐力が生じる。

そこで $\alpha = 1.0$ のときの強度を右柱の設計荷重として、各荷重ケースについて左右の柱が同時に崩壊するように柱を提案法により設計した。この設計された門形ラーメンに対して、弾塑性有限変位解析により強度を求めた結果を図-12に示す。設計荷重に対して、各荷重ケースでほぼ一定の強度となっている。したがって、この様に最適に設計された構造物の強度を、提案法により良い精度で推定できることがわかる。

図-11,12には現行設計法による推定強度を併せて示している。図-12では耐荷力に対して十分な精度があるが、各ケースの安全度が一定でない。

弾性2次解析を用いる設計法で、残留応力を含めた初期不整をすべて等価初期たわみに置き換えるのは近似である。しかし、この近似は次の点からほぼ問題ないと考ええる。つまり、弾性2次解析において幾何剛性により考慮する剛性低下は、等価初期たわみ(曲率)が同じでも軸圧縮力が大きいほど大きい。したがって、等価初期たわみに置き換えられた残留応力の影響は、曲げが支配的なはりでは小さく、軸圧縮力が支配的な柱では大きくなり、終局限界状態をほぼ近似できていると考えられる(図-11で $\alpha = 1.0$ の場合および図-12)。ところが図-11で $\alpha \neq 1.0$ の場合のように、柱の軸圧縮力に差があって応力再配分が生じる場合には誤差が生じる。しかし、この差は上で説明したように必ず安全側のものであり、不静定構造物における余剰耐力と考えるべきものである。

#### 4. 現行設計法と弾性2次解析法の比較

3章で扱ったような簡単な静定の構造物に対して、現行設計法で強度を推定することに余り問題はない。現行設計法における問題点の1つは、座屈に影響の小さい微小軸圧縮力部材の有効座屈長が過大になることであり、その部材が合理的に設計できないことである。そこで、現行設計法、弾性2次解析法による設計結果の比較から弾性2次解析法の合理性を明らかにする。ただし、現行設計法は座屈解析により有効座屈長を求める方法とする。

まずモデルは、図-8に示したものと同じ寸法の片持柱とする。荷重条件は、柱先端Aに $M_0/M_y = 0.4$ の



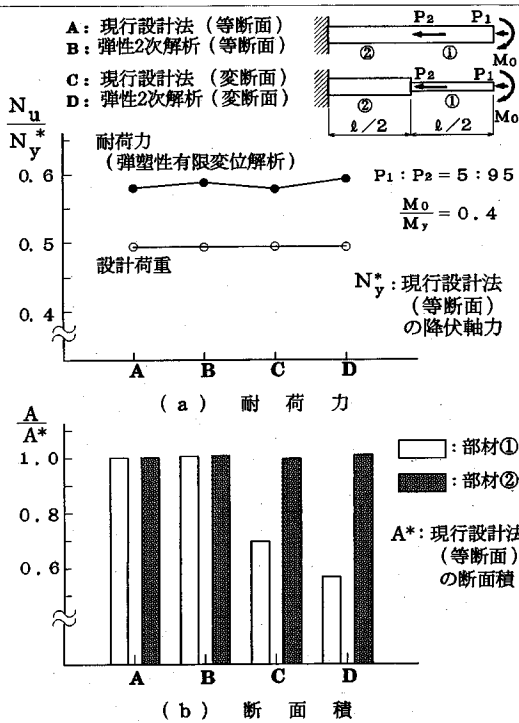


図-13 現行設計法と弾性2次解析法の比較

曲げモーメントと先端 A と中間点 B に軸圧縮力  $P_1$  と  $P_2$  を作用させる。部材① ②の  $\lambda$  の差を極端にするため  $P_1 : P_2 = 5 : 95$  とした。よって、部材①では曲げが支配的、部材②では軸力と曲げを合わせた座屈が支配的となる。以上の設定のもと、部材① ②が図-7の断面で等断面となる基準柱において現行設計法によりクリティカルになる条件から軸圧縮力の大きさを求めた。これを設計荷重として、現行設計法、弾性2次解析法のそれぞれにより、図-13の挿図に示す等断面柱および変断面柱として設計した。このような極端な荷重状態では部材①の細長比が非常に大きくなり、圧縮部材の細長比制限 ( $l/r < 120$ ) を越えることになる。したがって現行設計法では許容応力の設定すらできなくなる。現実的には設計者の経験的判断により、圧縮力が小さいことから座屈安定照査を省略し、しかも細長比制限を満足するように断面を大きくすることになる。しかし、ここでは力学的な観点から比較を精密にするため、現行設計法では細長比制限を無視し、部材安定照査を厳密に適用して設計した。

両者より設計された部材の断面積を図-13に示す。また同図にはそれぞれの設計された柱に対して、弾塑性有限変位解析によって求められた強度も示している。このときの初期たわみは、柱の先端で  $l/500$  としている。同じ荷重で設計された4つの柱はほぼ同じ強度を与えている。部材②の断面はどの柱もほぼ同じであることか

ら、柱の強度を決めているのは部材②であることがわかる。弾性2次解析法で設計された断面のみわずかに大きいのは、等価初期たわみ算定式の精度の影響と考えられる。一方、変断面柱として設計したとき、部材①の断面は設計法により異なる。弾性2次解析法で設計された部材①の断面積は、強度がほぼ同じであるにもかかわらず現行設計法に対して小さい。したがって、有効座屈長が過大となる微小軸圧縮力部材に対して、弾性2次解析法は特別の考慮を必要としない合理的な設計法だと言える。

### 5. 結 論

本論文では、有効座屈長の概念を用いた現行設計法に代わるものとして、弾性2次解析による平面骨組の座屈設計法の可能性を検証した。この方法では等価初期たわみの決定が最も重要な問題であるが、この点に関して新しい提案を行った。本研究の成果をまとめると、以下のようになる。

- (1) 過去に提案されている等価初期たわみ算定式の物理的な再考察をもとに、新しい算定式を提案した。この算定式は、断面区分による柱の複数耐荷力曲線に対応したものである。
- (2) 等価初期たわみは軸方向圧縮強度に対する初期不整の影響を考慮するために導入される。
- (3) したがって、初期曲げモーメントの作用状態には影響を受けず、等価初期たわみモードとして1次の座屈モードを用いてよいと考えられる。
- (4) 曲率に着目して、任意の変断面骨組の等価初期たわみをシステムチックに決定できる方法を提案した。
- (5) この提案法を2~3の変断面骨組に対して適用し、その妥当性を示した。静定あるいは最適に設計された不静定骨組の耐荷力を精度良く推定でき、耐荷力に対する安全度もほぼ一定となる。
- (6) 本論文で適用した静定構造物に対して、現行設計法で耐荷力を推定することに余り問題はない。しかし、耐荷力に対する安全度が一定でない場合がある。

(7) 部材設計の視点から、現行設計法は有効座屈長が過大となる微小軸圧縮力部材に対して不合理な設計となる。しかし、弾性2次解析法では設計者の経験的判断を必要とせず、合理的に設計できる。

謝辞：本研究の遂行にあたって、平成5年度文部省科学研究費（一般研究C）の補助を受けたことを付記し、謝意を表します。また、数値計算の一部は、尾島一博君（名古屋大学大学院）に協力していただいた。ここに記して、深謝いたします。

### 補遺 I 座屈安定性と細長比パラメータの関係

$N/N_u$  は部材の中心軸圧縮強度  $N_u$  に対する作用部材軸力  $N$  の比である。したがって骨組中でこの値が大きい部

材ほど作用軸圧縮力に対して弱い、すなわち座屈し易い部材である。そこで、各部材の  $N/N_u$  の大小と  $\bar{\lambda}$  の大小の関係について考える。部材の軸力を座屈解析から得られる固有値  $\Lambda$  により定数倍しても大小関係は変わらない。これは次式のようにオイラー座屈軸力  $N_E$  と中心軸圧縮柱の非弾性座屈軸力  $N_u$  との比になる。

$$\frac{\Lambda \cdot N}{N_u} = \frac{N_E(\bar{\lambda})}{N_u(\bar{\lambda})} \dots\dots\dots (I.1)$$

$N_E$  と  $N_u$  は  $\bar{\lambda}$  の関数として表すことができるが、この比は  $\bar{\lambda}$  が小さいほど大きくなることは明らかである。したがって、座屈解析から得られる  $\bar{\lambda}$  が最小の部材は  $N/N_u$  が最大となる。

**補遺 II 部材の支持状態係数  $s$  の誘導**

両端単純支持柱（換算柱）の等価初期たわみ、たわみ角、曲率のモードは次式で表される。

$$y_0 = f_0 \sin \xi \dots\dots\dots (II.1)$$

$$y'_0 = \theta_0 \cos \xi \dots\dots\dots (II.2)$$

$$y''_0 = \kappa_0 \sin \xi \dots\dots\dots (II.3)$$

ここに、 $\xi = \pi x/l$  ( $x$ : 座標,  $l$ : 部材長) である。また、 $\theta_0 = \pi/l \cdot f_0$ ,  $\kappa_0 = \pi^2/l^2 \cdot f_0$  である。

次に、変断面骨組の座屈モードを増幅して、着目点において換算柱の初期たわみモードに合わせる方法を考える。座屈モードでは比のみが意味を持つので、座屈モードから得られる着目点のたわみ角  $\theta_m$  と曲率  $\kappa_m$  の比を考える。この比が、換算柱の初期たわみモードにおけるたわみ角  $y'_0$  と曲率  $y''_0$  の比に一致する条件から次式の関係が得られる。

$$\frac{\theta_m}{\kappa_m} = \frac{y'_0}{y''_0} = \frac{\theta_0}{\kappa_0} \cot \xi \dots\dots\dots (II.4)$$

$$\therefore \xi = \cot^{-1} \left( \frac{\theta_m/\theta_0}{\kappa_m/\kappa_0} \right) \dots\dots\dots (II.5)$$

式 (II.5) は着目点が換算柱の  $\xi$  の位置に対応することを示している。したがって、換算柱の位置  $\xi$  の曲率と中央の曲率の比  $s$  は次式で求められる。

$$s = \frac{y''_0}{\kappa_0} = \sin \xi \dots\dots\dots (II.6)$$

**参考文献**

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，II 鋼橋編，丸善，1990年2月。
- 2) 西野文雄・三木千寿・鈴木篤：道路橋示方書II 鋼橋編改訂の背景と運用，13章ラーメン構造，橋梁と基礎，1981年10月。
- 3) 本州四国連絡橋公団：吊橋主塔設計要領・同解説，1989年4月。
- 4) 宇佐美勉：鋼骨組構造物の座屈設計法の問題点，第1回SGST 拡大研究会論文集，東海構造研究グループ，pp.107-120，1991年11月。
- 5) Nisino,F. and Attia,W. : A Proposal for in-plane stability design of steel framed structures, *Proc. of JSCE*, No.441/I-18, pp.1-10, 1992.1.
- 6) 鈴木亘・堀井秀之・山口栄輝・西野文雄：線形化有限変位解析による有効座屈長の算定，構造工学論文集，Vol.38A, pp.181-188, 1992年3月。
- 7) 尾下里治・吉田昭仁：高次の座屈固有値を用いた有効座屈長の決定法，土木学会第47回年次学術講演会，pp.248-249，1992年9月。
- 8) 倉方慶夫・西野文雄・長谷川彰夫・梶田順一：骨組構造物の座屈設計法に対する一提案，土木学会論文集，No.459/I-22, pp.73-82, 1993.1.
- 9) 野上邦栄：鋼ラーメン柱の実用的座屈設計法に関する一提案，土木学会論文集，No.459/I-22, pp.159-162, 1993.1.
- 10) 宇佐美勉：鋼ラーメン構造物の合理的設計式の一提案，土木学会論文集，No.404/I-11, pp.331-340, 1989.4.
- 11) 中井博・酒造敏廣・大垣賀津雄：鋼薄肉ラーメン構造物の限界強度の近似計算法，土木学会論文集，No.380/I-7, pp.263-272, 1987.4.
- 12) 長谷川彰夫・西野文雄：線形化有限変位理論による構造物の設計法の提案，土木学会第44回年次学術講演会，pp.108-109，1989年10月。
- 13) Goto,Y. and Chen,W.F. : Second-order elastic analysis for frame design, *J. Struct. Eng., ASCE*, Vol.113, No.7, pp.1501-1519., 1987.7.
- 14) Eurocode No.3 : Design of Steel Structures, Part1, General Rules and Rules for Buildings, 1990.
- 15) 宇佐美勉：P- $\Delta$ 法に関する1考察，土木学会中部支部研究発表会講演概要集，pp.56-57, 1991.
- 16) 野上邦栄・福田悦生：弾性有限変位解析に基づく設計における等価初期不整について，土木学会第47回年次学術講演会，pp.372-373，1992年9月。
- 17) 福本晴士・伊藤義人：座屈実験データベースによる鋼柱の基準強度に関する実験的研究，土木学会論文報告集第335号，pp.59-67，1983.
- 18) Itoh,Y. : Ultimate strength variations of structural steel members, Doctoral thesis submitted to Nagoya University, 1984.11.
- 19) 日本マーク社：MARC プログラムマニュアル A ~ E 編

(1993. 5. 10 受付)

**NEW STABILITY DESIGN OF STEEL FRAMES WITH STEPPED CROSS SECTIONS BY THE ELASTIC SECOND-ORDER ANALYSIS**

Hirotaoka ODA and Tsutomu USAMI

A new stability design method for frames is presented. Contrary to the effective buckling length concept, the proposed method is based on the elastic second-order analysis. In this method, the introduction of equivalent initial deflections corresponding to the imperfections is of utmost importance. Therefore, a new equivalent deflection formula using curvature is suggested. Moreover, a methodology is proposed to explain the systematic application of this formula to a frame with stepped cross sections. The validity of the method is demonstrated by some examples.