

# Bスプライン関数を用いた鉄道縦断線設計の最適化モデル

叶 霞飛\*・青島縮次郎\*\*・宿 良\*\*\*

本論文では鉄道縦断線設計の最適化モデルを提案する。まず、二次Bスプライン関数を用い、地形変化の特徴を考慮した上で、コンピュータを用いて自動的に勾配変更点を定める方法を検討する。また、それをベースにし、不等間隔節点間の一次Bスプライン関数曲線により鉄道縦断設計線を表示した上で、Bスプライン基関数が最小局所的な台をもつ特徴を利用し、手作業で鉄道縦断線設計を行うプロセスに対して高速にシミュレートする最適化手法を提案する。さらに中国でのデータを用い、提案したモデルの実用性を検証する。

**Key Words** : railway profile design, optimization, B-spline function

## 1. はじめに

鉄道を建設するには巨額の投資がかかるので、特に発展途上国にとって、鉄道整備のコストをできる限り下げようとする線路設計を行うことは極めて重要なことである。そして、そのためには数多くの比較線路に関する数値的な評価の検討を行うことを必要とするが、しかし従来からの手作業に基づく処理計算では人間の計算能力や総合的な判断能力に限度があり、最適な線路位置を得ることができる保証はなかったと言えよう。これに対し、近年、計算技術とコンピュータ技術の進歩によって、コンピュータで最適な線路を探すことの優位性は高まっており、そのことから鉄道線路設計の最適システムを探索することが重要な課題となっているのである。鉄道線路の設計は三次元空間の問題であるが、それを二つの互いに関連する二次元空間の問題（すなわち鉄道平面線設計と鉄道縦断線設計）に分けて解くことは鉄道設計の現実的解決法である。この平面線設計と縦断線設計の相互関連を踏まえた鉄道線路設計の体系的な最適化モデルについては今後の最重要検討課題とし、本研究ではまず、体系的な最適化の一断面としての、ある鉄道平面線設計を与件としたときの鉄道縦断線設計問題を取り上げ、それに関する最適化モデルについて検討する。

さて、当該分野の既往研究のうちで主要なものを挙げると、まずは B.K. Малявский<sup>1)</sup> の提案になる勾配射影法による方法がある。本方法は新たな数学的展開を示した貴重な研究成果であるが、しかし自動的に勾配変更点を定める方法が検討されていないため、約 20 km の鉄道縦断線設計の最適化問題に説明変数が 200 以上、制約

条件が 800 以上もあることになり、計算時間がかなりかかるし、縮退する可能性もある。また、Amkeutz<sup>2)</sup>、E.P. CHEW<sup>3),4)</sup> は道路路線設計の最適化手法を提案しているが、コンピュータを用いて自動的に勾配変更点と最適解を求めるための出発点を定める手法に関して十分に触れていない。さらに、1970 年代から B スプライン関数の出現<sup>11)~16)</sup>によって、曲線近似に新たな道が開かれたので、それに基づいて、上海鉄道学院の研究グループ<sup>5)</sup>は二次 B スプライン関数による手法を提案した。しかし、この手法で得られた鉄道縦断線は必ずしもすべての制約条件を満たす保証はないという限界をもっていた。

そこで、本研究では上記の諸問題を解決するような鉄道縦断線設計の最適化モデルについて検討する。まず、実用的な鉄道縦断設計線型は連続的な折線であるので、数学的にそれをよく表現させるために、本研究では一次 B スプライン関数を取り入れる。即ち、2. では一次 B スプライン基関数の設定と一般的な表現式について述べる。そして、本研究では工事コストを目的関数としているが、地形に基づく横断面設計と橋梁設計の実状を考察し、実用性を失わない範囲内で、最適化の求解を容易にするように、3. で目的関数を分割二次型に定式化することを試みる。また、従来の研究<sup>11)~16)</sup>では勾配変更点は手作業によって求めるか、あるいは等間隔（例えば 100 m）の形で与えているが、しかし、前者は鉄道線路設計の体系的な最適化の実現を阻害することがあるし、後者については必ずしも実用的な勾配変更点となっていない場合がある。そこで本研究では、4. で二次 B スプライン関数の特徴を利用し、“変曲点ロケーション法”<sup>21)</sup>によって、制約条件と専門家の考え方を結び付け、勾配変更点を決めようとするものである。また、それらを踏まえて、従来からの制約付きの最適化方法を用いることなく、B スプライン基関数が最小局所的な台をもつという特徴を

\* 学生員 工修 群馬大学大学院工学研究科 博士後期課程 (〒376 群馬県桐生市天神町 1-5-1)

\*\* 正会員 工博 群馬大学教授 工学部建設工学科

\*\*\* 正会員 工博 群馬大学助手 工学部建設工学科

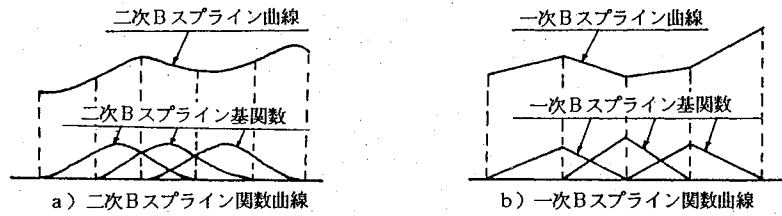


図-1 B スプライン基底関数とB スプライン曲線

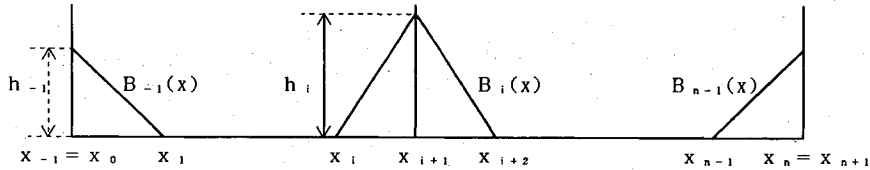


図-2 一次B スプライン基底関数の形式

利用し、手作業で鉄道縦断線設計を行うプロセスに対して高速にシミュレートする手法を提案する。さらに、5. ではケース・スタディとして、中国での二本の在来線に対して、提案したモデルを適用し、検証を行う。最後に、6. で主な結論と今後の課題について述べる。

2. 本研究におけるB スプライン関数の表現式

多項式スプライン関数とは節点で何らかの滑らかさを持つ区分的多項式のことである。それは区分的、低次の性質を持っているから、曲線の近似に大きな適応性があるが、最小局所的な台をもつ基底を用い、スプライン関数<sup>15), 16)</sup>を表現すれば、さらに便利となる。以下に述べようとするB スプライン関数はこのような性質を満たすもので、与えられた次数の最小個数の区間の台をもつスプライン関数である(図-1を参照)。二次B スプライン関数で地面線の回帰曲線を求めれば、よく実際の地面線の変化に当てはめることができるが、実用的な鉄道縦断線設計線型は一次B スプライン関数曲線(すなわち連続的な折線)である。以上の考察より、本研究ではまず、等間隔節点をベースとする二次B スプライン関数を利用し、地面縦断線の回帰曲線を求める。そして4. の(1)で説明するような“変曲点ロケーション法”<sup>21)</sup>を用いて地面縦断線の変曲点を決めた上で、専門家の考え方と設計条件を結び付け、勾配変更点を定める。それから、一次B スプライン関数を利用し、鉄道縦断線設計標高の最適化を行うところに本研究の特色がある。

(1) 基底関数の形成

鉄道縦断線設計を行う際の一次B スプライン節点(すなわち勾配変更点)  $X_i (i=0, 1, 2, 3, \dots, n)$  の間隔は一定ではないから、不等間隔節点となる。基底関数  $B_i(X) (i = -1, 0, 1, \dots, n-1)$  の形は図-2のようである。一つの基底関数の形は三角形であり、境界節点あるいは内部節点により区切られる区間にしか関連せず、それ以外は零

となる。また、それは最小局所的な台をもつ基底であり、すなわちいわゆる局所性をもつということになる。そのような性質により、後述のように、目的関数の最小解が高速に求まり、そして制約条件の処理が容易になるのである。さて、基底関数の表現式は次のとおりである<sup>15)</sup>。

a) 内部節点

$$B_i(X) = \begin{cases} \frac{h_i \cdot (X - X_i)}{(X_{i+1} - X_i)} & X \in (X_i, X_{i+1}) \\ \frac{-h_i \cdot (X - X_{i+2})}{(X_{i+2} - X_{i+1})} & X \in (X_{i+1}, X_{i+2}) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\int B_i(X) dX = 1/2$  とするならば、

$$(X_{i+2} - X_i) \cdot h_i / 2 = 1/2 \dots\dots\dots (2)$$

となり、すなわち

$$h_i = 1 / (X_{i+2} - X_i) \dots\dots\dots (3)$$

となる。よって、

$$B_i(X) = \begin{cases} \frac{(X - X_i)}{(X_{i+1} - X_i) \cdot (X_{i+2} - X_i)} & X \in (X_i, X_{i+1}) \\ \frac{-(X - X_{i+2})}{(X_{i+2} - X_{i+1}) \cdot (X_{i+2} - X_i)} & X \in (X_{i+1}, X_{i+2}) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

となる。

b) 境界節点

ここで、二重節点技術を利用して、境界節点に関する基底関数を形成する。左境界の節点を例として示すと、

$$B_{-1}(X) = \begin{cases} \frac{-h_{-1} \cdot (X - X_1)}{(X_1 - X_0)} & X \in (X_0, X_1) \dots\dots\dots (5) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる。また、 $h_{-1} \cdot (X_1 - X_0) / 2 = 1/2$  とすれば、 $h_{-1} = 1 / (X_1 - X_0)$  となる。すなわち、

$$B_{-1}(X) = \begin{cases} \frac{-(X-X_1)}{(X_1-X_0)^2} & X \in (X_0, X_1) \dots\dots\dots (6) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる。同じような方法で、

$$B_{n-1}(X) = \begin{cases} \frac{(X-X_{n-1})}{(X_n-X_{n-1})^2} & X \in (X_{n-1}, X_n) \dots\dots\dots (7) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

が得られる。

(2) 不等間隔節点の一次Bスプライン関数の一般的な表現式

基関数  $\{B_i(X)\} (i=-1, 0, 1, \dots, n-1)$  は節点の分布にしか関連しないから、節点(すなわち勾配変更点)が決まると、直ちに形成が可能となる。また、このような基関数は互いに線形独立であり、 $X_i (i=0, 1, 2, 3, \dots, n)$  を節点とする一次Bスプライン関数の基底の一組となっている。すなわち、 $X_i$  を節点とする任意の一次スプライン関数曲線は次式(8)によって表現することができる。

$$Y(X) = \sum_{i=-1}^{n-1} C_i \cdot B_i(X) \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $C_i (i=-1, 0, 1, \dots, n-1)$  は求めようとする一次Bスプライン基関数の未定係数である。

本研究では鉄道縦断設計線は一次Bスプライン曲線によって表現されるものとしているから、最適化問題とは設定された目的関数と制約条件の下で、これらの係数  $C_i$  を決めるということになる。また、その表現式(8)は簡明で、説明変数の数が少なく、そして一つの  $C_i$  の変化は曲線の局所の形状を変えるのみである。このような特徴を利用すると、手作業で鉄道縦断線設計を行うプロセスに対して高速、効果的にシミュレートすることが可能となる。

3. 鉄道縦断線設計の最適化における目的関数と制約条件

(1) 目的関数

本研究では工事コストを目的関数としており、その定式化のためには設計横断面面積が必要となるが、すべての設計横断面は表-1に示すように、盛り土、切取についてそれぞれ5種類に分けて考えることができる。ここで、 $h_K$  は  $K$  番目の横断面部における設計標高  $Y(\chi_K)$  と地面標高  $Wh_K$  の差であり、各種類の設計横断面面積は  $a(h_K) \cdot h_K^2 + b(h_K) \cdot |h_K| + c(h_K)$  で与えられる。そこで、工事コストを目的関数とする表現式は次のようになり、最適化とはこれを最小にすることである。

$$Q = \sum_{K=1}^{K_0} P(\chi_K) \cdot [a(h_K) \cdot h_K^2 + b(h_K) \cdot |h_K| + c(h_K)] \cdot \Delta\chi_K$$

$$+ \sum_{r=1}^{r_0} (e_r \cdot h_r^2 + f_r \cdot |h_r| + g_r) \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$Q$ : 工事コスト (円)

$P(\chi_K)$ :  $K$  番目の横断面部の工事単価 (円/m<sup>3</sup>)

$h_r$ :  $r$  番目の橋脚または橋台部の設計標高

$Y(\chi_r)$  と地面標高  $Wh_r$  との差 (m)

$\chi_K$ :  $K$  番目の横断面部のキロ程 ((m))

$\Delta\chi_K$ :  $K$  番目の横断面と  $K+1$  番目の横断面間の距離 (m)

$r_0$ : 橋梁の橋脚、橋台数の総和

$K_0$ : 横断面数の総和

$e_r, f_r, g_r$ : 主要な橋梁のタイプとスパンごとに、予め最小自乗法で得られた  $r$  番目の橋脚、または橋台の工事コストに関する係数

右辺第一項は盛り土と切取に関する工事コスト(土留のある横断面については、土留のコストも考慮する)であり、第二項は橋梁に関する工事コストである。また、式(8)より  $h_K = Y(\chi_K) - Wh_K = \sum C_i \cdot B_i(\chi_K) - Wh_K$ 、及び  $h_r = Y(\chi_r) - Wh_r = \sum C_i \cdot B_i(\chi_r) - Wh_r$  が得られ、これを式(9)に代入すると、

$$Q = \sum_{K=1}^{K_0} P(\chi_K) \cdot \{a(h_K) \cdot [\sum C_i \cdot B_i(\chi_K) - Wh_K]^2 + b(h_K) \cdot |\sum C_i \cdot B_i(\chi_K) - Wh_K| + c(h_K)\} \cdot \Delta\chi_K + \sum_{r=1}^{r_0} \{e_r \cdot [\sum C_i \cdot B_i(\chi_r) - Wh_r]^2 + f_r \cdot |\sum C_i \cdot B_i(\chi_r) - Wh_r| + g_r\} \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここで、 $(C_{-1}, C_0, \dots, C_{n-1})^t$  を変数ベクトル  $C$  に、 $C$  の二次項に関する係数項を行列  $E$  に、 $C$  の一次項に関する係数項をベクトル  $F$  に、定数項を  $G$  に書き直すと、式(10)は次の行列表現式(11)となる。

$$Q = \frac{C^t \cdot E \cdot C}{2} + F^t \cdot C + G \dots\dots\dots (11)$$

一次Bスプライン関数が局所的な台をもつという性質から、係数行列  $E$  は  $(n+1) \times (n+1)$  の三対角対称な帯行列となる<sup>15)</sup>。そして、横断面積係数  $a(h_K)$ ,  $b(h_K)$ ,  $c(h_K)$  は  $h_K$  を変数として与えられるものであるが、ある分類の横断面に対しては、その値が定数であるので、 $E, F, G$  の元は  $h_K$  による階段関数である。よって、式(11)は  $C_i$  に対する分割二次型である。

(2) 制約条件<sup>17), 18), 25)</sup>

鉄道縦断線設計に関する制約条件は主に最大勾配制約、隣勾配代数差の制約、設計標高の制約、勾配変更点間の長さの制約、及び縦断曲線と緩和曲線間の制約などである。その内、勾配変更点間の長さ制約は勾配変更点の位置を決める過程で解決され、縦断曲線と緩和曲線間の制約は勾配変更点の移動プログラムによって解決される。その他の制約は最適化の過程で満たされることにな

表一 設計横断面面積係数の計算式

分類	設計横断面図式(盛り土)	設計横断面面積係数の計算式
I		$dd=1+\{1-(\beta_k \times am1)^2\}$ $a(h_k)=am1 \times dd$ $b(h_k)=2 \times cb1 \times dd$ $c(h_k)=am1 \times (\beta_k \times cb1)^2 \times dd$
II		$dd=1+\{1-(\beta_k \times am3)^2\}$ $a(h_k)=am3 \times dd$ $b(h_k)=2 \times (cb1 - h1 \times (am3 - am1)) \times dd$ $c(h_k)=(am3 \times (\beta_k \times cb1)^2 + h1 \times (am3 - am1) \times (h1 - \beta_k^2 \times am3 \times (am1 \times h1 + 2 \times cb1))) \times dd$
III		$dd=1+\{2 \times (1 + \beta_k \times am1) \times (1 - \beta_k \times am3)\}$ $dt1=am1 \times h1 + cb1$ $a(h_k)=(am1 + am3) \times dd$ $b(h_k)=(2 \times cb1 - (h1 + \beta_k \times dt1) \times (am3 - am1)) \times 2 \times dd$ $c(h_k)=\{(am1 + am3) \times (\beta_k \times cb1)^2 + h1 \times (am3 - am1) \times (1 + \beta_k \times am1) \times [h1 - \beta_k \times (am1 \times h1 + 2 \times cb1)]\} \times dd$
IV		$dd=1+(1-\beta_k \times am1)$ $dt1=1+(1-\beta_k \times am2)$ $a(h_k)=(dd+dt1)+(2 \times \beta_k)$ $b(h_k)=cb1 \times dd - cb2 \times dt1$ $c(h_k)=0.5 \times \beta_k \times (cb1^2 \times dd + cb2^2 \times dt1)$
V		$dd=1+(1-\beta_k \times am3)$ $dt1=1+(1-\beta_k \times am2)$ $a(h_k)=(dd+dt1)+(2 \times \beta_k)$ $b(h_k)=(cb1 - h1 \times (am3 - am1)) \times dd - cb2 \times dt1$ $c(h_k)=\{[\beta_k \times cb1^2 + h1 \times (am3 - am1) \times (h1 - \beta_k \times (am1 \times h1 + 2 \times cb1))] \times dd + \beta_k \times cb2^2 \times dt1\} + 2$

注:図の中で、1:am1, 1:am2, 1:am3は設計横断下り勾配で、 $\beta_k$ は地面の横勾配で、cb1は路整幅の半分で、h1は上部盛り土の高さである。また、表の中の盛り土横断面の面積係数の計算式におけるcb1, am1, am3, h1を切取横断面のh'に代入すると、切取横断面の面積係数の計算式になる。

る。

一般的に以上のような制約付きの最適化問題は二次計画法<sup>20)</sup>などの標準的な最適化手法によって解かれるが、しかし、そのような手法を利用すると、勾配などの制約条件をスラック変数の導入によって等式制約条件に変えなければならないとなり、上述の最適化問題が一層複雑になる。そこで本研究では、手作業による鉄道縦断線設計の過程を考察した上で、一次Bスプライン関数が局所的な特性をもつ性質を十分に利用し、制約条件を満たし、かつ目的関数値を最小にするような高速、効率のよい手法を提案するものである。

#### 4. 最適な鉄道縦断線の求解

##### (1) 勾配変更点の決定

二次Bスプライン関数に基づく鉄道縦断線設計の最適化に関する既往研究<sup>9)</sup>によれば、二次Bスプライン関数の節点を地形縦断線の変曲点にとるべきであるとし、そして、その研究で求めた最適な二次曲線上の各節点にお

ける接線を実用的な縦断線にしようとするものであった。一方、本研究では鉄道縦断設計線は一次Bスプライン曲線によって表現されるとしているから、予め一次Bスプライン関数の節点(すなわち勾配変更点)を決める必要がある。そのために、本研究では上述の二次Bスプライン関数に基づいた研究成果、即ち各勾配変更点はその隣節点の中心点にあるということを利用し、地形縦断線の隣変曲点の中心点をベースに、制約条件と専門家の考え方を結び付けて、勾配変更点を決めるのである。

まず、地形変化の特徴をよく反映するように、等間隔節点をベースとする二次Bスプライン関数<sup>14)~16)</sup>を用い、残差の自乗和最小法<sup>15)</sup>で地形縦断線の回帰曲線を求める。

次には、三角形“屋根型”関数を重みとし、重み付け平均法<sup>21), 24)</sup>により、節点ごとに等間隔節点の二次Bスプライン回帰曲線の標高に対し、平滑化<sup>21), 23)</sup>を行う。ここで、図-3に示されている三角形“屋根型”関数は次式(12)によって定義される<sup>21), 22)</sup>。

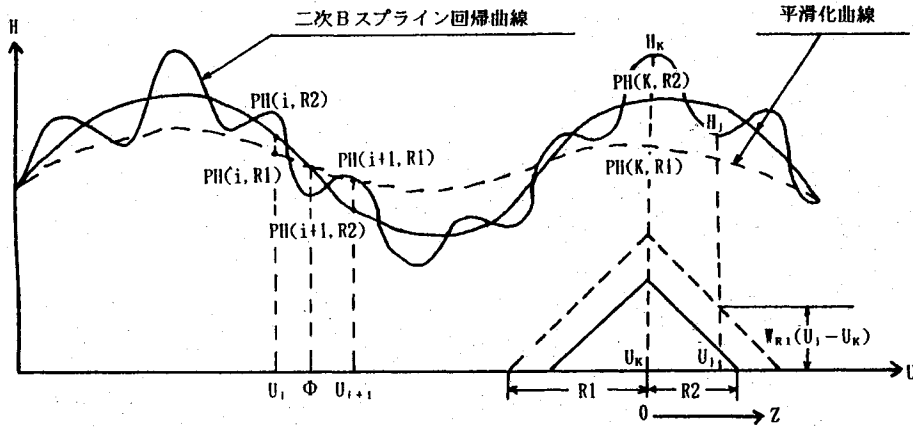


図-3 変曲点ロケーション法略図

$$W_R(Z) = \begin{cases} R-|Z| & |Z| < R \\ 0 & |Z| \geq R \end{cases} \dots\dots\dots(12)$$

ここで、 $R=R1, R2$ 。また、図-3に示しているように、 $U_j(j=0, 1, \dots, N)$ を上述の二次Bスプライン関数の節点とし、半径を $R$ とする三角形“屋根型”関数を用いることにより、節点 $U_k$ に対する標高 $H_k$ の平滑化式<sup>21), 23)</sup>は次の式(13)である。

$$\left. \begin{aligned} PH(K, R) &= \sum_{U_j \in (U_k-R, U_k+R)} W_R(U_j - U_k) \cdot H_j / AK \\ AK &= \sum_{U_j \in (U_k-R, U_k+R)} (U_j - U_k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

ここで、 $PH(K, R)$ は節点 $U_k$ に対し、半径 $R$ の三角形“屋根型”関数により平滑化された標高である。三角形関数の半径によって、平滑化曲線の結果は多少異なるが、地形変化の特徴に従って、いくつかの平滑化曲線は大体同じような波長を持ち、同じ変曲点の近傍で交差することが明らかとなっている<sup>21)</sup>。本研究では、このような交差点を地形縦断線の変曲点としている。図-3に示している $\Phi$ なる点は求めようとする変曲点の一つである。このようにして変曲点を求める方法は“変曲点ロケーション法”と呼ばれている<sup>21)</sup>。本研究ではこうして得られる隣変曲点の中心点を鉄道縦断設計線の仮の勾配変更点にするのである。

最後に、中国と日本との鉄道設計基準<sup>17), 18), 25)</sup>の特性を踏まえて、上で得られた仮の勾配変更点をベースにし、鉄道縦断線設計の制約条件と専門家の考え方を結び付けて、最終の勾配変更点の位置を決めることになる。その基本的な考え方は次のとおりである。

ステップ1: トンネル、橋梁、駅などの建築物がある位置に、勾配変更点を調整する。例えば、トンネルの両端には通常、それぞれ一つの勾配変更点を設ける。

ステップ2: 勾配変更点間の長さの制約が満たされない

場合、もしその長さが制約に接近するならば、勾配変更点移動プログラムによって勾配変更点位置の調整を行う。一方、その長さが制約より小さすぎるならば、勾配変更点数を減少することがある。

ステップ3: 勾配変更点間の長さがあまりに大きい場合、適当に勾配変更点数を追加することがある。

(2) 分割化探索法による制約無しの場合の求解

目的関数式(11)は各分割区域内で、すべて正定値二次型であり、また、その係数行列 $E$ は三対角線の対称行列であるから、三対角線代数方程式を通じて、追い掛け法でその最小解を求めることができる。但し、最初は各横断面部における $h_k$ が分からないので、 $a(h_k)$ 、 $b(h_k)$ 、 $c(h_k)$ の計算式の選択ができない。そこで、式(11)の最小解を求めるために、本研究では最初にある初期値を与え、初期解を求める。そして、その初期解を本ステージの最小解の求解の出発点とし、それに対する式(11)の最小解を求める。それから、下記に示すアルゴリズムに基づき、次々に各ステージの出発点を作成し、さらにそれに対する最小解を求める。もし、あるステージで、出発点とそれに対する最小解が同じ分割区域に属したならば終了する。その求解のアルゴリズムは次のとおりである。

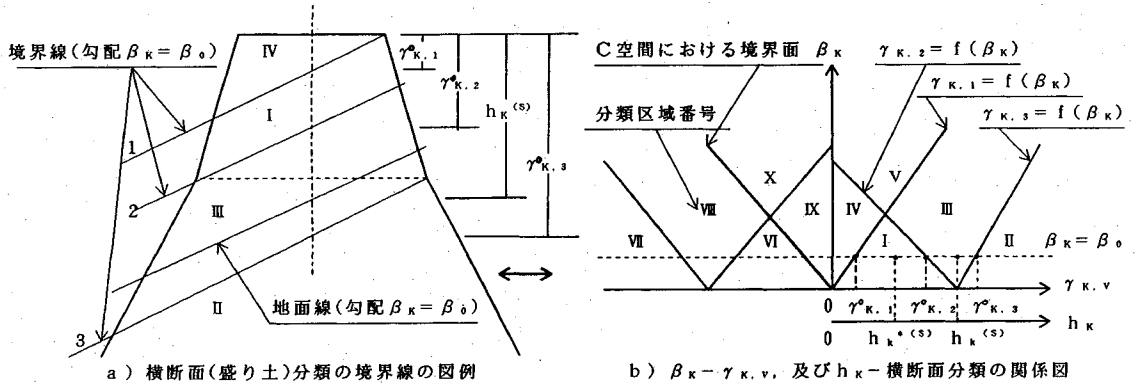
a) 出発点の決定

まずは式(10)に対し、

$$\frac{\partial Q}{\partial C_i} = 0 \quad (i = -1, 0, 1, \dots, n-1) \dots\dots\dots(14)$$

より、次の線形代数方程式(15)が得られる。

$$\sum_{j=-1}^{n-1} \left[ \sum_{k=1}^{K_0} P(\chi_k) \cdot a(h_k) \cdot B_i(\chi_k) \cdot B_j(\chi_k) + \sum_{r=1}^{K_0} e_r \cdot B_i(\chi_r) \cdot B_j(\chi_r) \right] \cdot C_j$$



図—4 横断面の分類区域図

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{K_0} P(\chi_k) \cdot B_i(\chi_k) \cdot [a(h_k) \cdot Wh_k \\
 &\quad - b(h_k) \cdot \text{sign}(h_k) / 2] \\
 &\quad + \sum_{r=1}^{r_0} B_i(\chi_r) \cdot [e_r \cdot Wh_r - f_r \cdot \text{sign}(h_r) / 2] \\
 &\quad (i = -1, 0, \dots, n-1) \dots \dots \dots (15)
 \end{aligned}$$

但し、

$$\text{sign}(h_k) = \begin{cases} 1 & h_k > 0 \\ 0 & h_k = 0 \dots \dots \dots (16) \\ -1 & h_k < 0 \end{cases}$$

ここで、 $a(h_k) = 1$ ,  $b(h_k) = c(h_k) = 0 (K = 1, 2, \dots, K_0)$  の初期値を与えて、式 (15) を解くと、

$$C^{(1)} = (C_0^{(1)}, C_1^{(1)}, \dots, C_{n-1}^{(1)})'$$

という初期解が得られ、これを第一番目のステージの出発点とする。  $C^{(1)}$  より、 $h_k^{(1)} (K = 1, 2, \dots, K_0)$  を求め、さらに表—1 に示しているような各横断面の分類を判断する。 図—4 の a) は盛り土横断面分類の境界線を表す図例であり、その中で、 $h_k^{(s)}$  はステージ  $S$  の  $K$  番目横断面部の設計標高と地面標高の差であり、 $\gamma_{k,v}^0 (V = 1, 2, 3)$  は  $K$  番目横断面部における地面勾配  $\beta_k$  を  $\beta_0$  とするときの設計線の高さと  $V$  番目境界線間の高さの差である。このような分類図は横断面ごとに一枚ずつある。また、図—4 a) を見て分かるように、 $\beta_k$  の値によって  $\gamma_{k,v}^0$  の値が異なり、その両者間の関係は図—4 の b) に示されている  $\gamma_{k,v} = f(\beta_k)$  という直線で表すことができる。このような分類直線は  $C$  空間における境界面に相当する。この図に基づき、ある  $h_k$  を与えると、それに対する  $K$  番目横断面の分類がわかる。例えば、図—4 の b) はステージ  $S$  の出発点  $C^{(s)}$  と、それに対する最適解  $C^{*(s)}$  による  $K$  番目の横断面がそれぞれ分類 III 区域 ( $h_k^{(s)}$  により) と分類 I 区域 ( $h_k^{*(s)}$  により) にあることを示す例である。言い換えれば、それはステージ  $S$  の出発点  $C^{(s)}$  による横断面  $K$  の分類区域と、それに対する最適解  $C^{*(s)}$  による横断面  $K$  の分類区域が異なること

を示している。ここで、 $C^{(s)}$  に対するすべての横断面の分類から構成される区域をステージ  $S$  の出発点分割区域と呼ぶ。

b) 最適解の探索

次には、a) で得られた出発点  $C^{(1)}$  から、 $h_k$ 、及び  $a(h_k)$ 、 $b(h_k)$ 、 $c(h_k)$  を計算して、それらを式 (15) に代入し、それに対応する解を得ることになる。但し、このようにして得た解はその出発点分割区域を越える可能性があるから、新たな分類情報を提供する必要がある。

そこで、第  $S$  番目のステージの出発点を

$$C^{(s)} = (C_{-1}^{(s)}, C_0^{(s)}, \dots, C_{n-1}^{(s)})'$$

とし、判断と計算のステップを示すと、以下のようになる。

ステップ 1:  $h_k^{(s)} = \sum_i C_i^{(s)} \cdot B_i(\chi_k) - Wh_k$

( $K = 1, \dots, K_0$ ) を計算して、それを保存しておく。

各横断面部の地面線の横勾配  $\beta_k$  は予め分かっているから、 $C^{(s)}$  に対応する各  $h_k^{(s)} (K = 1, \dots, K_0)$  より、各横断面における分類区域を決めることができる (図—4 を参照)。そして、各横断面の分類情報を保存しておき、次のステップでの判断に使うこととなる。

ステップ 2:  $a(h_k)$ 、 $b(h_k)$ 、 $c(h_k) (K = 1, 2, \dots, K_0)$  を計算する。

ステップ 3: 式 (15) に基づいて解くと、係数ベクトル  $C$  が得られる。この  $C$  は出発点分割区域の正定値二次型に対応する制約無しの解であり、そのステージの最適解  $C^{*(s)}$  である。

ステップ 4:  $h_k^{*(s)} = \sum_i C_i^{*(s)} \cdot B_i(\chi_k) - Wh_k$

( $K = 1, \dots, K_0$ ) を計算して、 $h_k^{*(s)}$  によって、 $C^{*(s)}$  が属する分割区域を判断する。具体的な判断は各横断面で行っている。もし、すべての  $K$  に対し、 $C^{*(s)}$  と  $C^{(s)}$  が同じ分割区域に属すれば、求解の過程は終わる。

すなわち、制約無し最適解を得たことになる。もし同じ分割区域に属さなければ、次のステップ5に行く。

ステップ5: 最適解の方向が境界面に留まるかどうかの判定を行う。

まず、次式(17)によって \$C^{(S)}\$ から \$C^{\*(S)}\$ まで分割区域が変わるようなあらゆる横断面を捜す(図-4を参照)。

$$\Delta = (h_K^{(S)} - \gamma_{K,V}) \cdot (h_K^{*(S)} - \gamma_{K,V}) \dots (17)$$

$$(K=1, 2, \dots, K_0; V=1, 2, \dots, T)$$

もし、\$\Delta < 0\$ ならば、\$K\$ 番目の横断面の分類区域が変わったわけである。

また、次式(18)によって、

$$S_m = \min_{k,v} \frac{\gamma_{k,v} - h_k^{(S)}}{h_k^{*(S)} - h_k^{(S)}} \dots (18)$$

\$C^{(S)}\$ から \$C^{\*(S)}\$ まで、最も早く分類区域が変わった横断面を捜すことができる。

次に、もし、今回のステージと前回のステージの中で、最も早く分類区域が変わった横断面の番号が同じであり、かつ探索方向が逆になったら、最適解の方向がその境界面に留まっていると考えることができる。その時、ステップ6に行く。そうでない場合、\$C = C^{(S)} + S\_m \cdot (C^{\*(S)} - C^{(S)})\$ を次のステージの出発点にし、必要な計算を行い、ステップ3にもどる。

ステップ6: 最適解の方向が境界面に留まる時の最適解の求め方は次のとおりである。

ここでは、その境界面で条件極限値のラグランジュ法を用い、その解を求める。

$$\text{目的関数: } Q = \frac{C^t \cdot E \cdot C}{2} + F^t \cdot C + G \dots (19)$$

$$\text{境界面制約: } B^t \cdot C - d = 0 \dots (20)$$

但し、\$B = B(\chi\_{Km}^{(S)}) = (B\_{-1}(\chi\_{Km}^{(S)}), B\_0(\chi\_{Km}^{(S)}), \dots, B\_{n-1}(\chi\_{Km}^{(S)}))^t\$ は \$n+1\$ 次元ベクトル、\$d = Wh\_{Km}^{(S)} + \gamma\_{Km,v}^{(S)}\$、\$Km\$ は分類区域が最も早く変わった横断面番号、\$Wh\_{Km}^{(S)}\$ は \$Km\$ 番目の横断面部の地面標高である。また、この問題をラグランジュ関数で表現すると、

$$L(C) = \frac{C^t \cdot E \cdot C}{2} + F^t \cdot C + G + \mu(B^t \cdot C - d) \dots (21)$$

$$\nabla L(C) = E \cdot C + F + \mu B \dots (22)$$

となる。ここで、\$\mu\$ はラグランジュ因子である。これにより、この問題を解く方程式は

$$\begin{cases} E \cdot C + F + \mu B = 0 \\ (B^t \cdot C - d) = 0 \end{cases} \dots (23)$$

となる。

式(23)より、境界面制約付き最適解 \$C\$ を得ることができる。すなわち、

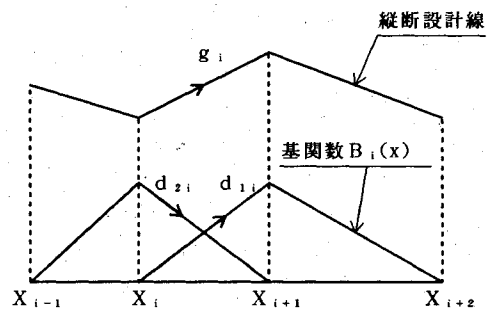


図-5 基関数勾配と縦断設計線勾配

$$C = C^{*(S)} + \frac{d - B^t(\chi_{Km}) \cdot C^{*(S)}}{B^t(\chi_{Km}) \cdot C_d^{(S)}} C_d^{(S)} \dots (24)$$

となる。但し、\$C\_d^{(S)} = E^{-1} \cdot B(\chi\_{Km})\$

$$C^{*(S)} = -E^{-1} \cdot F$$

そして、この \$C\$ を \$C^{\*(S)}\$ に代えて、ステップ4にもどる。

以上のような繰り返しを行い、ステップ4の終了条件を満たすまで計算する。最後に得た制約無し最適解を制約付き最適解を求めるための出発点とし、この出発点から制約条件の満足と目的関数の最適化の間の交替処理を行うことになる。

言及すべきことは、目的関数の最適化の過程が分割探索であり、分割情報が絶えず変わっているから、解こうとする三対角線対称方程式組の左辺の係数行列 \$E\$ と右辺の自由項ベクトル \$F\$ もそれに伴って変化するというのである。しかし、毎回の探索は一つの横断面の情報を変えるだけだから、一次Bスプライン関数の局所性質に従えば、このような情報の変化は \$E\$ の三つの成分(対称であるから)と \$F\$ の二つの成分を直しさえすればすむこととなる。よって、本研究で提案しているこの手法は便利であるだけでなく、それと同時に、計算量を大いに減少させることができるのである。

### (3) 種々の制約条件からの検討

#### a) 最大勾配の制約条件

図-5に示しているように、勾配変更点 \$X\_i\$ と \$X\_{i+1}\$ 間の縦断設計線の勾配 \$g\_i\$ は

$$g_i = C_{i-1} \cdot d_{2i} + C_i \cdot d_{1i} \dots (25)$$

となる。但し、\$d\_{1i}\$、\$d\_{2i}\$ はそれに対応する基関数の勾配である。

ここで、許される最大勾配を \$i\_x\$ とし、もし \$|g\_i| > i\_x\$ になったら、最大勾配の制約条件は満たされなかったことになる。そこで、\$C\_{i-1}\$、\$C\_i\$ を調整することによって、次式(26)を成立させる。

$$C_{i-1} \cdot d_{2i} + C_i \cdot d_{1i} = \text{sign}(g_i) \cdot i_x \dots (26)$$

まず、\$C\_{i-1}\$、\$C\_i\$ 中のどれかを固定し、他の一つを調整する。もし、\$C\_{i-1}\$ を固定し、\$C\_i\$ を調整したら、式(26)より、

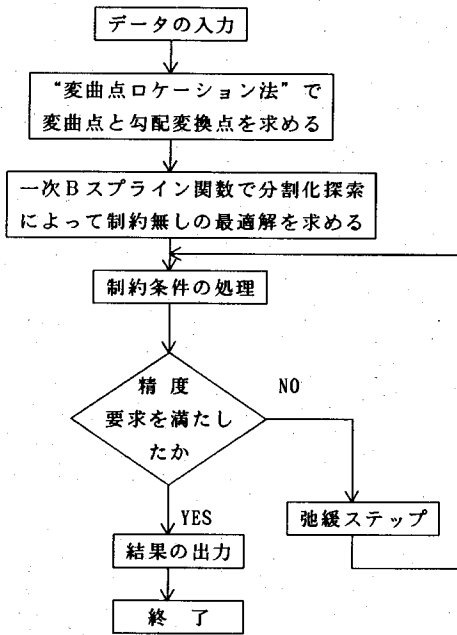


図-6 鉄道縦断線設計の最適化概要フロー

$$C_i^* = \frac{\text{sign}(g_i) \cdot i_x - C_{i-1} \cdot d_{2i}}{d_{1i}} \dots (27)$$

を得ることができる。また、 $C_i$  を固定し、 $C_{i-1}$  を調整したら、

$$C_{i-1}^* = \frac{\text{sign}(g_i) \cdot i_x - C_i \cdot d_{1i}}{d_{2i}} \dots (28)$$

を得ることができる。

式 (27)、式 (28) の調整の意味するところは、それぞれ制約条件を満足していない所から、右への勾配の調整、あるいは左への勾配の調整を通じて、当該箇所の勾配制約を満足させるということである。制約条件を満足させる過程で、二種類の方式を使い分け、交替して使うと、設計された線路は地面線によく近似するし、切取と盛り土のバランスがとれてくるのである。そこで、本研究ではこの目的を達成するように、弛緩の方法を利用する。すなわち、

$$C^{**} = C_i + K_c \cdot (C_i^* - C_i) \dots (29)$$

$$C_{i-1}^{**} = C_{i-1} + K_c \cdot (C_{i-1}^* - C_{i-1}) \dots (30)$$

という弛緩の量を新しい変数の調整値とすればよいのである。ここで、 $K_c (0 < K_c < 1)$  は調整因子である。

以上のように、本研究では一次Bスプライン関数の最小局所的な台をもつ性質を利用しているので、手作業による制約条件の処理にシミュレートすることが可能となっている。よって、本研究で提案している手法は直観的理解を容易にするし、また効率的であると言える。

b) 隣勾配間の代数差の制約条件

この制約条件及び標高制約条件を満たす方法は a) と

表-2 ケースの計算結果 (単位万円)

単位:万円

線 別		線路-1	線路-2
手 作 業 設 計	切取・盛り土	11,432	8,144
	橋梁	1,772	2,476
	トンネル	7,335	4,350
	土留	43	332
	合計	20,582	15,302
最 適 化 設 計	切取・盛り土	11,330	8,096
	橋梁	1,640	2,388
	トンネル	7,432	4,300
	土留	22	296
	合計	20,422	15,080
節約コスト		160	222

同様であるため、ここでは省略する。

(4) 弛緩交替法を用いた制約付き最適解の求解

(2) で求めた制約無し最適解  $C_0$  は目的関数最小値であるが、それが制約条件を満足するように処理を行うと、目的関数値がある程度大きくなってしまふ。それは制約条件を満足させる時に、縦断設計線が地面線に近い位置からわずかながら離れてしまうからである。本研究では、求めた制約付き最適解  $C$  が  $C_0$  から離れている程度をできるだけ小さくするように、制約条件を弛緩した。その基本的な弛緩交替公式は次のとおりである。すなわち、

$$C_{K+1}^R = C_K + \alpha \cdot (C_0 - C_K) \dots (31)$$

ここで、 $C_K$  は制約を満たした  $K$  番目の反復ステップの解であり、 $C_{K+1}^R$  は制約を満たさない  $K+1$  番目の反復ステップの出発点であり、 $\alpha$  は弛緩因子である。

そして、 $C_{K+1}^R$  より新たに制約条件を満たすような解  $C_{K+1}$  を得ることになるのである。このように繰り返して、交替調整を行って、その解が精度要求を満たしたら、終了となる。

以上、本モデルのフローチャートを示すと図-6 のようになる。

5. ケース・スタディ

本モデルの実用性を検証するために、ケース・スタディとして、中国において手作業で設計し、設計の品質が非常に良いと考えられている在来線路を二本取り上げ、鉄道縦断線設計の最適化を行った。その結果の概要を次に述べる。

今回のケース・スタディに用いた対象線路は丘陵地帯にあり、ケース線路1は長さが約19 km、駅数は三つ、駅間数は二つ、橋梁は6ヶ所、トンネルは4ヶ所である。また、ケース線路2は長さが約11 km、駅数は二つ、駅間数は一つ、橋梁は8ヶ所、トンネルは2ヶ所である。



本ケース・スタディの計算条件は次に挙げるとおりである。

- ①許された縦断設計線の最大勾配：いずれも 6‰。
- ②許された隣勾配最大代数差：いずれも 6‰。
- ③駅部における最大制約勾配：2.5‰。
- ④隣勾配変更点間の最小長：400 m。
- ⑤トンネル部の排水のためのトンネル部における縦断設計線の勾配は 3‰ 以上である。
- ⑥トンネル、橋梁、駅、曲線部などにおける縦断設計線の最大勾配制約は中国国家標準「鉄道線路設計規範」に従って決める。
- ⑦土工コスト：切取 100 円/m<sup>3</sup>、盛り土 60 円/m<sup>3</sup>。
- ⑧トンネルコスト：その長さとしてそれに相応する 1 m あたりのコストとの積によって求める。
- ⑨橋梁コスト：予め最小自乗法で得た各橋梁の種類に相応する計算式によって求める。
- ⑩各横断面部における地面の横勾配は片勾配と仮定する。
- ⑪トンネル部における縦断設計線はそのトンネルの近傍にある明かり区間の設計線によって決める。

以上の計算条件をベースにし、本研究で提案しているモデルに相応する鉄道縦断線設計の最適化 FORTRAN プログラムを用い、HP 9 000/840 コンピュータによって、対象ケース線路の検証を行った。そして、手作業による縦断線設計の結果と比較するために、最終の工事コストの計算は全く同じ精度及び同じ条件で行った。その計算結果は表-2 に示すとおりである。

以上の計算の結果から次の点が考察される。

まず第一に、本モデルを用いて鉄道縦断線設計の最適化を行うと、手作業による高品質な設計よりもさらに工事コストが節約できることが明らかとなった。また、手作業による線路設計の品質は鉄道設計者の経験と能力によって多分に異なるわけであるが、本モデルによる線路設計は鉄道設計者の経験と能力にそれほど左右されることなく、本モデルに基づいてコンピュータで自動的に線路設計を行うことによって、その品質を保証することができると考えられる。

第二には、手作業による線路設計はかなりの時間がかかり、例えば、本ケース線路のような設計は少なくとも 2 週間以上はかかる。一方、本モデルを利用すると、数分間しかかからない。つまり、本モデルの実用化は人件費を節約するし、設計にかかる時間も大いに短縮できる。

## 6. 結 論

本研究では鉄道線路設計において重要な位置を占める鉄道縦断線設計の最適化モデルについて検討した。それに基づき、本モデルの特徴を整理すると次のようになる。

- 1) 本モデルでは変曲点ロケーション法に基づき、制

約条件と専門家の考え方を結び付けて、勾配変更点をコンピュータで自動的に決める方法を提案した。

2) 本モデルでは従来型の制約付きの最適化方法を用いず、B スプライン基関数が最小局所的な台をもつ特徴を利用し、手作業で鉄道縦断線設計を行うプロセスに対して高速にシミュレートする手法を提案した。

3) 本モデルを用い、鉄道縦断線設計を行うと、工事コストと人件費が節約できるし、設計の時間も大いに短縮できることが分かった。

4) 本モデルは高速処理が可能であるという特徴を持っており、その点での鉄道線路設計全体の最適化を実現するための重要な条件を提供した。

今後の課題としては、まずは勾配変更点の取り方（平滑化や勾配変更点間の距離の取り方を含む）によって、計算結果が異なることが考えられ、このことから最適な勾配変更点の決め方についてはさらに検討する必要がある。また、本研究では特に体系的な最適化の一断面としての鉄道縦断線設計の最適化モデルについて検討したが、鉄道線路設計の問題を総合的に解決するために、今後は鉄道平面線設計と鉄道縦断線設計の相互関連を踏まえた鉄道線路設計の体系的な最適化モデルを構築していく必要がある。

最後にこの研究を行うにあたり、ご協力を頂いた中国上海鉄道学院呂益恕教授と許玉徳講師、及びこの論文を作成する際に、お世話になった群馬大学工学部川島俊美教務員にお礼を申し上げる。

## 参 考 文 献

- 1) Б.К. Малявский : Использование математических методов оптимизации и эвм при проектировании продольного профиля железных дорог, Трансжелдориздат, 1977.
- 2) Amkeutz, Emde, Hamester : "EPOP-I (Entwurfsfindung und Optimierung im Strassenbau Benutzerhandbuch)" Beratende Ingenieure Heusch/Boesefeldt, Aachen, 1980.
- 3) E.P. Chew, C.J. Goh, and T.F. Fwa : Simultaneous optimization of horizontal and vertical alignment for highways, Transpn. Res, Vol.23 B, No.5, pp.315~329, 1989.
- 4) C.J. Goh, E.P. Chew, and T.F. Fwa : Discrete and continuous models for computation of optimal vertical highway alignment, Transpn. Res, Vol.22 B, No.6, pp.399~409, 1988.
- 5) 上海鉄道学院他：用 B 様条関数作縦断面線最適化設計程序簡介，鐵路航測，No.3, pp.37~40, 1983.
- 6) 枝村俊郎他：道路路線計画システムの開発，土木学会論文報告集，No.464/IV-19, pp.83~90, 1993.
- 7) Trietsch D : A family of methods for preliminary highway alignment, Transpn. Sci, Vol.21, No.1, pp.17~25, 1987.
- 8) A.K. ターナ, R.D. マイケルズ : GCARS システムコンピュータを利用した路線選定の一手法，高速道路と自動

- 車, Vol. XV, No. 8, pp. 82-94, 1972.
- 9) 丸安他：比較路線選定の自動化に関する研究, 生産研究, Vol. 23, No. 4, pp. 127-137, 1971.
  - 10) 穴瀬 真他：電算機 (パソコン) による傾斜地の道路路線選定法, 農業土木学会誌, Vol. 55, No. 4, pp. 51-55, 1987.
  - 11) 鹿島茂：パーソナルコンピュータを用いた鉄道路線計画支援システム, 土木学会第 43 回年次学術講演概要集, 第 4 部, pp. 428-429, 1988.
  - 12) 笹川耕司：道路路線計画システム, 土木学会第 47 回年次学術講演概要集, 第 4 部, pp. 384-385, 1992.
  - 13) 今野英山他：山岳道路経路探索システム, 土木学会第 47 回年次学術講演概要集, 第 4 部, pp. 382-383, 1992.
  - 14) Riesenfeld, R.F. : Applications of B-Spline Approximation to Geometric Problems of Computer-Aided Design, UTEC-CSc-73-126, Univ. of Utah, 1973.
  - 15) 吉本富士市・市田浩三：スプライン関数とその応用, 教育出版, 1983.
  - 16) 桜井明編著：スプライン関数入門—情報処理の新しい手法, 東京電機大学出版局, 1986.
  - 17) 宮本俊光・渡辺偕年：線路, 山海堂, 1980.
  - 18) 天野光三他著：図説鉄道工学, 丸善株式会社, 1992.
  - 19) J. コワリック, M. R. オスポーン (山本善之, 小山健夫共訳)：非線形最適化問題, 培風館, 1970.
  - 20) L. C. W. ディクソン (松原正一訳)：非線形最適化計算法, 培風館, 1974.
  - 21) Robinson, R. (呉長庚 訳)：公路縦断面線設計電算法的發展：VENUS 程序, 鉄路航測, No. 1, pp. 74-136, 1979.
  - 22) 土倉 保著：近似理論と直交整式, 模書店, 1967.
  - 23) 山内二郎他：電子計算機のための数値計算法 II, 培風館, 1970.
  - 24) 赤坂 隆著：数値計算, コロナ社, 1974.
  - 25) 郝瀛編：鉄路選線設計, 中国鉄道出版社, 1988.

(1993. 6. 16 受付)

## AN OPTIMIZATION MODEL FOR RAILWAY PROFILE DESIGN USING B-SPLINE FUNCTIONS

Xiafei YE, Naojiro AOSHIMA and Liang SU

This paper aims to develop an optimization model for railway profile design. First, the methods to decide the positions where gradients change, that use the quadratic basic spline(B-spline) functions, are discussed by considering the characteristics of the earth surface line. Then we apply the linear B-spline functions to behave the railway profile design line and simulate the traditional process of the railway profile design by considering the characteristics of the B-spline base functions. Further, the applicability of proposed model is tested by a case study based on the data of P.R. China.