

境界要素法を用いた二次元非線形スロッシング解析手法

阿部和久*・神尾忠弘**

スロッシング解析において、速度ポテンシャルを境界要素法で近似し、自由水面上の節点の境界値と座標値との関係を、Lagrange 記法の下で重み付き残差に基づき統一的に定式化した。また、時間積分には Newmark 法に準ずる方法を適用した。最終的に得られる非線形方程式を繰り返し法で解くことにより、方程式が空間と時間方向に二次の収束次数を有する解法が構成されることが確かめられた。

Key Words : nonlinear sloshing analysis, moving free surface, boundary element method, Lagrangian particle description

1. はじめに

非線形スロッシング問題や非線形波動問題で、液体を非圧縮、非回転の完全流体と仮定できる場合、場の方程式は速度ポテンシャルの導入により、線形な Laplace 方程式で記述される。したがって、この問題における非線形性は、支配方程式ではなく自由表面上の圧力方程式と幾何形状とに起因するものとなる。このような問題を解析する場合、自由表面の幾何形状の変化に伴いメッシングを適宜行う必要があるが、境界要素法による解析では、線形支配方程式に対し領域分割の必要が一切ないため、幾何形状の更新は境界上の要素に対し行うだけで済み、形状更新のアルゴリズムは比較的簡単なものとなる。そのため、境界積分方程式に基づく境界型解法が非線形水波の解析に対し多く適用されて来ている。

しかし、自由表面の幾何条件や最終的に得られる方程式系での非線形諸量の扱い方については、さらに検討すべき点が残されている。例えば、自由表面の粒子速度は速度ポテンシャルの勾配で与えられるが、このとき次ステップにおける表面の幾何形状と境界値とは一対一の関係を持つ。この関係を最終的に得られる方程式内に取り込めば、境界値または幾何形状のいずれか一方のみを未知量とする、より効率的な解法が構成可能となる。

本研究では、二次元非線形スロッシング問題を対象に、自由水面上の節点における境界値と座標値との関係を統一的に定式化し、節点座標値を速度ポテンシャルの境界値で表すことで、境界値のみを未知量とした方程式の構成を試み、その妥当性を検証する。また、得られた非線形方程式の処理の仕方が解の精度や計算時間に及ぼす影響について調べ、既往の手法と合わせ、各処理手順の適用性について検討する。

2. 既往の研究および本論文の概要

以下では、まず境界要素法による自由水面解析に関する既往の研究を概説し、いくつかの留意すべき点について述べ、次に本論文の概要を述べる。

(1) 自由水面の記述方法について

非線形水波の解析では、自由表面形状の追跡が必要である。Fig.1 に示すように、これには大きく分けて二つのアプローチの仕方がある。一つは自由表面上に位置するいくつかの流体粒子の運動を Lagrange 的に追跡する方法である。Longuet-Higgins & Cokelet¹⁾ や Boutros, Anwar & Tewfick²⁾ らは、この方法に等角写像を併用し、周期境界条件下の水深の深い非線形水波の砕波問題を解析している。また、Cauchy の積分定理等に基づく積分方程式を用いた例として Vinje & Brevig³⁾, Soh⁴⁾, Douglas et al.⁵⁾ や Teles da Silva & Peregrine⁶⁾ などが挙げられる。これらの中には、非周期問題を扱っているものもあるが、文献 1) ~ 6) は何らかの形で複素解析に基づいているため、その解析対象は二次元問題に限られる。そのため、Grilli, Skourup & Svendsen⁷⁾ は三次元問題も定式化可能な、直接法に基づく積分方程式による解法を採用している。また、文献 7) では時間積分法として Taylor 展開に基づくものを採用しているが、同様の方法は Nakayama⁸⁾ によっても構成されている。

自由水面形状の追跡に関するもう一つの方法は、水面境界を記述する節点の水平位置を固定し、各点における波高や境界値を水平座標の一価関数として記述する方法である。Faltinsen⁹⁾ はこの方法を用いタンク内のスロッシング解析を行っている。Liu & Liggett¹⁰⁾ や Nakayama & Washizu¹¹⁾ も直接法に基づく境界積分方程式の下で同様の解法を構成している。なお、水面形状を水平軸の一価関数として記述する場合、各節点位置は鉛直方向のみ移動する。そのため、圧力方程式に基づくポテンシ

* 工博 新潟大学助教授 工学部建設学科 (〒950-21 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

** 工修 (株) 福田組 (研究当時 新潟大学大学院学生)

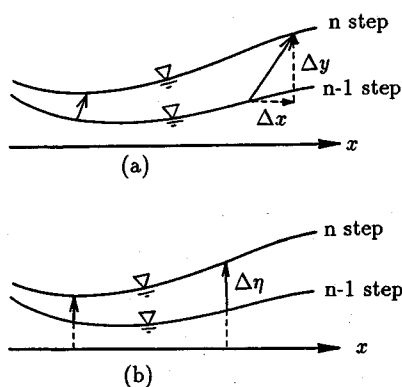


Fig.1 Description of free-surface movement. (a)Lagrangian description. (b)Wave height and boundary values are defined as unique functions of a horizontal axis.

ル増分の厳密な評価には、時間増分に加え波高増分による位置的变化の影響も考慮する必要があり、Brorsen & Larsen¹²⁾と大山・藤井¹³⁾はこの影響の評価を試みている。

Lagrange 的に粒子の運動を追跡する方法では、自由表面上の節点配置が極端に不均一なものとなり得るといった問題もあるが、形状が水平軸に対して一価性を失うような砕波まで解析することができ、水面端が接する壁面形状を任意に設定することができるため、構造物との相関問題など、さらに複雑な問題への適用が容易である。

(2) 自由水面の離散化方法について

自由水面の離散化においては、各節点における幾何形状と境界値の導関数の一価性を確保する目的で、3次スプライン関数や Overhauser 要素などの C^1 連続な補間を用いた例もあるが^{14),15)}、一定要素や一次要素などの低次要素も多用されている。しかし、一定要素を用いる場合には節点と要素端点間で境界値の変換を行う必要があり、その結果として低次モードから振動数の精度が大幅に低下し、さらに運動エネルギーを伴わない短波長モードが発生する¹⁶⁾。非線形スロッピング解析においては各ステップで係数行列が更新されるので、線形解析に見られるほど精度低下や短波長モードの発生が顕著に現れることはないと思われるが、不安定解を誘発する可能性もあり、一次以上の高次要素を用いることが望ましい。

なお、一定要素を用いる場合、要素中央の節点位置において境界形状と境界値関数とは C^1 連続となり、ポテンシャルの導関数である流体粒子速度を積分表現式より直接的に求めることができる¹⁷⁾ という利点もある。ただし、その際に境界値近似関数は接線方向勾配を持たないので、特異積分より本来生ずるはずのポテンシャルの接線方向導関数の項が得られなくなる。そのため、領域内から境界への極限移行で与えられる接線方向導関数は正しい値の $1/2$ をとることとなるので、注意を要する。

(3) 非線形方程式の解法について

自由水面問題では非線形方程式が解析の対象となる。具体的解法としては、高次の陽的時間積分法を用いたステップの解を求める方法^{1),7)}が主に用いられている。陰的時間積分法を用いる場合、方程式は次ステップの解に関し非線形となるため、繰り返し計算により収束解を求めなければならない^{12),13)}。Nakayama & Washizu¹¹⁾は、この繰り返し計算をせず、その代わりに各ステップで生ずる誤差の累積を防ぐ目的で、誤差補正項の導入を提案している。また、大谷・大坪・久保田¹⁸⁾は水面形状の変化に伴う摂動量を考慮した解法を示している。この方法では、境界要素方程式の係数行列の更新が不要となるため、計算時間は大幅に短縮されるが、波形の大きな変化を適切に解析することが難しい。また、Medina et al.¹⁹⁾は幾何形状の変化による境界要素方程式の係数行列の増分をも考慮した解法を構成しているが、この方法は他と比べ定式化がかなり複雑となる。

(4) 自由表面上における境界値と座標値の各増分の扱いについて

非線形問題では水面形状と境界値とが未知量となるが、粒子速度は速度ポテンシャルの勾配で定義されるため、自由表面粒子の運動を Lagrange 的に追跡する場合、粒子の座標増分とポテンシャルおよび流束の増分とは互いに関連し独立でない。塩尻・荻原²⁰⁾は水面境界の法線と接線方向の運動学的関係から、流束の増分と節点座標の増分との関係およびポテンシャル増分と節点座標の増分との関係をそれぞれ誘導している。しかし、前者に対しては各要素単位で関係式を構成し、後者に対しては重み付き残差より構成しており、各々異なる扱い方をしている。上述のように粒子速度は境界値およびその導関数から定義されているので、法線・接線方向の両成分に対してこれらの関係を統一的に扱うことで、運動学的関係をより適切に評価できると考えられる。

(5) 本論文の概要および目的

上に述べたいくつかの留意点を踏まえ、本研究では、自由表面の運動を Lagrange 的に追跡し、節点座標と境界値との関係を統一的に記述する、非線形スロッピング問題のための境界要素解析手法の構成を試みる²¹⁾。具体的には、離散化において一次境界要素を用い、自由表面での圧力方程式を重み付き残差式で定式化し、さらに粒子速度とポテンシャル勾配との運動学的関係も重み付き残差式で記述することにより、粒子の座標と境界値との一対一の関係を統一的に誘導する。なお、自由表面上では節点境界値と節点座標値とが未知量となるが、本論文では上の関係を用いて節点座標値を消去することで、ポテンシャルと流束とを未知量とした方程式を誘導する。また、時間積分スキームには Newmark 法に準ずるものを用い、積分パラメータの設定で解の安定性を比較的容

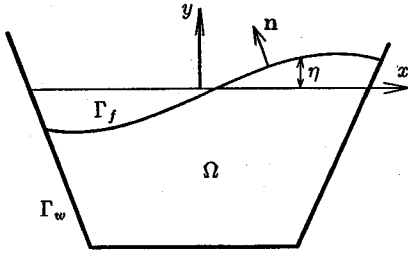


Fig.2 Computational domain and definitions.

易に制御可能な方程式系を構成する。その結果得られる非線形方程式の求解には繰り返し法を用い、各ステップで収束解を求める方法を探る。

次に、本研究で構成した解法における、空間と時間方向の収束回数について考察する。なお繰り返し法では、非線形方程式を収束させながら解析を進めることとなる。そのため、各ステップで数回の繰り返し計算が必要となるが、誤差補正項を導入して繰り返し計算を省略する場合と比べ、比較的大きな時間ステップに対しても良好な精度を得ることができ、同一精度の解に対してはむしろ解析全体の計算時間を短縮させることが期待できる。しかし、両者を同一条件下で直接比較した例はなく、この点についてはさらに検討が必要である。また、文献(11)では自由表面上の圧力方程式が増分形で記述され、そこに誤差補正項が適用されているが、この方程式と結合される境界要素方程式は前ステップの解に基づいて構成されており、これに関する誤差については検討されていない。そこで、矩形容器内のスロッシング解析を通して、誤差補正項の導入の仕方が解に及ぼす影響や繰り返し法の有効性などを、計算時間や解の精度に基づいて比較検討する。

3. 解析手法の構成

(1) 基礎方程式

Fig.2 に示すような、タンク内における二次元流体場を考える。流体は非粘性、非圧縮とすると、非回転場における支配方程式は速度ポテンシャル ϕ の導入により、次の Laplace 方程式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (in \Omega) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 Ω は流体領域である。

自由表面 Γ_f 上の境界条件は、次の運動学的条件式と、圧力方程式とで与えられる。

$$\frac{Dx}{Dt} := u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{Dy}{Dt} := v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - g\eta \quad (on \Gamma_f) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 D/Dt は物質微分を意味し、 g は重力加速度、 η は静止状態からの水面高さである。なお、本論文では自由表面の流体粒子を Lagrange 的に追跡する方法をとる。

容器の壁面 Γ_w 上では、流体と壁面の運動の適合条件として、流体粒子の壁面法線方向速度が規定される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{q} \quad (on \Gamma_w) \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\partial/\partial n$ は流体側から見た外向き法線方向微分であり、 \bar{q} は壁面の運動により与えられる規定値である。

(2) 境界要素方程式

式(1)の支配方程式をみたく速度ポテンシャル場を積分方程式に基づき定義する。直接法による定式化は次のように与えられる。

$$c(x)\phi(x) + \int_{\Gamma} q^*(x,y)\phi(y) d\Gamma_y = \int_{\Gamma} \phi^*(x,y)q(y) d\Gamma_y \quad (x,y \in \Gamma) \dots\dots (5)$$

ここで、 $\Gamma = \Gamma_f + \Gamma_w$ であり、 ϕ^* および q^* はそれぞれ二次元ポテンシャル問題の基本解とその法線方向導関数である。また、 $q = \partial\phi/\partial n$ は流束、 $c(x)$ は境界の滑らかさに依存する係数である。

本研究では、式(5)における ϕ と q を一次要素により近似する。一次以上の要素を用いる場合、かど点などにおける流束の不連続性の適切な処理が必要となる。Grilli & Svendsen²²⁾は自由水面端のかど点の取扱について検討しており、定式化において二重節点を使用している。本論文では、初めからポテンシャルは全節点で連続にとり、流束のみ各かど点において不連続にとった。ここでは壁面上の流束は既知としているため、このような離散化を採用しても節点境界値の未知量の総数は不変である。選点を要素端の全節点に置くと、式(5)より次の境界要素方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ff} & \mathbf{H}_{fw} \\ \mathbf{H}_{wf} & \mathbf{H}_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_f \\ \phi_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ff} & \mathbf{G}_{fw} \\ \mathbf{G}_{wf} & \mathbf{G}_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_f \\ q_w \end{Bmatrix} \dots\dots (6)$$

ここで、 ϕ_f と ϕ_w は Γ_f, Γ_w 上に関するポテンシャル節点値ベクトルであり、 q_f と q_w は流束節点値ベクトルである。また、 $\mathbf{H}_{ff}, \mathbf{H}_{fw}, \dots, \mathbf{G}_{ff}, \mathbf{G}_{fw}, \dots$ はそれぞれに対応する部分係数行列である。

非線形スロッシング問題では、自由表面上におけるポテンシャルと流束の値は未知量であり、これらは式(2),(3)の境界条件下で定義される。そこで、本研究では式(6)において、壁面上の流束 q_w 以外は全て未知量として扱う。上式を未知量 ϕ_f, ϕ_w, q_f に関して整理すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ff} & \mathbf{H}_{fw} & -\mathbf{G}_{ff} \\ \mathbf{H}_{wf} & \mathbf{H}_{ww} & -\mathbf{G}_{wf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_f \\ \phi_w \\ q_f \end{Bmatrix}$$

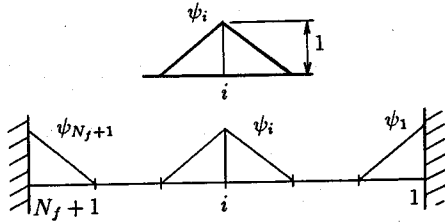


Fig. 3 Shape functions on the free surface.

$$= \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_{fw} \\ \mathbf{G}_{ww} \end{Bmatrix} \{ \bar{\mathbf{q}}_w \} \quad \dots (7)$$

ここで、全要素数を N とし、その内自由表面を N_f 個の要素で離散化したとすると、式 (7) における未知量は $N + N_f + 1$ 個となり、それに対し、与えられている方程式の総数は N 個となる。不足する $N_f + 1$ 個の方程式は、以下に示す圧力方程式の離散化式により構成する。

(3) 自由表面上の圧力方程式の離散化

式 (2),(3) に与えられた運動学的条件式と圧力方程式とを重み付き残差式により離散化する。その際に、自由表面上の各値 $u, v, \phi, q, \eta, x, D\phi/Dt$ を Fig. 3 に示すような区間線形な補間関数 ψ_i を用い次のように定義する。

$$f = \sum_{i=1}^{N_f+1} \psi_i f_i \quad \dots (8)$$

ここで、 f は Γ_f 上で定義された関数であり、 f_i は節点 i におけるその関数値である。

まず、式 (2) の重み付き残差表示は次式となる。

$$\int_{\Gamma_f} \psi_i (u - \frac{\partial \phi}{\partial x}) d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma_f} \psi_i (v - \frac{\partial \phi}{\partial y}) d\Gamma = 0 \quad (9)$$

上式において、 $\partial \phi / \partial x, \partial \phi / \partial y$ を ϕ の境界接線方向導関数 $\partial \phi / \partial s$ と流束 q により、次式のように表わす。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_y & n_x \\ n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial s} \\ q \end{Bmatrix} \quad \dots (10)$$

ここで、 n_x と n_y は境界上の法線ベクトル成分であり、線形要素においては各要素上で一定である。

また、 $\partial \phi / \partial s$ は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \sum \frac{d\psi_i}{ds} \phi_i = \sum \psi'_i \phi_i \quad (\psi'_i := \frac{d\psi_i}{ds}) \quad \dots (11)$$

式 (10),(11) を式 (9) に代入すると、節点粒子速度 u, v と節点境界値 ϕ, q に対し次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_1 \mathbf{u} &= -\mathbf{K}_2 \phi + \mathbf{K}_3 \mathbf{q} \\ \mathbf{K}_4 \mathbf{v} &= \mathbf{K}_4 \phi + \mathbf{K}_5 \mathbf{q} \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

ここで、各係数行列 $\mathbf{K}_i (i = 1, \dots, 5)$ は以下のように定義する。

$$\begin{aligned} k_{1ij} &= \int_{\Gamma_f} \psi_i \psi_j d\Gamma, & k_{2ij} &= \int_{\Gamma_f} n_y \psi_i \psi'_j d\Gamma \\ k_{3ij} &= \int_{\Gamma_f} n_x \psi_i \psi_j d\Gamma, & k_{4ij} &= \int_{\Gamma_f} n_x \psi_i \psi'_j d\Gamma \\ k_{5ij} &= \int_{\Gamma_f} n_y \psi_i \psi'_j d\Gamma \quad \dots (13) \end{aligned}$$

式 (12) により、各節点における粒子速度はポテンシャルと流束により定義されることとなる。

次に式 (3) の圧力方程式の離散化について述べる。式 (3) の重み付き残差式は次式より与えられる。

$$\int_{\Gamma_f} \psi_i [\frac{D\phi}{Dt} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + g\eta] d\Gamma = 0 \quad \dots (14)$$

上式より、次の離散化式を得る。

$$\mathbf{K}_1 \frac{D\phi}{Dt} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_6 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K}_6 \mathbf{v} + g \mathbf{K}_1 \eta = 0 \quad \dots (15)$$

ここで、 \mathbf{K}_6 は次式で定義する。

$$k_{6kij} = \int_{\Gamma_f} \psi_k \psi_i \psi_j d\Gamma \quad \dots (16)$$

(4) 時間積分スキーム

自由表面問題における時間積分スキームとしては陽解法によるスキームが多用されているが、本研究では、線形問題に対し無条件安定となり、パラメータの設定により安定性が比較的容易に制御可能で、さらに基本的特性がよく知られているということから Newmark 法²³⁾に準ずる積分スキームを用いる。

なお、線形波動問題に対する同様の積分スキームは、Salmon et al.²⁴⁾, Nachbin & Papanicolaou²⁵⁾ や Liu & Liggett²⁶⁾ により示され、その基本的特性が検討されているが、これらのスキームはいずれも Newmark 法に含めることができる。

本研究で用いた時間積分法は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \frac{D\phi^n}{Dt} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\phi^n - \phi^{n-1}) \\ &\quad + (1 - \frac{\gamma}{\beta}) \frac{D\phi^{n-1}}{Dt} + \Delta t (1 - \frac{\gamma}{2\beta}) \frac{D^2\phi^{n-1}}{Dt^2} \\ \frac{D^2\phi^n}{Dt^2} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\phi^n - \phi^{n-1}) \\ &\quad - \frac{1}{\beta \Delta t} \frac{D\phi^{n-1}}{Dt} - (\frac{1}{2\beta} - 1) \frac{D^2\phi^{n-1}}{Dt^2} \\ \mathbf{u}^n &= \frac{1}{\gamma \Delta t} (\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1}) - (\frac{1}{\gamma} - 1) \mathbf{u}^{n-1} \\ \mathbf{v}^n &= \frac{1}{\gamma \Delta t} (\boldsymbol{\eta}^n - \boldsymbol{\eta}^{n-1}) - (\frac{1}{\gamma} - 1) \mathbf{v}^{n-1} \quad \dots (17) \end{aligned}$$

ここで、 Δt は時間ステップ幅であり、 γ と β は積分パラメータである。また、 $()^n$ は第 n ステップにおける値である。

なお、式 (17) の積分スキームは、線形スロッシング問題への適用において、二階常微分方程式に対する Newmark 法に一致するものとなる。したがって、解の基本特性も Newmark 法に一致し、 γ, β の取り方により無条件安定や、数値減衰を有する時間積分を得ることができる。

また、非線形スロッシング解析過程における式 (17) の積分スキームの基本的性質については 4.5. で検討する。

(5) スロッシング解析のための離散化方程式の構成

各ステップでみだすべき方程式は、式(7),(12),(15)である。これらに式(17)の積分スキームを併用すれば、第 n ステップに関する方程式を得る。なお、これらの方程式は非線形となるため、繰り返し法により各ステップで解を収束させる方法をとる。

なお、文献(11),(13),(20)では、自由表面上の運動学的関係式と圧力方程式の離散化に対し、幾何形状の変化を考慮に入れた増分式を構成している。しかし、それと結合される境界要素方程式には前ステップの形状に基づいた係数を用いているため、自由表面上の各方程式に厳密な増分式を導入したことによる利点は本質的に失われると思われる。そのため、本研究では、完全な増分式は誘導せず、境界要素方程式と同様に、 $K_1 \dots K_6$ の各係数行列を前の繰り返し段階の結果に基づき評価した。

まず、式(12)に(17)を代入すると、次の節点座標値 x, η に関する式を得る。

$$\begin{aligned} x^n &= x^{n-1} + \Delta t(1 - \gamma)u^{n-1} \\ &\quad + \gamma \Delta t [\tilde{K}_1^n]^{-1} (-\tilde{K}_2^n \phi^n + \tilde{K}_3^n q^n) \\ \eta^n &= \eta^{n-1} + \Delta t(1 - \gamma)v^{n-1} \\ &\quad + \gamma \Delta t [\tilde{K}_1^n]^{-1} (\tilde{K}_4^n \phi^n + \tilde{K}_5^n q^n) \quad \dots (18) \end{aligned}$$

ここで、 (\cdot) は前の繰り返し段階で得られた結果に基づく値を示す。

上式により、自由表面の節点座標値は節点境界値を用いて統一的に与えられることとなる。そこで、圧力方程式(15)に式(17)を用い、さらに(18)より x^n, η^n に関する項を消去すると、最終的に ϕ_j^n と q_j^n に関する次の離散化された圧力方程式を得る。

$$[\tilde{C}^n \quad \tilde{D}^n] \begin{Bmatrix} \phi_j^n \\ q_j^n \end{Bmatrix} = \{f^n\} \quad \dots (19)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{C}^n &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \tilde{K}_1^n + [\tilde{u}^n]^T [\tilde{K}_6^n] [\tilde{K}_1^n]^{-1} [\tilde{K}_2^n] \\ &\quad - [\tilde{v}^n]^T [\tilde{K}_6^n] [\tilde{K}_1^n]^{-1} [\tilde{K}_4^n] + g \gamma \Delta t \tilde{K}_4^n \\ \tilde{D}^n &= -[\tilde{u}^n]^T [\tilde{K}_6^n] [\tilde{K}_1^n]^{-1} [\tilde{K}_3^n] \\ &\quad - [\tilde{v}^n]^T [\tilde{K}_6^n] [\tilde{K}_1^n]^{-1} [\tilde{K}_5^n] + g \gamma \Delta t \tilde{K}_5^n \\ f^n &= \tilde{K}_1^n \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \phi^{n-1} - (1 - \frac{\gamma}{\beta}) \frac{D\phi^{n-1}}{Dt} \right. \\ &\quad \left. - \Delta t (1 - \frac{\gamma}{2\beta}) \frac{D^2\phi^{n-1}}{Dt^2} \right] \\ &\quad - g \tilde{K}_1^n [\eta^{n-1} + \Delta t(1 - \gamma)v^{n-1}] \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ [\tilde{u}^n]^T [\tilde{K}_6^n] \tilde{u}^n + [\tilde{v}^n]^T [\tilde{K}_6^n] \tilde{v}^n \} \quad \dots (20) \end{aligned}$$

なお、式(15)における粒子速度の二乗の項は、次のように線形化した。

$$[u^n]^T [K_6^n] u^n \simeq [\tilde{u}^n]^T [\tilde{K}_6^n] (2u^n - \tilde{u}^n)$$

$$[v^n]^T [K_6^n] v^n \simeq [\tilde{v}^n]^T [\tilde{K}_6^n] (2v^n - \tilde{v}^n) \quad \dots (21)$$

式(19)より、 $N_f + 1$ 個の付加的な方程式を得ることができる。式(7)と(19)を連立し、最終的に次の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_{ff}^n & \tilde{H}_{fw}^n & -\tilde{G}_{ff}^n \\ \tilde{H}_{wf}^n & \tilde{H}_{ww}^n & -\tilde{G}_{wf}^n \\ \tilde{C}^n & 0 & \tilde{D}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_j^n \\ \phi_w^n \\ q_j^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_f^n \\ h_w^n \\ f^n \end{Bmatrix} \quad (22)$$

ここで、 h_f^n と h_w^n は、式(7)の右辺で与えられるベクトルである。

上式を繰り返し解き、収束解を求めることにより、未知境界値 $\{\phi_j^n, \phi_w^n, q_j^n\}$ を得る。またこれらの値に基づき、自由表面形状は式(18)より求めることができる。

4. 本研究で構成した手法の収束回数について

(1) 空間方向の収束回数

空間方向の離散化精度を、基礎式(1),(2),(3)に対する各離散化式(7),(12),(15)の近似回数に基づいて調べる。なお、境界要素方程式(7)は、一次要素を用いているので、境界値の収束回数は一般に二次である¹⁹⁾。

式(12),(15)において、要素長を h とすると、各係数行列成分は次式で与えられる。

$$k_{1ij} = \begin{cases} h/6 & (j = i - 1, i + 1) \\ 2h/3 & (j = i) \end{cases} \quad \dots (23)$$

$$k_{2ij} = \begin{cases} (x_i - x_{i-1})/2h & (j = i - 1) \\ -(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1})/2h & (j = i) \\ -(x_{i+1} - x_i)/2h & (j = i + 1) \end{cases} \quad \dots (24)$$

$$k_{3ij} = \begin{cases} (\eta_i - \eta_{i-1})/2 & (j = i - 1) \\ (\eta_{i+1} - \eta_{i-1})/3 & (j = i) \\ (\eta_{i+1} - \eta_i)/6 & (j = i + 1) \end{cases} \quad \dots (25)$$

$$k_{6kij} = \begin{cases} h/12 & (j = k = i - 1, j = k = i + 1) \\ h/12 & (j = i - 1, k = i) \\ & \text{or } j = i + 1, k = i \\ h/2 & (j = k = i) \end{cases} \quad (26)$$

なお、 k_{4ij}, k_{5ij} についても、式(23),(24)と同様の関係式を得ることができる。

上式を式(12),(15)へ代入し、節点 $i - 1, i + 1$ に関する値を節点 i について Taylor 展開すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} u_i - \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} \right)_i + O(h^2) &= 0 \\ v_i - \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} \right)_i + O(h^2) &= 0 \\ \frac{D\phi}{Dt} \Big|_i - \frac{1}{2} (u_i^2 + v_i^2) + g\eta_i + O(h^2) &= 0 \quad \dots (27) \end{aligned}$$

以上より、式(12),(15)は運動学的関係式と圧力方程式を h^2 のオーダーで近似していることがわかる。よって、方程式の離散化における空間方向の収束次数は二次となる。なお、本論文で示した離散化式(22)に基づく解の収束次数については5.において解析例を通し検討する。

(2) 時間方向の収束次数

スロッシング問題や波動問題において、時間積分の対象となる式は、自由表面上の運動学的関係式と圧力方程式である。ここでは時間方向の精度について調べるために、空間方向の離散化は考えず、式(2),(3)に式(17)の時間積分を適用する場合について考察する。

方程式の求解において繰り返し法を用い、各時間ステップで収束解を求める場合、第 n ステップ目の解は次式をみます。

$$\begin{aligned} \hat{u}^n &= \frac{\partial \hat{\phi}^n}{\partial x}, \quad \hat{v}^n = \frac{\partial \hat{\phi}^n}{\partial y} \\ \frac{D\hat{\phi}^n}{Dt} &= \frac{1}{2}[(\hat{u}^n)^2 + (\hat{v}^n)^2] - g\hat{\eta}^n \quad \dots (28) \end{aligned}$$

ここで、 $(\hat{\cdot})$ は式(17)による解である。ただし、ここで $\hat{u}^n, \hat{v}^n, \frac{D\hat{\phi}^n}{Dt}$ は式(17)より、次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{D\hat{\phi}^n}{Dt} &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\hat{\phi}^n - \phi^{n-1}) \\ &\quad + (1 - \frac{\gamma}{\beta})\frac{D\phi^{n-1}}{Dt} + \Delta t(1 - \frac{\gamma}{2\beta})\frac{D^2\phi^{n-1}}{Dt^2} \\ \hat{u}^n &= \frac{1}{\gamma\Delta t}(\hat{x}^n - x^{n-1}) - (\frac{1}{\gamma} - 1)u^{n-1} \\ \hat{v}^n &= \frac{1}{\gamma\Delta t}(\hat{y}^n - y^{n-1}) - (\frac{1}{\gamma} - 1)v^{n-1} \dots (29) \end{aligned}$$

ここで、 $n-1$ ステップから n ステップまでにおける局所的な精度について考えることとし、 $n-1$ ステップの値は正解を与えているものとする。

上式の近似次数を調べるため、右辺の $\hat{\phi}^n$ と \hat{x}^n, \hat{y}^n の代わりに真の解を代入し、 $n-1$ ステップに関するTaylor展開を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{D\hat{\phi}^n}{Dt} &= \frac{D\phi^{n-1}}{Dt} + \Delta t \frac{D^2\phi^{n-1}}{Dt^2} + \frac{\gamma\Delta t^2}{6\beta} \frac{D^3\phi^{n-1}}{Dt^3} + \dots \\ \hat{u}^n &= u^{n-1} + \frac{\Delta t}{2\gamma} \dot{u}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{6\gamma} \ddot{u}^{n-1} + \dots \\ \hat{v}^n &= v^{n-1} + \frac{\Delta t}{2\gamma} \dot{v}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{6\gamma} \ddot{v}^{n-1} + \dots \dots (30) \end{aligned}$$

上式より、 $\frac{D\hat{\phi}^n}{Dt}$ の収束次数は二次であり、 \hat{u}^n, \hat{v}^n の次数は基本的に一次となり、特に $\gamma = 1/2$ の場合に二次となることがわかる。

式(28)の圧力方程式に上式を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned} g\hat{\eta}^n &= -\frac{D\phi^n}{Dt} + \frac{1}{2}[(u^n)^2 + (v^n)^2] \\ &\quad - \Delta t(1 - \frac{1}{2\gamma})(u^n \dot{u}^{n-1} + v^n \dot{v}^{n-1}) + \dots (31) \end{aligned}$$

式(31)より、式(3)に対する収束次数は基本的に一次であり、 $\gamma = 1/2$ の場合には二次となることがわかる。

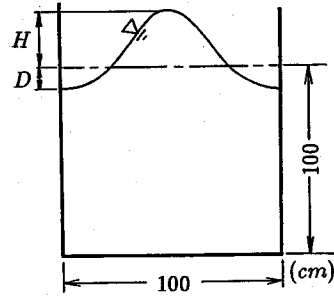


Fig.4 Analytical conditions.

Table 1 Period and height of wave in each case.

A	Period(sec)	H (cm)	D (cm)
0.2	0.8048	3.559	2.912
0.4	0.8183	8.160	5.438
0.5	0.8298	11.028	6.620

5. 解析結果に基づく諸検討

(1) 解析条件

3.に構成した解法を対象に、具体的な解析結果に基づき、離散化精度や計算に要する時間などについていくつかの検討を行う。解析例として、Fig.4に示す矩形容器内の非線形自由振動問題を用いる。解析精度の評価は、Penney & Price²⁷⁾により与えられた5次の摂動解との比較による。なお、文献27)では無限水深の場合を対象とした結果が与えられているが、水深が波長の1/4以上の場合には無限水深の場合との差はわずかなものとなるため、本研究ではFig.4に示す有限水深における数値解を上述の解析解と比較した。なお、5次の摂動解の精度は2~3%とされている。

解析では初期条件として、次式による静止水面形状を与え、重力の作用下での自由振動応答を求めた。

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(x, 0) &= (A + \frac{1}{32}A^3 - \frac{47}{1344}A^5) \cos x \\ &\quad + (\frac{1}{2}A^2 - \frac{79}{672}A^4) \cos 2x \\ &\quad + (\frac{3}{8}A^3 - \frac{12563}{59136}A^5) \cos 3x \\ &\quad + \frac{1}{3}A^4 \cos 4x + \frac{295}{768}A^5 \cos 5x \quad \dots (32) \end{aligned}$$

ここで、 $A(0 < A \leq 0.592)$ は波形を特徴づけるパラメータであり、 x は波数により無次元化した水平座標である。

本解析では、 A の値として0.2, 0.4, 0.5の3ケースを用いた。なお、各 A の値における解の周期と波高とをTable 1に示す。

また、本研究では以下に示すノルムに基づき解の精度を評価する。

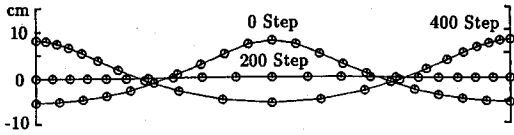


Fig.5 Profiles of the free surface at 0,200 and 400 time steps.

Table 2 Influence of element size on the accuracy.

	Mesh-1	Mesh-2	Mesh-3
A=0.2	0.27438	0.06707	0.01502
A=0.4	0.27927	0.07107	0.01781
A=0.5	0.30011	0.08704	0.02864

$$NORM = \sqrt{\sum_{Step} \sum_{Node} (\eta - \bar{\eta})^2 / \sum_{Step} \sum_{Node} \bar{\eta}^2 \dots \dots} \quad (33)$$

ここで、 η は計算された波高であり、 $\bar{\eta}$ は解析解である。また、 $\sum_{Step} \sum_{Node}$ は自由表面上の全節点および全ステップにおける値の総和を意味する。

(2) 空間方向の収束次数

4.(1) で空間方向の離散化次数について基礎的考察を与えた。ここでは解析結果に基づいて、要素長と解の収束次数との関係性を調べる。

解析に当り、境界要素の分割方法として、各辺5等分割:Mesh-1、各辺10等分割:Mesh-2、各辺20等分割:Mesh-3の3通りを用いた。

また、ここでは空間方向の収束次数の検討が目的であるため、計算過程において特に繰り返し計算は行わず、前ステップの解に基づいて評価した係数行列に対して式(22)を1回解いて得られた値を用いた。その代わり、時間積分に起因する誤差を可能な限り小さく抑えるために、いずれの計算においても、時間ステップ幅は $\Delta t = 0.001(sec)$ と十分短く設定し、1000ステップまで計算した。また、式(17)の時間積分における各パラメータの値は、 $\beta = 1/4, \gamma = 1/2$ とした。なお、 $A = 0.4, Mesh-3$ の計算での0,200,400ステップにおける水面形状をFig.5に示す。図中には自由表面上の節点位置も示した。0,400ステップは波高がほぼ最大となる時刻に、また200ステップはほぼ水平となる時刻にそれぞれ相当しており、400ステップ以降はほぼ200ステップ毎に水面形状、節点位置共にFig.5とほとんど一致するものとなった。Fig.5から、400ステップにおいて節点配置が最も局在していることがわかる。なお、このときの最長および最短要素長は10.4cmと2.2cmであり、その比は4.7であった。

$A = 0.2, 0.4$ および 0.5 の各ケースに対して、Mesh-1~Mesh-3の要素分割を適用して得た解の精度を5次の摂動解と比較した結果をTable 2に示す。

この結果より、いずれの問題においても要素長を1/2,1/4と短くとることにより、NORMの値がそれぞれ約1/4,1/16と減少して行く様子が認められる。

4.(1)において方程式の離散化における次数が二次となることを示したが、以上より、自由水面形状の収束次数も空間方向の離散化に対して二次であることが確かめられた。

(3) 非線形方程式の扱い方が精度に及ぼす影響

式(17)の陰解法を時間積分スキームとして用いる場合、離散化して得られる方程式は第nステップにおける未知境界値に関して非線形な式となる。本研究では、この非線形方程式の解を式(22)に基づいて求めている。式(22)に繰り返し計算を適用すれば、非線形な離散化方程式に対する収束解を得ることができる。一方、Nakayama & Washizu¹¹⁾は繰り返し計算を行わず、その代わりに各ステップで生ずる誤差の累積と解の発散とを防ぐ目的で誤差補正項を導入している。なお、文献11)では誤差補正項は自由表面の圧力方程式に対し適用されており、増分形で表した式を最終的に誘導している。一方、連立して解かれる境界要素方程式に対しては、前ステップの幾何形状に基づいて計算した係数行列が用いられている。

境界要素方程式も自由表面の幾何形状に関する非線形性を持っており、したがって、非線形方程式の扱いについては圧力方程式のみに対するだけでなく、境界要素方程式に対しても同様に議論する必要がある。そこで、式(22)に繰り返し計算を適用し、非線形解を求める場合を初め、文献11)のように誤差補正項を圧力方程式のみに導入する場合、および方程式全体に対して導入する場合などを対象に、スロッシング問題における非線形方程式の扱いが精度に及ぼす影響について調べた。

ここで比較の対象としたものは、以下の4ケースである。

Case-1:式(22)を繰り返し解き、非線形方程式の解を求める。

Case-2:繰り返し計算は行わず、前ステップの解に基づいて得た方程式(22)を一回だけ解く。

Case-3:繰り返し計算は行わず、誤差補正項を圧力方程式に対して適用する。

なお、本研究で構成した方程式においては次式が対象となる。

$$[C^n]\{\phi_i^n\} + [D^n]\{q_j^n\} = \{f^n\} + [K_1^n]\left\{\frac{DE^n}{Dt}\right\}$$

$$\{E^n\} = \{0\} \dots \dots \dots (34)$$

ここで、 $\{E^n\}$ は第nステップにおける自由表面上の誤差補正項である。

Case-4:繰り返し計算は行わず、誤差補正項を方程式全体に適用する。

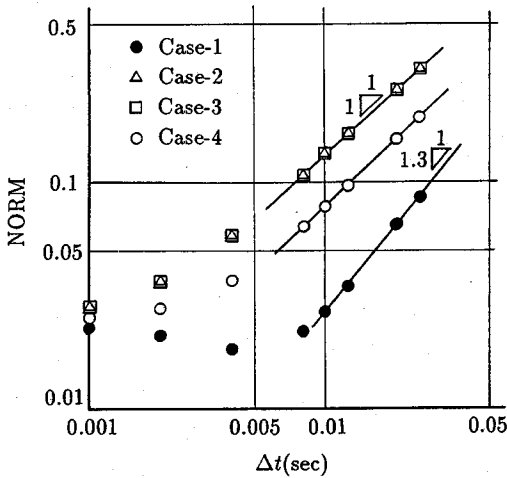


Fig.6 The relation between time increment and the norm.

本研究では次式を対象とする。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ff}^n & \mathbf{H}_{fw}^n & -\mathbf{G}_{ff}^n \\ \mathbf{H}_{wf}^n & \mathbf{H}_{ww}^n & -\mathbf{G}_{wf}^n \\ \mathbf{C}^n & \mathbf{0} & \mathbf{D}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_f^n \\ \phi_w^n \\ \mathbf{q}_f^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_f^n \\ \mathbf{h}_w^n \\ \mathbf{f}^n \end{bmatrix} + \left\{ \frac{D\mathbf{E}^n}{Dt} \right\}$$

$$\{\mathbf{E}^n\} = \{\mathbf{0}\} \dots \dots \dots (35)$$

ここで、誤差補正項 $\{\mathbf{E}^n\}$ は方程式全体に対応するベクトルである。なお、Case-3 では誤差補正項も重み付き残差式で離散化した。Case-4 においては境界要素方程式が選点法に基づき離散化されていることもあり、式 (35) のように各節点における誤差補正項の値を各行の方程式に対応づける形式をとった。

各ケースの計算に当り、底面のみ 10 等分割とし、他の辺を 20 等分割する離散化モデルを用いた。なお、繰り返し計算を用いる Case-1 では、次式に基づき各ステップでの収束判定を行った。

$$\sqrt{\frac{\sum[(x_i^n - \hat{x}_i^n)^2 + (\eta_i^n - \hat{\eta}_i^n)^2]}{\sum[(x_i^n - x_i^{n-1})^2 + (\eta_i^n - \eta_i^{n-1})^2]}} \leq \varepsilon \dots \dots \dots (36)$$

ここで、 $\hat{x}_i^n, \hat{\eta}_i^n$ は第 n ステップにおける一つ前の繰り返し計算で得た節点座標値である。なお、収束判定値として $\varepsilon = 0.01$ を用いた。

また、非線形自由振動を特徴づけるパラメータには $A = 0.4$ を、時間積分パラメータには $\beta = 1/4, \gamma = 1/2$ を用い、 $\Delta t = 0.001(\text{sec})$ から $\Delta = 0.025(\text{sec})$ の範囲で時間ステップ幅を設定し、1 sec までの現象を解析した。

各ケースで得た解の精度を Fig.6 に示す。Fig.6 より、Case-1 による解法が最も良好な精度を与えていることが認められる。また、NORM の収束次数も Case-1 では約 1.3 次であるのに対し、Case-2~4 ではいずれも 1 次と

なっており、繰り返し計算を用いることで時間ステップ幅に対する解の収束次数が幾分改善されていることが確かめられる。なお、4.(2) に示したように、1 ステップ間での局所的近似次数は $\gamma = 1/2$ において二次となるが、全ステップに亘る計算での次数は一般に局所次数以下となる。そのため、Case-1 での収束次数が二次より低下したものと考えられる。

なお、いずれのケースにおいても、 $\Delta t = 0.004(\text{sec})$ より短い時間ステップ幅において NORM が 2~3% の値に漸近しており、それ以上減少していない。これは、精度の評価基準に用いた解析解が 5 次の摂動解であり、これ自体誤差を有していることが原因である。

また、Case-2 と Case-3 における解の精度はほぼ等しく、誤差補正項を圧力方程式だけに導入しても精度の改善には殆ど効果がないことがわかる。一方、Case-4 では、収束次数は Case-2,3 と等しいものの、それらと比べ相対的に精度がよく、誤差補正項の効果が認められる。

以上より、本問題における非線形性は圧力方程式だけでなく、境界要素方程式にも存在するため、誤差補正項は方程式全体に適用する必要があることが明らかとなった。

(4) 計算時間に基づく検討

(3) では誤差に基づいた比較を行い、その結果 Case-1 の繰り返し計算を行う場合が最もよい精度を与えることを示した。しかし、Case-1 は他のケースと違い、各時間ステップにおいて何回かの繰り返し計算を必要とする。したがって、同一の時間ステップ幅に対しては、Case-1 による計算時間が他のケースのそれより長くなり、計算時間を考慮に入れると、Case-1 が最良とはならない場合も有り得る。そこで、計算時間と精度とを尺度に、再度各ケースの比較を行った。

比較検討の前に、Case-1 における各時間ステップでの収束計算に要した繰り返し回数について調べた。結果を Fig.7 に示す。なお、収束判定において最低 2 回の繰り返し計算が必要となるため、図では 3 回以上の繰り返し計算を示している。

Fig.7 より、時間ステップ幅の比較的長い $\Delta t = 0.02(\text{sec})$ を除けば、2,3 回の繰り返し計算で収束解を得ていることがわかる。なお、3 回以上の繰り返し計算が行われているのは、波形が水平軸に近づく最も粒子速度の速い時点の前後に集中している。また、時間ステップ幅が短いほど解の収束は速く、繰り返し回数が減少する傾向にある。

次に、解析に要した計算時間と NORM との関係を図 8 に示す。図には Case-1,2,4 に対する結果を示した。なお、連立方程式の求解には Gauss の消去法を用いているので、各繰り返し計算毎の求解過程に要する時間はほぼ一定である。

Case-1 では繰り返し計算が必要なので、同一の時間ス

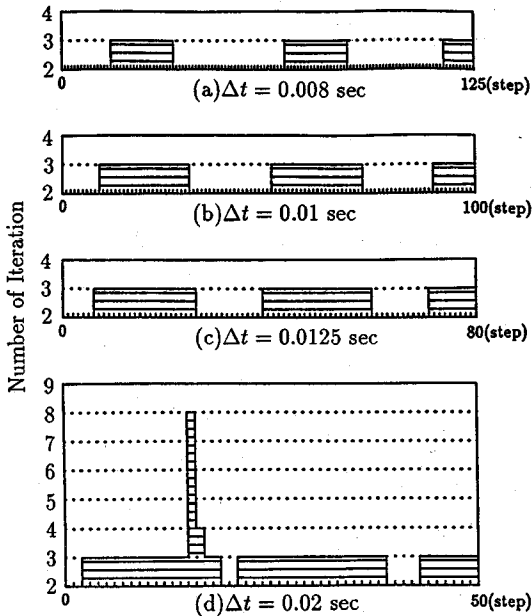


Fig.7 The number of iterations at each time step.

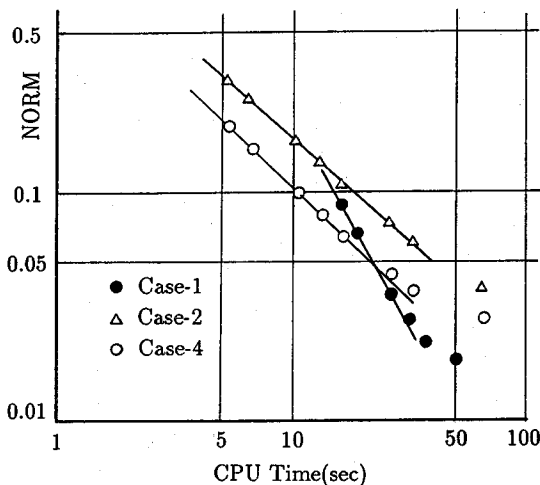


Fig.8 The relation between CPU time and the norm.

ステップ幅における計算時間は他のケースの 2~3 倍となり、比較的大きな NORM に対しては、Case-2,4 の方がより短い計算時間で所要の精度の解を与えている。しかし、計算時間に対する NORM の収束次数は Case-1 が他に比べて高いため、例えば Case-1 と Case-4 とを比較すると、5%以下の誤差に対しては Case-1 の方がより短い計算時間で所要の精度の解を与えている。

以上より、ある水準以上の精度の解に対しては、繰り返し計算を用いるの方が、誤差補正項を適用する場合に比べ、計算時間においても有利であることがわかる。

6. おわりに

二次元非線形スロッピング問題のための境界要素解析手法を構成した。境界要素方程式の誘導において、速度ポテンシャルと流束を区間線形関数で近似し、流束のみかど点で不連続となるようにとり、流束の不連続性を処理した。自由表面の運動は、砕波や任意形状の壁面を持つ容器内のスロッピングへの適用が容易な Lagrange 表記によった。自由表面上の境界条件は、重み付き残差式で離散化し、節点粒子速度と境界値との一対一の関係性を統一的に表現した。また、この関係式より、節点粒子速度および座標値を消去し、節点境界値を未知量とする圧力方程式を誘導した。この圧力方程式と境界要素方程式とを連立することにより、全境界上の速度ポテンシャルと自由表面上の流束とを未知量とした方程式を構成した。

理論的考察および数値解析により、ここに提案した手法の空間方向の収束次数が離散化方程式および水面形状に対し二次であることが確かめられた。

また、時間積分スキームには Newmark 法に準ずる陰解法を採用した。なお、圧力方程式における時間方向の局所次数は一次となるが、積分パラメータを $\gamma = 1/2$ とした場合には二次のオーダーを得る。

本研究で構成した方程式に基づき、スロッピング解析における非線形方程式の解き方について検討した。その結果、Nakayama & Washizu によって用いられた誤差補正項は圧力方程式だけでなく、境界要素方程式にも適用することで、その効果が向上することがわかった。また、繰り返し計算により、各ステップで非線形方程式の収束解を求める場合、同一時間ステップ幅に対する解の精度は誤差補正項を用いる場合より改善され、その収束次数もより高いものとなる。その結果、同一精度の解を得るために必要となる時間ステップ幅は、一般に繰り返し計算による方が大きくなることことができる。

また、繰り返し計算による場合、各ステップで 2,3 回の収束計算が必要となるが、上述のように所要精度に必要な時間ステップ幅を相対的に大きく設定することができるため、ある水準以上の精度の下では、最も短い計算時間で解を得ることができる。

なお、本論文では鉛直壁での解析例を示したが、本解法は Lagrange 記法に基づいているので傾斜壁の場合にも同様に適用可能である。

参考文献

- 1) Longuet-Higgins, M.S. and Cokelet, E.D.: The deformation of steep surface waves on water I. A numerical method of computation, *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 350, pp.1-26, 1976.
- 2) Boutros, Y.Z., Anwar, M.N. and Tewfick, A.H.: Application of boundary integral equation method for modelling unsteady nonlinear water waves, *Appl. Math. Modelling*, Vol.10, pp.11-15, 1986.

- 3) Vinje, T. and Brevig, P.: Numerical simulation of breaking waves, *Adv. Water Resources*, Vol.4, pp.77-82, 1981.
- 4) Soh, W.K.: Boundary element technique for flow visualization studies of nonlinear water waves, *Eng. Anal.*, Vol.4, pp.106-112, 1987.
- 5) Douglas, G. et al.: Deep-water plunging breakers: a comparison between potential theory and experiments, *J. Fluid Mech.*, Vol.189, pp.423-442, 1988.
- 6) Teles da Silva, A.F. and Peregrine, D.H.: Nonlinear perturbations on a free surface induced by a submerged body: a boundary integral approach, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.7, pp.214-222, 1990.
- 7) Grilli, S.T., Skourup, J. and Svendsen, I.A.: An efficient boundary element method for nonlinear water waves, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.6, pp.97-107, 1989.
- 8) Nakayama, T.: A computational method for simulating transient motions of an incompressible inviscid fluid with a free surface, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol.10, pp.683-695, 1990.
- 9) Faltinsen, O.M.: A numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two-dimensional flow, *J. Ship Res.*, Vol.22, pp.193-202, 1978.
- 10) Liu, P.L.-F., and Liggett, J.A.: Boundary element formulations and solutions for some non-linear water wave problems, Chapter 7, *Developments in Boundary Element Methods-3* ed Banerjee, P.K. and Mukherjee S., pp.171-190, Elsevier, 1984.
- 11) Nakayama, T. and Washizu, K.: The boundary element method applied to the analysis of two-dimensional nonlinear sloshing problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.17, pp.1631-1646, 1981.
- 12) Brorsen, M. and Larsen, J.: Source generation of nonlinear gravity waves with the boundary integral equation method, *Coast. Eng.*, Vol.11, pp.93-113, 1987.
- 13) 大山 巧・藤井邦雄: 2次元非線形スロッシング問題の境界要素解析, 構造工学論文集, Vol.35A, pp.575-584, 1989.
- 14) 井関俊夫・新開明二: 高次要素を用いた境界要素法による非線形スロッシング問題の解析, 日本造船学会論文集, 第163号, pp.294-302, 1988.
- 15) Ortiz, J.C. and Douglass, S.L.: Water wave modelling using a boundary element method with Overhauser spline elements, in *Boundary Elements XIII* (ed Brebbia, C.A. and Gipson, G.S.), pp.273-282, CMP/Elsevier, 1991.
- 16) 阿部和久・神尾忠弘: スロッシング問題における境界要素解の特性に関する一検討, BEM テクノロジー・コンファレンス論文集, pp.51-56, 1992.
- 17) Sugino, R. and Tosaka, N.: Direct differentiation approach to boundary element method for nonlinear water wave problems, *Proc. of IABEM-91* (eds S.Kobayashi and N.Nishimura), pp.314-323, 1991.
- 18) 大谷知未・大坪英臣・久保田晃弘: 境界振動を考慮した境界要素法によるスロッシング解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第15巻, pp.57-62, 1991.
- 19) Medina, D.E. et al.: A consistent boundary element method for free surface hydrodynamic calculations, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol.12, pp.835-857, 1991.
- 20) 塩尻弘雄・萩原 豊: 境界要素法による非線形スロッシング解析法, 電力中央研究所・研究報告:U88060, 1989.
- 21) Abe, K. and Kamio, T.: A boundary element formulation with Lagrangian particle description for two-dimensional nonlinear sloshing analysis, in *Boundary Elements XV*, Vol.1 (eds Brebbia, C.A. and Rencis, J.J.), pp.81-91, CMP/Elsevier, 1993.
- 22) Grilli, S.T. and Svendsen, I.A.: Corner problems and global accuracy in the boundary element solution of nonlinear wave flows, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.7, pp.178-195, 1990.
- 23) Newmark, N.M.: A method of computation for structural dynamics, *Proc. of ASCE, EM*, Vol.85, pp.67-94, 1959.
- 24) Salmon, J.R. Liu, P.L.-F. and Liggett, J.A.: Integral equation method for linear water waves, *Proc. of ASCE, HY*, Vol.106, pp.1995-2010, 1980.
- 25) Nachbin, A. and Papanicolaou, G.C.: The long time behaviour of a vectorized boundary element code for water wave problems, in *Advances in Boundary Elements* (ed Cruse, T.A.), pp.283-293, Springer-Verlag, 1988.
- 26) Liu, P.L.-F. and Liggett, J.A.: Numerical stability and accuracy of implicit integration of free surface groundwater equations, *Water Resources Res.*, Vol.16, pp.897-900, 1980.
- 27) Penney, W.G. and Price, A.T.: Part II. Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid, *Trans. R. Soc. Lond. A.*, Vol.244, pp.254-284, 1952.

(1993.9.2 受付)

TWO-DIMENSIONAL NONLINEAR SLOSHING ANALYSIS USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

Kazuhiisa ABE and Tadahiro KAMIO

A boundary element method to nonlinear analysis of free-surface motion in a two-dimensional container is developed based on the Lagrangian particle description. By using the weighted residual formulation to the relation between the velocity of the fluid particle and the gradient of the potential on the surface, a unifying formulation is obtained for the relation between the kinematic condition and the boundary values. A time integration scheme is constructed in accordance with the Newmark method. The proposed method with linear element provides second-order convergence in both space and time directions. Through numerical experiments, influence of the treatment of nonlinear equations on the accuracy is discussed.