土木学会論文集 No. 488／IV-23, pp. 93~100, 1994. 4

測量網のFree Network解を対応点に重みをつけて当てはめる方法について

森 忠次*

測量網の再測，地盤変動調査，構造物の変形調査などでは，異なった時期の観測成果を重ね合わせて考察する．この場合には，各時期それぞれの観測値に起因する誤差の特徴を知り，それに基づいて重ね合わせの方法を考えるべきである．重ね合わせ（当てはめ）る場合に測点ごとの特徴を考慮に入れるときには，まずfree networkの考え方によって当該測量の責任による測点誤差を求め，つぎに対応点ごとに所定の重みを与えて当てはめればよいことを示した．

Key Words：*free network, method of least squares, control survey, error, Helmert transformation*

1. 緒　　言

われわれの実行する測量では，座標原点からの距離を測るとか，座標軸方向からの角観測を実行するということはほとんど行わない．2測点間の距離を測ったり，2測線間のなす角を測るだけのことが多い．このような場合に測点相互の位置関係を明らかにしようとすると，なんらかの座標系に基づいて測点位置を定めなければならない．このときに測点座標の誤差を求めると，座標系の選び方（座標系への測量網の固定の仕方）に応じて測点座標の誤差が変動する．当該測量の責任のみによる測点座標誤差を算出し，しかもその値の不安定性を避けることを目的とするのであれば，通例の最小二乗法による調整を行うときに，測点座標のcofactorのトレースまたは測点座標補正の2乗和を最小にするという条件を加えて解を求めればよいことはすでに示されている[1)~3)]．このような解をfree network（以下ではFNと略記する）解と呼ぶことにする．

本文の目的は，新しい測量結果をつぎのような目的に使用するための方法を提示することにある．新，旧の2つの測量成果があるとき，新しい測量自体の測点座標誤差を明らかにし，しかもその結果を乱すことなく，いろいろの条件のもとで旧測量成果に当てはめる（重ね合わせる）方法である．

具体例をあげてみよう．たとえば，新測量成果を既設の基準点群に当てはめるときに，基準点ごとに当てはめの重みを変えたい場合である．また，地盤変動を知るために2時期の観測データを重ねて測点群の移動状況を知りたい場合を考えてみよう．他の事実から考えると，いくつかの測点には大きな移動を与えたくない，あるいは測点群全体としては回転をしない，という仮定を導入したいというような場合である．

いろいろの条件のもとで点群同士を当てはめるということは，当てはめ後に残る位置のずれ（当てはめ残差）の重みつき2乗和を最小にすることである．本文では，測量網の調整には図形調整法（条件式法）を適用することを仮定し，FN解の特徴を生かして各種の条件のもとで当てはめを実行する方法と，それに関連した注意事項を説明する．なお，計算例としては簡単のために一次元および二次元測量網に限定する．

2. FNの条件

（1） FN

観測値$\boldsymbol{l}$の重みを$\boldsymbol{P}$とし，その残差を$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{l}-\hat{\boldsymbol{l}}$（$\hat{\boldsymbol{l}}$は観測値の最確値）とするとき，最小二乗法を適用して

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}=\min. \quad (1)$$

を満足する解を求めるのであるが，$\boldsymbol{l}$が測点座標自体ではなく，距離や角のように相対的な位置関係を与える量に過ぎないときには，測量網の形は決まっても測点座標は定まらない．このような場合に，Meisslは条件（1）以外に測点座標の最確値$\hat{\boldsymbol{x}}$の分散共分散行列を$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}}=\boldsymbol{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\cdot\sigma_0^2$（$\sigma_0^2$は分散の基準値，$\boldsymbol{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$はcofactor）と書くとき，

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_{\hat{x}\hat{x}})=\min. \quad (2)$$

という条件を加えれば，当該観測量のみの責任による測点座標誤差を求めることができ，かつ測点座標も定められることを示した[1)]．そして得られた測点座標誤差を内部精度と呼んだ．

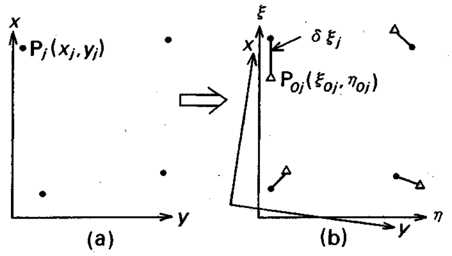
測点座標の最確値$\hat{\boldsymbol{x}}$をその近似値（または指定値）$\boldsymbol{x}$と補正$\delta\boldsymbol{x}$とを用いて

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$$

と書くとき，式（2）の代わりに

$$\delta\boldsymbol{x}^T\delta\boldsymbol{x}=\min. \quad (3)$$

* 正会員　工博　福山大学教授　工学部土木工学科
（〒729-02　福山市学園町1三蔵）



図―1　点群の当てはめ

という条件を用いても同様な解の得られることを Mittermayer が明らかにした[2),3)].

以上のように，当該測量の観測値のみで測点座標とその誤差の定められた測量網を本論文では FN 解と呼ぶことにする．ここで注意すべきことは，$\boldsymbol{x}$ の値としては，全測点について任意に測点座標を指定しても，式（３）の条件をそのまま用いれば式（２）を満足した解が得られることである．この場合は，式（３）の $\boldsymbol{\delta x}$ が当てはめの残差であるから，座標を指定した測点群に新測量網を当てはめる問題を解いていることになる[4)～6)].

測点ごとに重みを変えて当てはめる場合には式（３）に重みを導入しなければならない．そうすると式（２）が成立しない．このような場合の簡単な解法と解の特性を示すことにする．

FN の全測点を式（３）によって座標の指定された測点群に当てはめるための計算方法は多数発表されている．著者は最少拘束解（式（１）は満足している解）を修正して式（３）を満足させるのに比較的簡単な方法を提案した[4),5)]．それと同じ方法によって測点ごとに重みを変えて当てはめる問題を解くことができることを以下に示す．

3.　新測量成果の当てはめ問題の解

（１）　解くべき問題

解くべき問題はつぎのとおりである．新しく行った観測値を調整して，ある１つの座標系 xy に基づいて測点群の座標（x_j, y_j）求めたときに，図―1（ａ）のような結果が得られたとする．これらを旧測量によって定められている図―1（ｂ）の基準点群の座標（ξ_{0j}, η_{0j}）に当てはめようとする．ただし，当てはめの条件としてはつぎの３つである．

① 当てはめた後の残差（図―1（ｂ）の $\delta\xi_j$）の重みつき２乗和を最小にする．

② 新測量で得られた測点の相対的位置を変えない．

③ 新測量の FN 解の誤差を明らかにする．

さて，新しい観測値を用いて調整計算を行うのに，ここでは文献 4）および 5）で示したように，まず図形調整法によって任意の座標系に基づいた測点座標（これを最少拘束解と呼ぶことにする）を求め，それを用いて FN 解および当てはめ解を算出する方法を採ることにする．このときに必要な条件式を記してみよう．

新しい測量における観測値の間に存在する条件を $\boldsymbol{\phi}$，未定係数を $\boldsymbol{\lambda}$ と記すと，新しい観測量のみで得られる解は，

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\phi}=\min. \quad\cdots\cdots(4)$$

を満足するものである．この解を任意の座標系に固定したものが最少拘束解であり，その測点座標を $\boldsymbol{x}$ で表す．

上記の解の測点群を測点座標 $\boldsymbol{\xi}_0$ の点群に当てはめるとき，当てはめ残差 $\boldsymbol{\delta\xi}$ に対して重み $\boldsymbol{W}$ を与えたとすると条件①はつぎのとおりである．

$$\boldsymbol{\delta\xi}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{\delta\xi}=\min. \quad\cdots\cdots(5)$$

ここに，当てはめ解の座標 $\boldsymbol{\xi}$ をつぎのように置く

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\delta\xi} \quad\cdots\cdots(6)$$

一方，条件②としてはつぎのいずれかを用いることができる．

（Ａ）重みつき相似変換：つぎのような変換式によって，座標 $\boldsymbol{x}$ の点群で構成される図形の形を変えることなく，回転，移動および倍率を与えて点群 $\boldsymbol{\xi}_0$ に当てはめる．

$$\begin{pmatrix}\xi_j\\ \eta_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1 & -k_2\\ k_2 & k_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_j\\ y_j\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \quad\cdots\cdots(7)$$

（Ｂ）図形不変の条件（観測値の最確値不変の条件）を用いる：この方法は文献５）に説明されているとおりであって，角 α_i および距離に S_{ij} に関する条件はつぎのとおりである．

$$\hat{\alpha}_i-\tan^{-1}\frac{\eta_k-\eta_i}{\xi_k-\xi_i}-\tan^{-1}\frac{\eta_j-\eta_i}{\xi_j-\xi_i}=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

$$\hat{S}_{ij}^2-(\xi_j-\xi_i)^2-(\eta_j-\eta_i)^2=0 \quad\cdots\cdots(9)$$

ここで，当てはめ解を

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta x} \quad\cdots\cdots(10)$$

と表し，式（８）および（９）をつぎの形に記すことにする．

$$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta x}+(\boldsymbol{l}-\hat{\boldsymbol{l}}) \quad\cdots\cdots(11)$$

この場合には，

$$\boldsymbol{\delta\xi}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{\delta\xi}-2\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Psi}=\min. \quad\cdots\cdots(12)$$

を満足するような $\boldsymbol{\delta x}$ を求める問題となる．

条件③は，条件①で指定された条件式（５）において $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{E}$（単位行列）であれば，得られた解は FN 解の誤差であるから解決している．そうでなければあらかじめ FN 解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ を求めておいてそれを図―1（ａ）の $\boldsymbol{x}$ の代わりに用いればよい．

（２）　当てはめ解の考え方

式（７）および（12）の解は後に記すことにして，当てはめ解の正しい考え方についての結論をさきに記しておく．

まず第一に注意すべきことは，式（５）の意味である．

式（5）の重み $\boldsymbol{W}$ は座標 ξ_0 に与えた重みでもなければ新測量成果の座標 $\boldsymbol{x}$ に与えた重みでもない．当てはめ残差に対して与えた重みである．ある点の W_j を大きくすることはその点のあてはめ残差を小さくしたいということである．したがって，W_j は新または旧のいずれか一方の測点座標誤差のみによって決めるものではない．これまでに書かれている文章には，重み W_j は既設基準点の座標誤差に密接に関係する値とするように読みとられるものが多かった．これは誤りである．

当てはめ残差の大きさと本文で論じている新測量成果に基づく測点座標の誤差の大きさとは別物である．このことは5.（3）において数値例を示した．

つぎに注意すべきことは，重み行列が $\boldsymbol{W} \neq \boldsymbol{E}$ であれば，当てはめられた新測量の測点座標の誤差がFN解の値とは異なることである．$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{E}$ であればFNとなることは既述のとおりである．ところが $\boldsymbol{W} \neq \boldsymbol{E}$ とすれば，新しい測量に対して外から別な条件（拘束）を与えることになるので，得られた座標誤差は新しい測量のみの責任に帰すべき誤差ではなくなってしまう．FN解は測点座標誤差最小（$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q})=\mathrm{min.}$）の解であるから，そのときの座標誤差はFNのそれよりも大きくなるのは当然である．

新しい測量成果を与えられた座標値を持つ測点に当てはめる方法としては，式（1）および（5）を同時に満足する解を直接求めることは可能であり，実行されている[7)~10)]．しかしながら，$\boldsymbol{W} \neq \boldsymbol{E}$ のときにこの方法を採用すれば，FN解の座標誤差が得られないことに留意しなければならない．すなわち条件③が達成されない．

新しい測量自身の責任による測点座標誤差（の最小値）を知り，かつ重みつき当てはめを行うためにはつぎのようにすべきである．まず第1段階としてFN解を求め，そのうえで第2段階として重みつき当てはめを行うことである．重みつき当てはめの方法は前記（A），（B）の2方法のいずれかを用いることができる．ただし，後に示すように，（B）の方法（図形不変条件の使用）を行えば当てはめ後の測点座標の誤差を計算するのが容易である．

新，旧の測点群を当てはめるということは，両者の測点群の座標の重みつき重心をおたがいに重ね合わせることである．このことは，次節で示すように重みつき相似変換の結果を見れば明白であり，後の計算例によっても示される．

4. 重みつき当てはめの計算式

前節では最少拘束解（測点座標 $\boldsymbol{x}$）から当てはめるように記したが，本節ではFN解（測点座標 $\hat{\boldsymbol{x}}$）の算出が終っていて，FN解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ を ξ_0 に当てはめる問題とする．当てはめた後の座標を

$$\xi=\hat{\boldsymbol{x}}+\delta\hat{\boldsymbol{x}} \quad \cdots\cdots(13)$$

と記すと，二次元の場合はつぎの条件を成立させればよい．

$$\delta\xi^T \boldsymbol{W} \delta\xi=(\xi_0-\xi)^T \boldsymbol{W}(\xi_0-\xi)$$
$$=\sum W_j\{(\xi_{0j}-\xi_j)^2+(\eta_{0j}-\eta_j)^2\}=\mathrm{min.} \quad \cdots\cdots(14)$$

以下には，前節で述べた（A）および（B）を実行する際に必要となる式を示そう．

（1） 重みつき相似変換

式（14）の（ξ_j, η_j）に式（7）の相似変換式を用いればよい．その結果，変換係数はつぎのように求められる．

$$a=\frac{\sum W_j(\xi_{0j}-k_1\hat{x}_j+k_2\hat{y}_j)}{\sum W_j},$$

$$b=\frac{\sum W_j(\eta_{0j}-k_2\hat{x}_j-k_1\hat{y}_j)}{\sum W_j} \quad \cdots\cdots(15\,\mathrm{a})$$

$$k_1=\frac{\sum W_j\{(\xi_{0j}\hat{x}_j+\eta_{0j}\hat{y}_j)-a(\hat{x}_j+\hat{y}_j)\}}{\sum W_j(\hat{x}_j^2+\hat{y}_j^2)},$$

$$k_2=\frac{\sum W_j\{(\eta_{0j}\hat{x}_j-\xi_{0j}\hat{y}_j)+(a\hat{y}_j-b\hat{x}_j)\}}{\sum W_j(\hat{x}_j^2+\hat{y}_j^2)} \quad \cdots\cdots(15\,\mathrm{b})$$

両測点群のそれぞれの重みつき重心座標はつぎのとおりである．

$$\xi_{0G}=\frac{\sum W_j\xi_{0j}}{\sum W_j}, \quad \eta_{0G}=\frac{\sum W_j\eta_{0j}}{\sum W_j}$$

$$x_G=\frac{\sum W_j\hat{x}_j}{\sum W_j}, \quad y_G=\frac{\sum W_j\hat{y}_j}{\sum W_j} \quad \cdots\cdots(16)$$

このような重心を原点とする座標系を用いたときの測点座標をそれぞれ，(ξ_0', η_0')，($\hat{x}'$, $\hat{y}'$) で表すことにする．この座標系を用いると，

$$a=b=0 \quad \cdots\cdots(17)$$

となるから，変換式はつぎのように簡単な形で表せる．

$$\begin{pmatrix} \xi_j' \\ \eta_j' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 & -k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}_j' \\ \hat{y}_j' \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(18)$$

$$k_1=\frac{\sum W_j(\xi_{0j}'\hat{x}_j'+\eta_{0j}'\hat{y}_j')}{\sum W_j(\hat{x}_j'^2+\hat{y}_j'^2)},$$

$$k_2=\frac{\sum W_j(\eta_{0j}'\hat{x}_j'-\xi_{0j}'\hat{y}_j')}{\sum W_j(\hat{x}_j'^2+\hat{y}_j'^2)} \quad \cdots\cdots(19)$$

上記の相似変換において，変換倍率 k および回転角 θ を知りたい場合は次式によればよい．

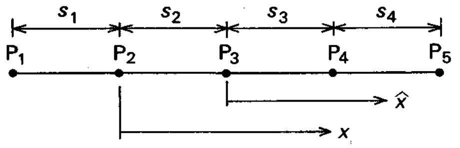
$$k=\sqrt{k_1^2+k_2^2}, \quad \tan\theta=k_2/k_1 \quad \cdots\cdots(20)$$

もし上記の相似変換において，倍率 $k=1$ という拘束を与えるときには次式を用いて最小二乗法を行えばよい．

$$\begin{pmatrix} \xi_j' \\ \eta_j' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}_j' \\ \hat{y}_j' \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(21)$$

この式は θ に関しては非線形であるから，近似値 $\tilde{\theta}$ と補正 $\delta\theta$ とによって，

$$\theta=\tilde{\theta}+\delta\theta \quad \cdots\cdots(22)$$



図—2　点列の観測

と表すと，つぎの解を得る．

$$\delta\theta=\frac{\sum W_j(A_{\xi j}\cdot\xi_{0j}+A_{\eta j}\eta_{0j})}{\sum W_j(A_{\xi j}^2+A_{\eta j}^2)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23\,\mathrm{a})$$

$$A_{\xi j}=-\hat{x}_j\sin\theta-\hat{y}_j\cos\theta,$$

$$A_{\eta j}=\hat{x}_j\cos\theta-\hat{y}_j\sin\theta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23\,\mathrm{b})$$

（2）　図形不変の条件

$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{E}$ の場合には，図形調整法によって最少拘束解を求めておけば，前節（B）の方法をとるときには，これから所定の座標を持った測点群に FN を直接当てはめることは可能である．また，まず FN 解を求めてから，それをあらためて所定の座標に当てはめることも可能であることは文献5）§6．に示したとおりである．もしもこれらの考え方を延長して測点ごとに当てはめの重みを変えた式を誘導するとつぎのようになる．ただしここでは，FN 解の座標 $\hat{\boldsymbol{x}}$ を用いて記すことにする．

式（13）を用いると式（12）はつぎのようになる．

$$(\boldsymbol{\xi}_0-\hat{\boldsymbol{x}}-\delta\hat{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\xi}_0-\hat{\boldsymbol{x}}-\delta\hat{\boldsymbol{x}})-2\boldsymbol{\lambda}^T\{\boldsymbol{B}\delta\hat{\boldsymbol{x}}+(\boldsymbol{l}-\hat{\boldsymbol{l}})\}=\min.$$

これよりつぎの解を得る

$$\begin{aligned}\delta\hat{\boldsymbol{x}}=&-\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}^T)^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}_0-\hat{\boldsymbol{x}})+(\boldsymbol{\xi}_0-\hat{\boldsymbol{x}})\\&-\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}^T)^{-1}\boldsymbol{Q}_{ll}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}^{-1}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\xi}=\hat{\boldsymbol{x}}+\delta\hat{\boldsymbol{x}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_{\xi\xi}=&\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}^T)^{-1}\boldsymbol{Q}_{\hat{l}\hat{l}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}^{-1}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)\end{aligned}$$

以上の各式における座標 $\boldsymbol{\xi}_0$ および $\hat{\boldsymbol{x}}$ は，重心を原点とする座標系によらなくてもよいことを注意しておく．

5.　簡単な例による説明

図—2 のように等間隔で 1 列に並んだ点群の間の距離を測り，$s_1=s_2=s_3=s_4=sS_0$（S_0 は基準距離，s は無次元数）という値を得たとする．文献4）に示した例と全く同じように，点 P_2 を座標原点に選ぶと最少拘束解の座標は表 1 の $\boldsymbol{x}$ のようである．この座標に基づき，条件式（9）を用いて FN 解を求めるとその座標は表—1 の $\hat{\boldsymbol{x}}$ であり，その cofactor 行列は表—2 のとおりである．

以下には，表—1 の座標 $\boldsymbol{\xi}_0$ を持つ測点に観測結果を当てはめることを試みる．ただし，比較のために表—1 に示した 2 種類の重みを与えることにする．

（1）　相似変換の適用

表—1　点列の当てはめ［長さ単位：sS_0］

点		1	2	3	4	5	注
x		−1	0	1	2	3	
$\hat{x}$		−2	−1	0	1	2	重心 = 0
均等重み	W	1	1	1	1	1	
	ξ_0	0.5	1	2	3	4	重心＝2.1
	ξ	0.1	1.1	2.1	3.1	4.1	重心＝2.1
	$\delta\xi$	0.4	−0.1	−0.1	−0.1	−0.1	m＝0.224
不均等重み	W	3	1	0	1	0	
	ξ_0	0.5	1	2	3	4	重心＝1.1
	ξ	0.3	1.3	−	3.3	−	重心＝1.1
	$\delta\xi$	0.2	−0.3	−	−0.3	−	m＝0.274

表—2　FN 解の cofactor
［単位：$s^2S_0^2/25$］

$\hat{x}_1$	30	tr($\boldsymbol{Q}$)＝4×25			
$\hat{x}_2$	10	15			
$\hat{x}_3$	−5	0	10		
$\hat{x}_4$	−15	−10	0	15	
$\hat{x}_5$	−20	−15	−5	10	30

表—3　式（20）の cofactor
［単位：$s^2S_0^2/25$］

ξ_1	6		
ξ_2	−4	11	
ξ_4	−14	1	41

表—4　不均等重みの解の cofactor［単位：$s^2S_0^2/25$］

ξ_1	6	tr($\boldsymbol{Q}$)＝6×25			
ξ_2	−4	11			
ξ_3	9	6	26		
ξ_4	−14	1	21	41	
ξ_5	−14	1	21	44	66

FN 解の測点座標 $\hat{\boldsymbol{x}}$ から出発し，これらの測点を $\boldsymbol{a}$ だけ移動させて $\xi_j=\hat{x}_j+a$ を当てはめ解とする．倍率を変えない 1 次元の相似変換であって，その解は式（15 a）より

$$a=\frac{\sum W_j\xi_j}{\sum W_j}-\frac{\sum W_j\hat{x}_j}{\sum W_j},\ (j=1,2,\cdots,5)\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

である．式（27）より

$$\xi_j=\hat{x}_j+a=F(\boldsymbol{W})\hat{\boldsymbol{x}}+\text{定数}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

という形に書けることがわかる．そうすると ξ_j の cofactor は，

$$\boldsymbol{Q}_{\xi\xi}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\boldsymbol{F}^T\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

という形で表せるから，$\boldsymbol{Q}_{\xi\xi}$ は重み $\boldsymbol{W}$ によって変わることがわかる．

a）均等重みの場合

$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{E}$ であって，式（27）右辺第 2 項は 0 であり，$\boldsymbol{a}$ は座標 ξ_j の点群の重心座標である．当てはめ結果は，表—1 に示すように $\boldsymbol{\xi}$ の測点群の重心は $\boldsymbol{\xi}_0$ の測点群の重心に等しい．$\boldsymbol{Q}_{\xi\xi}$ は表—2 と同じである．

b）不均等重みの場合

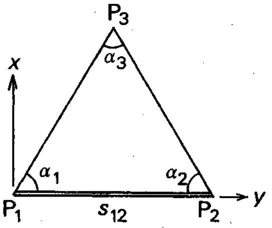
表—1 に示した不均等の重みを用いると式（28）は，

$$\xi_j=\hat{x}_j-\frac{1}{5}(3\hat{x}_1+\hat{x}_2+\hat{x}_4)+1.1sS_0,\ (j=1,2,4)\cdots(30)$$

となる．この式を用いて計算すると，測点群の重みつき重心が $\boldsymbol{\xi}_0$ と $\boldsymbol{\xi}$ との両者においてやはり一致しているこ

表—5　正三角形の当てはめ［長さ単位：sS_0］

点		1		2		3		重心	
座標成分		x	y	x	y	x	y	x	y
x		0	0	0	1	0.866	0.500	0.289	0.500
$\hat{x}$		−0.289	−0.500	−0.289	0.500	0.577	0	0	0
均等重み	W	1		1		1		1	
	ξ_0	0	0	0	1.150	0.866	0.500	0.289	0.550
	ξ_0'	−0.289	−0.550	−0.289	0.600	0.577	−0.500	0	0
	ξ	−0.021	0.063	0.022	1.062	0.866	0.525	0.289	0.550
	ξ'	−0.310	−0.487	−0.267	0.512	0.577	−0.025	0	0
不均等重み	W	3		3		1			
	ξ_0	0	0	0	1.150	0.866	0.500	0.124	0.564
	$\hat{x}'$	−0.124	−0.500	−0.124	0.500	0.742	0	0	0
	ξ_0'	−0.124	−0.564	−0.124	0.586	0.742	−0.064	0	0
	ξ	−0.013	0.068	0.013	1.067	0.866	0.545	0.124	0.564
	ξ'	−0.137	−0.497	−0.111	0.503	0.742	−0.019	0	0



図—3　三角形と座標系

とがわかる．一方 cofactor は表—3 のとおりになる．

$W_j=0$ の点は上記の計算に現れてこないので，

$$\xi_3=\xi_2+sS_0,\quad \xi_5=\xi_4+sS_0 \quad\cdots\cdots(31)$$

という式を式（30）に追加し，式（29）を使用してあらためて全測点の cofactor を計算すると表—4 のようになる．FN 解の cofactor（表—2）よりトレースが大きくなっている．

（2）図形不変条件の適用

a）均等重みの場合

図形不変条件としては式（9）を用い，式（24）～（26）によって計算を行えば，当てはめた後の測点座標は表—1 に等しくなり，ξ_0 の値にかかわらず測点座標の cofactor は表—2 と同じ値となる．すなわち，あてはめ結果と FN 解の cofactor の両者が同時に求められる．

b）不均等重みの場合

ここでは，FN 解を用いずに，わざと最少拘束解から重み付き当てはめ解を直接求めてみよう．表—1 に示した不均等重みを用いると，条件式（11）はつぎのようになる．

$$\boldsymbol{\Psi}_1=-\delta x_1+\delta x_2+(s_1-\hat{s}_1)=0,$$
$$\boldsymbol{\Psi}_2=-\delta x_2+\delta x_4+\{(s_2+s_3)-(\hat{s}_2+\hat{s}_3)\}=0 \cdots\cdots(32)$$

数値計算に必要な行列をあげるとつぎのようである．

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\delta x_1 & \delta x_2 & \delta x_4\end{array} \\ \boldsymbol{B}= & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} S_1 & S_2+S_3 \end{array} \\ \boldsymbol{Q}_{\hat{l}\hat{l}}= & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad [s^2S_0^2]$$

上記の行列を用いて式（24）～（26）によって計算すると，表—1 および表—4 と同じ結果を得ることになる．最少拘束解から直接当てはめ解を求めると，FN 解の cofactor が得られないわけである．ゆえに，当該測量の責任のみによる測点座標誤差を知りたければ，まず第一に FN 解（$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{E}$ としたときの解）を求め，その後にもう一度ここで示した方法を適用すべきである．このような段階を経れば表—1，2 および表—4 の全部が得られることになる．

（3）当てはめ誤差

新，旧の測量網を当てはめたときの当てはめの残差は $\delta\xi$ で示され，重み 1 についての当てはめ誤差は，

$$m=\sqrt{\delta\xi^T \boldsymbol{W}\delta\xi/4}$$

によって計算されるのが通例である．これらの値も表—1 に示してある．このような当てはめ誤差と本文で示す FN およびそれを当てはめたときの新測量網の座標誤差（cofactor は表—2 および表—4）とは別物である．以下には当てはめ誤差については論じないことにする．

6. 三角測量の例

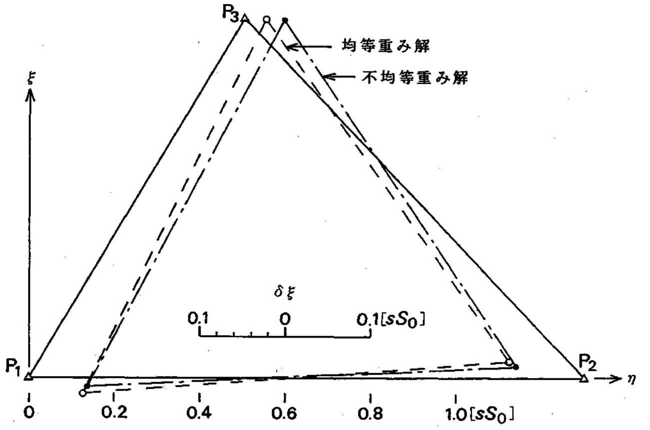
従来の三角測量の仮定にしたがって，距離観測値には誤差がなく，角観測値のみに誤差が含まれると仮定する場合をとりあげる．図—3 のように 1 つの正三角形を観測したところ，辺 P_1P_2 の距離は sS_0 であって，3 つの角 α_1，α_2 および α_3（いずれも 60°）の観測値には σ（一定値）の標準誤差があるものとする．

点 P_1 を原点とし，点 P_2 を y 軸方向に選んだときの最少拘束解 $\boldsymbol{x}$ および FN 解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ は，すでに論文 5）において算出しているので，それらを表—5 および 6 に再掲する．当てはめる目標の測点座標は表—5 の ξ_0 であるとする．

（1）相似変換の適用

a）均等重みの場合

表—5 における測点群 ξ_0 の重心を原点としたときの座標を ξ_0' で示した．座標 $\hat{x}$ と ξ_0' とを用いて，式（23 a）によって初期値 $\tilde{\theta}=0$ からの回転角を求めると $\delta\theta=-2.481°$ となる．当てはめ後の測点座標は，重心を原点としたとき（ξ'）と，ξ_0 に用いた座標系に固定した



図—4　三角形の当てはめ位置

表—6　FN 解の cofactor（正三角形）

［単位：$s^2S_0^2/54$］

$\hat{x}_1$	7			tr($\boldsymbol{Q}$)=0.667×54		
$\hat{y}_1$	$\sqrt{3}$	1				
$\hat{x}_2$	1	$-\sqrt{3}$	7			
$\hat{y}_2$	$\sqrt{3}$	1	$-\sqrt{3}$	1		
$\hat{x}_3$	−8	0	−8	0	16	
$\hat{y}_3$	$-2\sqrt{3}$	−2	$2\sqrt{3}$	−2	0	4

表—7　不均等重み解の cofactor（正三角形）

［単位：$s^2S_0^2/7350$］

ξ_1	247			tr($\boldsymbol{Q}$)=0.810×7350		
η_1	$49\sqrt{3}$	49				
ξ_2	−47	$-49\sqrt{3}$	247			
η_2	$49\sqrt{3}$	49	$-49\sqrt{3}$	49		
ξ_3	−600	0	−600	0	3600	
η_3	$-294\sqrt{3}$	−294	$294\sqrt{3}$	−294	0	1764

とき（ξ）との両者を表—5 に示した．

当てはめ後の測点座標の cofactor の計算は面倒である．ところが後述のように図形不変条件を用いて当てはめた場合には，式（24）～(26）によってわかるように ξ を計算するときに必要な行列を利用して cofactor を算出できる．次項でその計算値を示すことにする．

b）不均等重みの場合

座標 ξ_0 は同じであるが，表—5 に記したように測点 1 および 2 に 3 倍の重みを与えた場合を例に計算しよう．FN 解 $\hat{x}$ および ξ_0 の重みつき重心位置はそれぞれ（−0.1650, 0）および（0.1237, 0.5643）$[sS_0]$ となり，それらを原点としたときの座標値 $\hat{x}'$, ξ_0' を表—5 に示した．

この場合の解を求めると $\delta\theta=-1.489°$ となる．a）の場合の条件と比べると，辺 P_1P_2 の位置が同じでこの辺の両端点の当てはめ残差の重みが大きくなっているから，a）の場合よりも小さい回転角で当てはめを行う結果となった．表—5 には当てはめられた後の座標を ξ および ξ' で表示した．2 種類の当てはめの様子を示したものが図—4 である．

（2）　**図形不変条件の適用**

条件式（8）および（9）として α_1, α_2 および S_{12} を利用すると，つぎのような行列を利用することになる．

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \delta x_1 & \delta y_1 & \delta x_2 & \delta y_2 & \delta x_3 & \delta y_3 \end{array} \\ \boldsymbol{B}=\dfrac{1}{2} & \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -2 & 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{S}_{12} \end{array} \\ \boldsymbol{Q}_{\hat{l}\hat{l}}=\dfrac{1}{3} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a）均等重みの場合

重みを $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{E}$ として，前記の $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ を用いて式（24）～(26）によって計算すると，当てはめ解の回転角および測点座標は，線形化に伴って生じる誤差の範囲内で（1）a）の場合と同じ値となる．cofactor も表—6 の FN 解と一致する．

b）不均等重みの場合

この場合も（1）b）の計算とほぼ同じ結果となる．

cofactor の値を表—7 に示した．今回は tr($\boldsymbol{Q}$)=0.810 であって，表—6 に示した FN 解の tr($\boldsymbol{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$) よりも大きくなっていることがわかる．

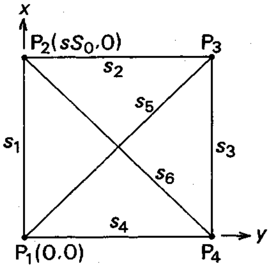
7.　距離のみを測った四辺形の重みつき当てはめ例

対角線を含めた 6 測線を測った図—5 の正方形の場合を計算しよう．観測値は辺長が S_0, 対角線が $\sqrt{2}\,S_0$ であって，測線長の観測誤差はすべて同じであると仮定する．この測量網は，FN 解をつぎの 3 つの場合について計算したときに，いずれも同じ結果の得られることがすでに示されているものである．すなわち，一般逆行列を用いた場合[11]，図形調整法の解から出発した場合[4),5)]，座標調整法の解から出発した場合[6)]である．それらによれば最少拘束解 $\boldsymbol{x}$ および FN 解の座標 $\hat{x}$ は表—8 のとおりであり，FN 解の cofactor は表—9 に示す値である．

この結果を表—8 に与えた 2 種の重みを用いて、座標 ξ_0 を持つ測点群に当てはめた．重心を原点としたときの座標値 $\hat{x}'$, ξ_0' も同表に示した．

（1）　**相似変換**

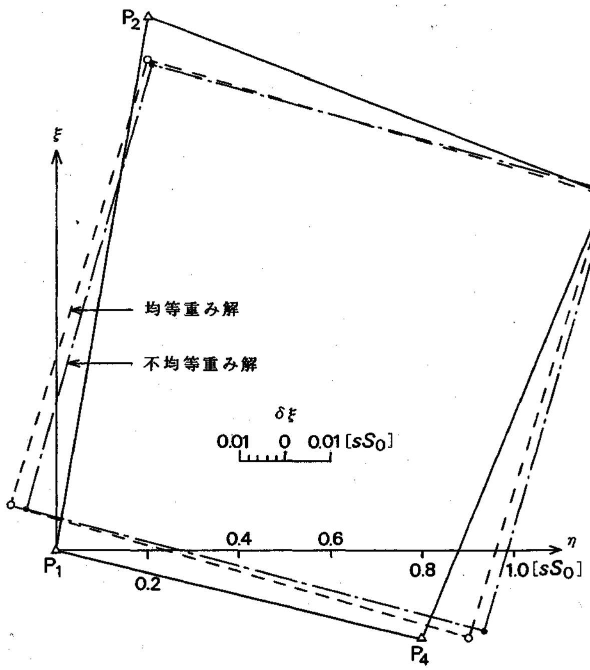
均等重みのとき回転角 $\theta=1.719°$（0.03 rad.），不均等重みのとき $\theta=1.576°$ という結果を得る．当てはめた結果の測点座標は，表—8 において ξ および ξ' で示した．



図—5　正方形と座標系

表—8　正三角形の当てはめ [長さ単位：sS_0]

点		1		2		3		4		重心	
座標成分		x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
	x	0	0	1	0	1	1	0	1	0.5	0.5
	$\hat{x}$	−0.5	−0.5	0.5	−0.5	0.5	0.5	−0.5	0.5	0	0
均等重み	W	1		1		1		1			
	ξ_0	0	0	1.02	0.02	0.98	1.02	−0.02	0.98	0.495	0.505
	ξ_0'	−0.495	−0.505	0.525	−0.485	0.485	0.515	−0.515	0.475	0	0
	ξ	0.010	−0.010	1.010	0.020	0.980	1.020	−0.020	0.990	0.495	0.505
	ξ'	−0.485	−0.515	0.515	−0.485	0.485	0.515	−0.515	0.485	0	0
不均等重み	W	3		3		3		1			
	ξ_0	0	0	1.02	0.02	0.98	1.02	−0.02	0.98	0.598	0.410
	$\hat{x}'$	−0.6	−0.4	0.4	−0.4	0.4	0.6	−0.6	0.6	0	0
	ξ_0'	−0.598	−0.410	0.422	−0.390	0.382	0.610	−0.618	0.570	0	0
	ξ	0.010	−0.006	1.009	0.021	0.981	1.021	−0.018	0.993	0.598	0.410
	ξ'	−0.589	−0.416	0.411	−0.389	0.383	0.611	−0.616	0.583	0	0



図—6　四辺形の当てはめ位置

表—9　FN 解の cofactor（正方形）

[単位：$s^2S_0^2/160$]

$\hat{x}_1$	45				tr($\boldsymbol{Q}$)=2.25×160			
$\hat{y}_1$	5	45						
$\hat{x}_2$	−25	15	45					
$\hat{y}_2$	−15	−15	−5	45				
$\hat{x}_3$	−5	−5	−15	15	45			
$\hat{y}_3$	−5	−5	−15	−25	5	45		
$\hat{x}_4$	−15	−15	−5	5	−25	15	45	
$\hat{y}_4$	15	−25	5	−5	−15	−15	−5	45

表—10　不均等重み解の cofactor（正方形）

[単位：$s^2S_0^2/160$]

ξ_1	40				tr($\boldsymbol{Q}$)=2.425×160			
η_1	8	29						
ξ_2	−28	16	44					
η_2	−12	−16	−4	44				
ξ_3	−8	−19	−16	16	29			
η_3	0	−8	−12	−28	8	40		
ξ_3	−12	−15	0	0	−15	12	81	
η_3	12	−15	0	0	−15	−12	9	81

（2）　図形不変条件式の適用

条件式ならびに各種の行列は，文献 4）と同様のものを用いればよいので記述を省略する．当てはめ解の回転角および測点座標は，この場合においても（1）の場合とほとんど同様である．cofactor は表—10 のとおりであって，この場合においても表—9 よりもトレースが大きくなっている．当てはめの様子を示すと図—6 のようになる．

この例と同じ測量網に対して，$W_1=W_2=W_3=1$，$W_4=0$ という重みを与えた例が Illner によって計算されている[12]．著者の提案した方法によってもこれと全く同じ結果が得られた．

8.　記　　号

S_0＝長さの基準

$\boldsymbol{l}^T=(l_1,\ l_2,\ \cdots)$：観測値

$\hat{\boldsymbol{l}}^T=(\hat{l}_1,\ \hat{l}_2,\ \cdots)$：観測値の最確値

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{l}-\hat{\boldsymbol{l}}$：残差

σ_0=：重み 1 の観測の標準誤差

$\boldsymbol{P}$：観測値の重み行列

$\boldsymbol{W}$：当てはめの重み行列

$\boldsymbol{x}^T=(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \cdots)$：最少拘束解の座標

$\hat{\boldsymbol{x}}^T=(\hat{x}_1,\ \hat{y}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{y}_2,\ \cdots)$：free network 解の座標

$\boldsymbol{\xi}_0^T=(\xi_{01},\ \eta_{01},\ \xi_{02},\ \eta_{02},\ \cdots)$：当てはめる目標測点の座標

$\xi=(\xi_1,\ \eta_1,\ \xi_2,\ \eta_2,\ \cdots)$：当てはめ後の測点座標

$\delta\xi$：当てはめ残差

$\xi=\xi_0+\delta\xi=\hat{x}+\delta\hat{x}=x+\delta x$

x', ξ_0' および ξ'：x, ξ_0 および ξ の重心を原点とする座標

$Q_{\hat{l}\hat{l}}$, $Q_{\hat{x}\hat{x}}$ および $Q_{\xi\xi}$：$\hat{l}$, $\hat{x}$ および ξ の cofactor 行列

$\Sigma=Q\cdot\sigma_0^2$：測点座標の分散共分散行列

9. 結　　言

最近の測量器械の性能向上が著しいため，新測量成果は旧測量成果よりも高精度であると推定されることが多い．局所的な測量を行ったときの成果は，広範な測量を行ったときの旧成果よりも，その場所に限っては誤差が小さい．このような場合には新測量成果を旧成果に無理に適合させることには疑問が生じる．まず当該測量自身の責任に帰すべき測点座標誤差の特徴を知って，その後に当てはめ方法を考えるべきだと思う．地盤変動や構造物形状変動の調査などにおいても同様である．

当てはめ方法はそれぞれの場合について熟考しなければならない問題であって，本論文ではこの点は論じていない．注意すべきことの第一は，当てはめるときの重みのつけ方が不均等であれば，算出された測点座標誤差は FN 解の値よりも大きくなる．したがって，FN 解の誤差を先に算出しておかなければならないことである．第二は，本文で算出した測点座標誤差と当てはめ誤差とは別物であるということである．

参 考 文 献

1）Meissl, P. : Die innere Genauigkeit eines Punkthafens, Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, 50 Jg. Nr.5, S.159～165／Nr.6, S.186～195, 1962.

2）Mittermayer, E. : Eine Verallgemeinerung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung freier Netze, Zeitschrift für Vermessungswesen, 96Jg., S.401～410, 1971.

3）Mittermayer, E. : A generalisation of the least-squares method for the adjustment of free networks, Bull. Géodésique, No.104, pp.139～157, 1972.

4）森忠次・町田憲一：距離測量網の図形調整結果を用いた Free Network の解法，土木学会論文集，第 440 号／IV-16, pp. 125～133, 1992.

5）森忠次・町田憲一：平面測量網の図形調整結果を用いた Free Network の解法，土木学会論文集，第 449 号／IV-17, pp. 213～222, 1992.

6）森忠次：Free Network 解を最少拘束解から求める方法と解の特徴，APA（日本測量調査技術協会誌），55 号, pp. 1～10, 1993.

7）中根勝見：地殻変動推定のためのフリー平均法，測地学会誌，第 23 巻，pp. 9～16, 1977.

8）Papo,H.B. and Perlmutter, A. : Datum definition by free net adjustment, Bull. Géodésique, Vol.55, pp.218～226, 1981.

9）Koch, K.R. : Die Wahl des Datums eines trigonometrischen Netzes bei Punkteinschaltungen, Zeitschrift für Vermessmgswesen. 108 Jg. Heft 3, S.104～111, 1983.

10）藤井陽一郎：GPS 三次元測地網の重み付き自由平均，測地学会誌，第 37 巻，pp. 217～226, 1991.

11）田島稔：現代測量学，第 1 巻，第 7 章，pp. 285～293, 日本測量協会，1981.

12）Illner, von I. : Freie Netze und S-Transformation, Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 90Jg., Heft 5, S.157～170, 1983.

（1993. 4. 16 受付）

FITTING A FREE NETWORK IN GIVEN CONTROL POINTS

Chuji MORI

A method for establishing control networks or deformation fields from sequential geodetic measurements is developed. The method is based on the use of the free network solution which is obtined from the results of adjustment by the method of condition equations. The conditions applied in this paper are as follows : ① Repeated geodetic measurements are carried out at different epochs to determine the coordinates of the points which make up a network. ② the network of the one epoch should be fitted in that of the other epoch. ③ the weight given at each point for fitting should be arbitrary. Applications of the method are outlined and illustrated by elementary mumerical examples.