

# 個別要素法による粒状体のせん断機構の 微視的考察

松岡 元\*・山本修一\*\*

アルミ丸棒積層体の一面せん断試験, 二軸圧縮試験およびそれらの個別要素法 (DEM) によるシミュレーション解析を行い, 両者を定量的に比較して個別要素法の粒状体解析への適用性を示すとともに, 解析結果から粒状体のせん断時の粒子接点角分布, 粒子間力分布等について検討し, 土の構成式の中で最も重要な関係の1つである応力比~ひずみ増分比関係について考察した.

**Key Words** : *distinct element method, granular material, dilatancy, soil structure, direct shear box test, biaxial compression test*

## 1. はじめに

個別要素法 (DEM)<sup>1)</sup>を粒状体解析に適用し, その変形・破壊のメカニズムを微視的観点から明らかにしようとする試みが行われるようになってきた. 代表的な研究としては, せん断帯の形成のメカニズムに関するもの<sup>2)</sup>やせん断帯内の粒状体の力学特性に関するもの<sup>3)</sup>, 主応力回転時の粒状体の粒子レベルでの応答特性に関するもの<sup>4)</sup>, せん断時に発達する粒子接点角分布や粒子間力分布の異方性と粒状体のせん断抵抗との関係に関するもの<sup>5)</sup>などが挙げられる. しかし, 個別要素法の粒状体解析への定量的な意味での適用性は十分検証されていない. また, 解析パラメータの決定方法など, いわゆる解析技術が確立していないのが現状である. 粒状体のふるまいを支配するさまざまな要因のうち, 最も支配的であると考えられるのは「粒状性」であるから, アルミ丸棒やガラスビーズのような粒状性のみで理想化された材料の種々の条件下でのふるまいを個別要素法により定量的に表現できることが実証されれば, 個別要素解析が粒状体の変形・降伏・破壊のメカニズムを解明するための強力な手段の一つとなる. さらに, 数値解析によって粒状体の構造的な要因 (粗密, 粒度分布, 構造異方性等), あるいは材料的な要因 (粒子物性, 粒子形状等) などの粒状体挙動への影響を定量的に明らかにすることが可能となる.

本研究では, アルミ丸棒積層体の一面せん断試験 (2 ケース), 二軸圧縮試験 (2 ケース) およびそれらを行えるだけ忠実にモデル化した個別要素法によるシミュレーション解析を行い, 合計 4 ケースについて実験結果と解析結果とを定量的に比較して個別要素法の粒状体解

析への適用性を示すとともに, 解析パラメータの決め方について検討した. また, 粒状体のせん断特性を支配すると考えられる滑動面に着目して, 解析結果をもとに, 粒状体のせん断時の粒子接点角分布, 粒子間力分布, モービライズされる粒子間摩擦角等について検討し, 土の構成式の中で最も重要な関係の1つである応力比~ひずみ増分比関係を微視的観点から考察し, その物理的な意味合いを明らかにした.

## 2. アルミ丸棒積層体の一面せん断試験と二軸圧縮試験

供試体は, 両試験ともに, 長さ 50 mm, 直径 5 mm および 9 mm の 2 種類のアルミ丸棒を混合重量比 3 : 2 の割合でランダムに配置して作成した.

一面せん断試験は, 長方形断面を有し下部可動・上部固定式の装置を用いて, 上載荷重  $0.5 \text{ kgf/cm}^2$  ( $4.9 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ ) で行い, せん断 (水平) 変位 ( $x$ ) と加圧板中央の鉛直変位 ( $y$ ) および作用せん断力を測定した.

写真—1 は上載荷重を作用させた, せん断直前の状態を示している.

二軸圧縮試験は, 上部・側方載荷板可動, 下部載荷板固定の試験装置を用いて, 軸圧 ( $\sigma_1$ ) および側圧 ( $\sigma_3$ ) を  $0.5 \text{ kgf/cm}^2$  ( $4.9 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ ) で等方圧密した後, 側圧一定でせん断応力 ( $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ ) を作用させ, 上部載荷板の鉛直変位と左右載荷板の側方変位を計測した. 写真—2 は等方圧密後の実験写真である.

なお, 両実験は同一条件で初期粒子配置を変えてそれぞれ 2 ケース行った.

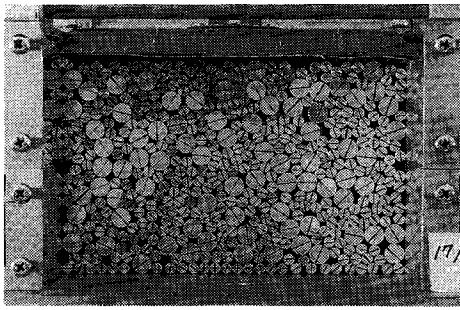
## 3. 解析方法

### (1) 個別要素法と解析時間増分 $\Delta t$

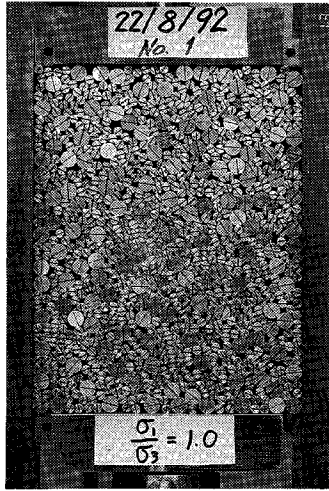
個別要素法では, 粒状体の粒子を円形の剛体要素と仮定し, 図—1 に示すようにに接触要素間の法線および接線

\* 正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

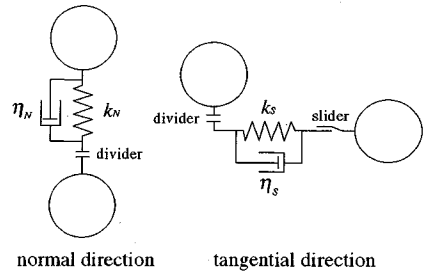
\*\* 正会員 (株)大林組 技術研究所 数値解析研究室



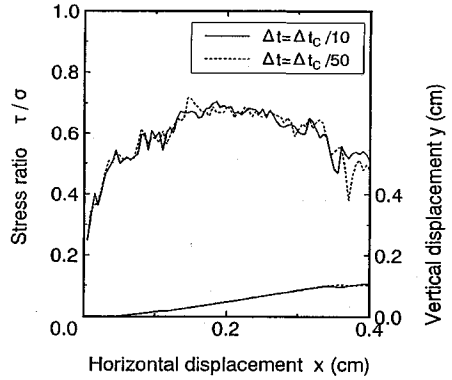
写真一 一面せん断試験装置



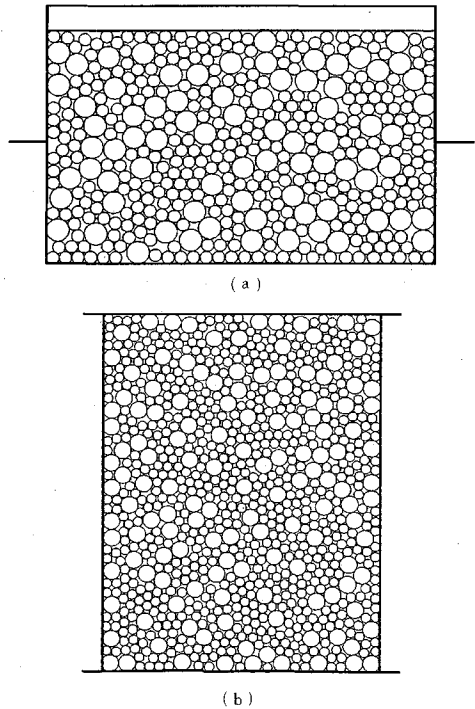
写真二 二軸圧縮試験装置



図一 個別要素法の粒子間接触モデル



図二 積分時間増分  $\Delta t$  の影響



図三 解析における初期粒子配置 (a) 一面せん断試験 (b) 二軸圧縮試験

方向に弾性バネと粘性ダッシュポットを配置することで要素間の相対運動による接触力を表現する。接触要素間の滑りは接線方向にセットされたクーロンの摩擦則に従うスライダにより考慮される。ディバイダーは接触する要素間だけにこれらが働くことを示している。本実験のシミュレーションではこの粒子と粒子の接触の他に、粒子と載荷板の接触を考慮する必要がある。ここでは、載荷板を剛体と仮定し、剛線要素でモデル化した。これは粒子間接触の場合と同様に、剛線要素と円形要素の接触点に弾性バネ、粘性ダッシュポット、スライダを配置して、両者の相対運動による接触力を表現するものである。

解析は各粒子の運動方程式をオイラー法により時間積分して進める。従って、解は積分時間増分  $\Delta t$  に関して条件付き安定となる。積分時間増分  $\Delta t$  に関して Cundall は次式を示した<sup>1)</sup>。

$$\Delta t < \Delta t_c = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $m$  は粒子の質量、 $k$  はバネ定数である。これは 1 自由度系の運動方程式から導かれた条件であり、実際にはこれを目安に問題ごとに試行錯誤により決定せざる

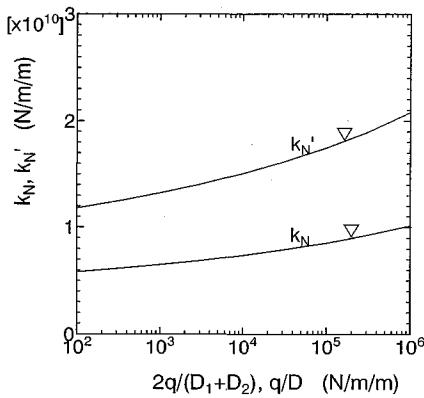


図-4  $k_N \sim 2q/(D_1+D_2)$  関係および  $k_N' \sim q/D$  関係

を得ない。今回の一面せん断試験および二軸圧縮試験のシミュレーションの場合、 $\Delta t = \Delta t_c/5$  では解が発散した。図-2 は一面せん断試験シミュレーションにおいて、 $\Delta t = \Delta t_c/10$  を用いた場合と  $\Delta t = \Delta t_c/50$  を用いた場合の解析結果を示している。図より、両者にほとんど差がないことがわかる。二軸圧縮試験シミュレーションの場合も同様の結果となった。このことから、 $\Delta t$  として  $\Delta t_c/10$  を用いれば十分であると判断し、本シミュレーションでは  $\Delta t = \Delta t_c/10 = 5 \times 10^{-7}$  (sec) を用いた。

(2) 解析モデルおよび材料定数とその決定方法

実験と解析におけるせん断前の粒子配置をできるだけ同じにするために、解析における粒子配置は載荷前の実験写真をデジタイズすることで粒子1つ1つの中心座標と直径を数値化して作成した。このとき、読み取り誤差により微小な粒子の重なりが認められたが、この粒子の重なりによる粒子間反発力(接触力)は計算上作用しないものとして、所定の拘束圧(一面せん断の場合は上載圧、二軸圧縮の場合は等方応力)を作用させて釣り合わせ、せん断前の初期粒子配置とした。図-3 は前記の方法で得られたせん断前の初期粒子配置を示している。これは写真-1, 2 に対応するものである。一面せん断試験、二軸圧縮試験ともに実験とほぼ同じ初期粒子配置が得られていることがわかる。

解析に必要な材料定数は、粒子間の法線方向および接線方向バネ定数 ( $k_N, k_S$ ) と粘性定数 ( $\eta_N, \eta_S$ )、粒子~載荷板間の法線方向および接線方向バネ定数 ( $k_N', k_S'$ ) と粘性定数 ( $\eta_N', \eta_S'$ )、粒子間摩擦角 ( $\phi_u$ )、粒子~載荷板間摩擦角 ( $\phi_u'$ )、粒子の質量密度 ( $\rho$ ) である。

法線方向バネ定数  $k_N$  および  $k_N'$  は、弾性2円柱および円柱と板の接触理論<sup>6)</sup>により式(2)、(3)で表わされる。直径  $D_1$  と  $D_2$  のヤング率  $E$ 、ポアソン比  $\nu$  の弾性2円柱が単位長さ当たり荷重  $q$  で圧縮される場合のバネ定数  $k_N$  は

$$k_N = \frac{\pi \cdot E}{2(1-\nu^2) \left( \frac{2}{3} + 2 \ln \sqrt{1.6 \frac{D_1+D_2}{2q} \cdot \frac{E}{1-\nu^2}} \right)} \dots (2)$$

また、直径  $D$ 、ヤング率  $E$ 、ポアソン比  $\nu$  の弾性円柱とヤング率  $E'$ 、ポアソン比  $\nu'$  の弾性板が単位長さ当たり荷重  $q$  で圧縮される場合のバネ定数  $k_N'$  は

$$k_N' = \frac{\pi \cdot E}{2(1-\nu^2) \left( \frac{1}{3} + \ln \sqrt{1.6 \frac{D}{q} \cdot \frac{E \cdot E'}{(1-\nu^2)E' + (1-\nu^2)E}} \right)} \dots (3)$$

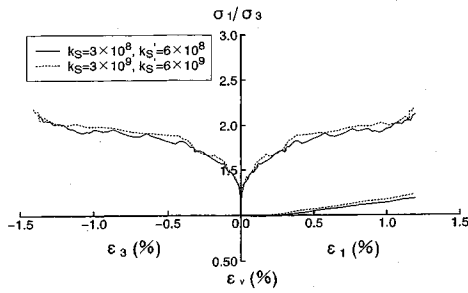
式(2)、(3)より  $k_N$  および  $k_N'$  はそれぞれ接触力  $q$  と平均粒子直径  $(D_1+D_2)/2$  の比 ( $2q/(D_1+D_2)$ )、接触力  $q$  と粒子直径  $D$  の比 ( $q/D$ ) によって変化することがわかる。そこで、アルミ棒の弾性定数 ( $E = 7.1 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu = 0.34$ ) と鉄製載荷板の弾性定数 ( $E' = 2.1 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu' = 0.28$ ) を用いて式(2)、(3)より計算した  $k_N$  と  $2q/(D_1+D_2)$  および  $k_N'$  と  $q/D$  の関係を本実験で作用するであろう  $q$  の範囲を考慮してプロットしたものを図-4に示す。図-4より  $k_N$  および  $k_N'$  はそれぞれ  $2q/(D_1+D_2)$  および  $q/D$  の変化にあまり敏感でないことがわかる。従って、 $k_N$  および  $k_N'$  は代表的な  $2q/(D_1+D_2)$  および  $q/D$  におけるものを採用してよいと思われる。 $2q/(D_1+D_2)$  および  $q/D$  の値は平均的には作用応力値のオーダーとなるので、本解析では、せん断過程での作用応力 ( $10^6$  N/m<sup>2</sup> 程度) を考慮して  $2q/(D_1+D_2)$  および  $q/D$  が  $10^6$  N/m/m のオーダーに対応するバネ定数 ( $k_N$  および  $k_N'$ ) を用いた。

接線方向バネ定数  $k_S$  および  $k_S'$  は、表面に凹凸のある2円柱の接触理論<sup>7)</sup>に基づいて式(4)、(5)で近似できる。

$$k_S = a \cdot G \sqrt{q} \dots (4)$$

$$k_S' = a \cdot \frac{G+G'}{2} \sqrt{q} \dots (5)$$

ここに、 $G$  は弾性円柱のせん断弾性係数、 $G'$  は弾性板のせん断弾性係数、 $q$  は単位長さ当たりの垂直荷重、 $a$  は定数で  $a = 4.7 \times 10^{-5}$  (m<sup>2</sup>/N)<sup>1/2</sup> である。ところで、粒状体のDEM解析において、 $k_S, k_S'$  は粒子接点の滑動量に比べて無視できる程度の微小な粒子自身の変形に関わるものであるから、粒状体全体の微小なひずみを問題としない場合には  $k_S, k_S'$  はある程度以上大きな値を用いればよいと考えられる。図-5に、垂直荷重  $q = 6 \times 10^4$  N/m/m として式(4)、(5)より求めたバネ定数 ( $k_S = 3 \times 10^8$  N/m/m,  $k_S' = 6 \times 10^8$  N/m/m) を用いた場合と、その100倍の垂直荷重  $q = 6 \times 10^6$  N/m/m でのバネ定数 ( $k_S = 3 \times 10^9$  N/m/m,  $k_S' = 6 \times 10^9$  N/m/m) を用いた場合の二軸圧縮試験シミュレーションの解析結果を示す。両者に顕著な差がないことから、接線方向バネ定数は式(4)、(5)を目安にある程度以上大きな値を設定すれ

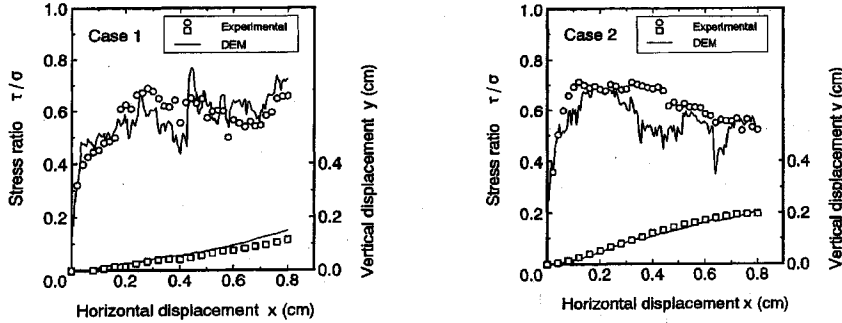


図—5 接線方向バネ定数 ( $k_s, k_s'$ ) の解析結果への影響

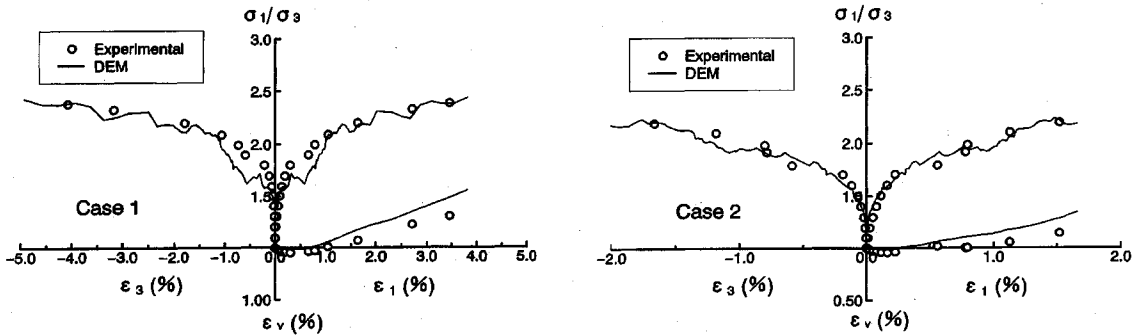
表—1 解析に用いた材料パラメータ

	particle-particle	particle-platen
Normal stiffness $k_N, k_N'$ (N/m/m)	$0.9 \times 10^{10}$	$1.8 \times 10^{10}$
Shear stiffness $k_s, k_s'$ (N/m/m)	$3.0 \times 10^8$	$6.0 \times 10^8$
Normal damping $\eta_N, \eta_N'$ (N s/m/m)	$7.9 \times 10^4$	$1.1 \times 10^5$
Shear damping $\eta_s, \eta_s'$ (N s/m/m)	$1.4 \times 10^4$	$2.0 \times 10^4$
Friction angle $\phi_\mu, \phi_\mu'$ (deg.)	16	16 (for direct shear) 10 (for biaxial comp.)
Density of particles $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2700	
Diameter of particles $D$ (mm)	5, 9	

1N=0.102kgf



図—6 一面せん断試験における実験結果と解析結果の比較



図—7 二軸圧縮試験における実験結果と解析結果の比較

ばよいと言える。ここでは、 $k_s=3 \times 10^8$  N/m/m,  $k_s'=6 \times 10^8$  N/m/mを用いた。

粘性定数は準静的な問題の場合には解を安定させる役割のみを担うので、次式で表される一自由度系の臨界減衰定数 ( $\eta_c$ ) を用いた。

$$\eta_c = 2\sqrt{km} \dots\dots\dots (6)$$

粒子間摩擦角  $\phi_\mu$  はアルミ丸棒間の摩擦試験結果<sup>8)</sup>から決定した。その概要は次の通りである。すなわち、通常の一面せん断試験装置の上部載荷板と下部載荷板それぞれに数個の等径アルミ丸棒を一列に並べて接着し、せん断試験を行って、測定されたせん断・垂直応力比 ( $\tau/\sigma_N$ )、粒子接点角  $\theta$  (せん断変位より算定される) と、粒子間摩擦角  $\phi_\mu$  との理論的關係 ( $\tau/\sigma_N = \tan(\theta + \phi_\mu)$ ) から、 $\phi_\mu$  の値を算定するというものである。また、粒

子と載荷板間の摩擦角は次の簡便な試験によって求めた。すなわち、水平に置いた載荷板の上にアルミ丸棒をのせ、載荷板をゆっくりと傾けてアルミ丸棒が滑り出した瞬間の載荷板の傾斜角を粒子と載荷板間の摩擦角とした (アルミ丸棒が転がらないように、アルミ丸棒の長軸方向が載荷板の最急勾配の方向と一致するようにしている)。

一面せん断試験および二軸圧縮試験のシミュレーション解析に用いた材料定数を表—1に示す。なお、粒子と載荷板間の摩擦角が一面せん断試験と二軸圧縮試験で異なるのは、載荷板表面の粗さの違いによるものと考えられる。

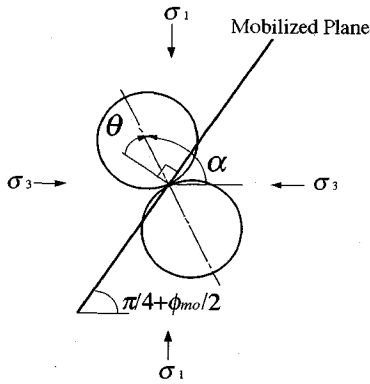


図-8 粒子接点角  $\alpha$  と滑動面における粒子接点角  $\theta$

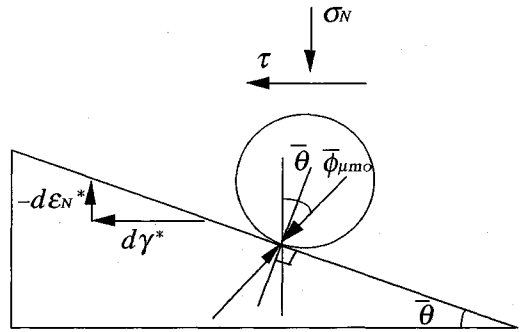


図-9 摩擦のある斜面上の粒子の滑動

#### 4. 実験結果と DEM 解析結果の比較

図-6は初期粒子配置の異なる2ケースの一面せん断試験について、せん断(水平)変位( $x$ )とせん断・垂直応力比( $\tau/\sigma$ )および鉛直変位( $y$ )との関係に関して実験結果と解析結果を比較したものである。また、図-7は初期粒子配置の異なる2ケースの二軸圧縮試験について、主応力比( $\sigma_1/\sigma_3$ )~主ひずみ( $\epsilon_1, \epsilon_3$ )~体積ひずみ( $\epsilon_v$ )関係に関して実験結果と解析結果を比較したものである。一面せん断試験、二軸圧縮試験ともに実験結果と解析結果は定量的に良く一致していることから、DEMは粒状体挙動の微視的メカニズムを検討するための有効な解析法であるといえる。また、解析モデルおよび解析パラメータの設定法の妥当性が確認されたと考える。

#### 5. “粒子構造の変化”に着目した滑動面上の応力比~ひずみ増分比関係とその解釈

著者の1人は、以前にアルミ丸棒や光弾性材料の丸棒の積層体の一面せん断試験を行い、粒子接点角、粒子間摩擦角などを滑動面(“mobilized plane”)上のせん断抵抗を支配する微視的要因として考察した。そして、滑動面上の粒子接点角の分布の変化を考慮して、次の2次元粒状体の滑動面上のせん断・垂直応力比( $\tau/\sigma_N$ )~垂直・せん断ひずみ増分比( $-d\epsilon_N^*/d\gamma^*$ )関係に対応するものを誘導している<sup>9)</sup>。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \sin(\theta + \bar{\phi}_{\mu 0}) d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \cos(\theta + \bar{\phi}_{\mu 0}) d\theta}$$

$$= \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \sin\theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \cos\theta d\theta} + \tan\bar{\phi}_{\mu 0}$$

$$= \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \sin\theta d\theta}{1 - \tan\bar{\phi}_{\mu 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \cos\theta d\theta}$$

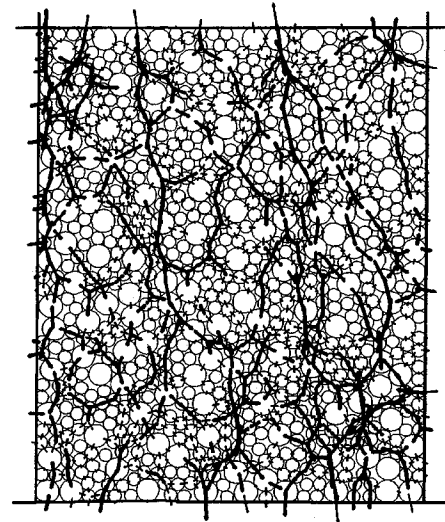


図-10 せん断中の粒子間力分布

$$= \frac{\tan\bar{\theta} + \tan\bar{\phi}_{\mu 0}}{1 - \tan\bar{\phi}_{\mu 0} \tan\bar{\theta}} = \tan(\bar{\theta} + \bar{\phi}_{\mu 0}) \dots \dots \dots (7)$$

$$\frac{d\epsilon_N^*}{d\gamma^*} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \sin\theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \cos\theta d\theta} = \tan\bar{\theta} \dots \dots \dots (8)$$

式(7), (8)より

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{1 + \tan^2\bar{\phi}_{\mu 0}}{1 + \tan\bar{\phi}_{\mu 0} \frac{d\epsilon_N^*}{d\gamma^*}} \left( -\frac{d\epsilon_N^*}{d\gamma^*} \right) + \tan\bar{\phi}_{\mu 0}$$

$$= \lambda \left( -\frac{d\epsilon_N^*}{d\gamma^*} \right) + \mu \dots \dots \dots (9)$$

ここに、 $\theta$ は図-8で示される滑動面上の粒子接点角で、せん断に抵抗する方向が正である。 $\phi_{\mu 0}$ はモービライズされている内部摩擦角( $\tan\phi_{\mu 0} = (\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} - \sqrt{\sigma_3/\sigma_1})/2$ )である。 $N(\theta)$ は滑動面上の粒子接点角の度数分布関数である。 $\bar{\theta}$ は滑動面上の粒子接点角の平均値で、 $\bar{\phi}_{\mu 0}$ は滑動面上でモービライズされている粒子間摩擦角の平均値(せん断に抵抗する方向にモービライズされている場合を正とする)である。また、 $d\epsilon_N^*$ および $d\gamma^*$ は次

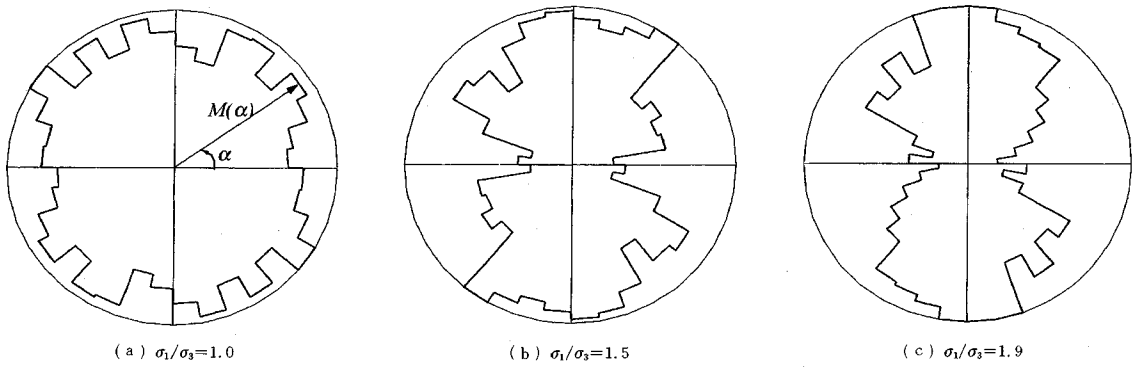


図-11 粒子接点角分布の変化 (ケース1)

式で示される主ひずみ増分ベクトル  $d\epsilon_i = (d\epsilon_1, d\epsilon_3)$  の滑動面に垂直な成分および平行な成分である<sup>10)</sup>。

$$d\epsilon_N^* = d\epsilon_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{mo}}{2}\right) + d\epsilon_3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{mo}}{2}\right) \dots (10)$$

$$d\gamma^* = d\epsilon_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{mo}}{2}\right) - d\epsilon_3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{mo}}{2}\right) \dots (11)$$

ところで、式(7)~(9)は粒子接点角の度数分布  $N(\theta)$  の形のいかんにかかわらず成立する関係であり、興味深い。また、これらは滑動面上の応力比、ひずみ増分比およびそれらの関係が、図-9に示す角度  $\bar{\theta}$  の摩擦のある斜面上を粒子が登り降りする問題としてとらえることができることを示しており、物理的意味合いが明確である。

以下では、二軸圧縮試験のDEM解析結果をもとに、粒子構造の変化、粒子間力分布およびモービライズされる粒子間摩擦角について詳細に検討して、式(7)~式(9)について考察する。図-10はせん断中の粒子間力のベクトル図の例を示している。ここでは、平均粒子間力以上の粒子間力ベクトルを太線で表している。粒子間力の分布をせん断過程を通して詳細に観察すると、図-10に代表されるように比較的小さな粒子間力を伝達する接点(あるいはほとんど粒子間力を伝達しない接点)群を取り囲むようにして比較的大きな粒子間力の大きな接点が編み目状に連なる様子が認められる。これは、他の研究者によっても指摘されている<sup>9)</sup>。この比較的大きな粒子間力の大きな接点群で形成されるいわゆる「構造骨格」は外力の変化によって複雑に変化するが、瞬間的にはこの構造骨格の変形が粒状体全体の变形を支配すると考えられる。言い換えれば、比較的大きな粒子間力が伝達されている接点の動きがその瞬間の粒状体全体の变形を支配するものと考えられる。そこで、以下では粒子間力  $f$  が平均粒子間力  $\bar{f}$  以上の接点に着目して考察する。なお、 $\bar{f}$  は  $f$  の最大値の2割程度である。

図-11はケース1の供試体全領域を対象とした粒子接点角の度数分布  $M(\alpha)$  とその変化を最大度数で正規化して示したものである。ここに  $\alpha$  は粒子接平面の垂

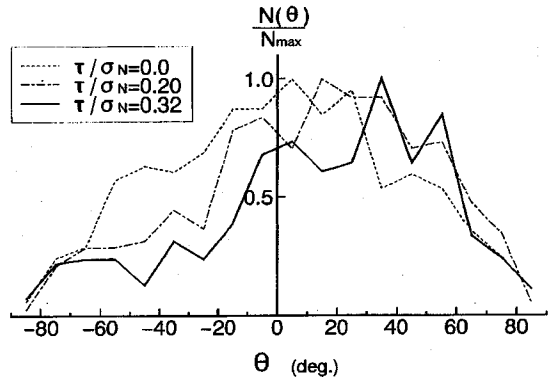


図-12 滑動面上の粒子接点角分布の変化 (ケース1)

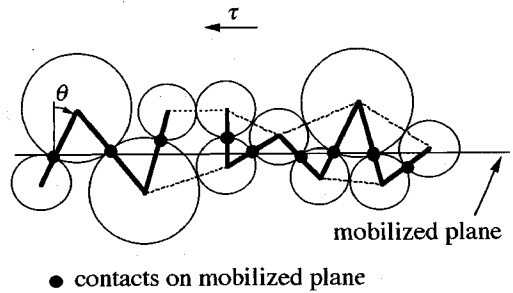


図-13 滑動面上の粒子接点

直方向が最大主応力面となす角度(粒子接点角)である(図-8参照)。図-11では、実際には粒子接点角を  $10^\circ$  間隔の変域に区分し、その変域の中央値を  $\alpha$ 、その変域内の接点の度数を  $M(\alpha)$  としてプロットしている。等方応力状態での  $M(\alpha)$  の分布が円形となるのはその時の粒子構造が等方的であることを意味している(図-11(a))。主応力比の増加とともに最大主応力方向の接点が増加し、最小主応力方向の接点が増加していることがわかる。砂でも同様の挙動をすることが報告されている<sup>11)</sup>。この応力による粒子構造の変化は粒状体の最も典型的な特長の1つであり、応力誘導異方性の源と考えることができる。そして、この粒子構造

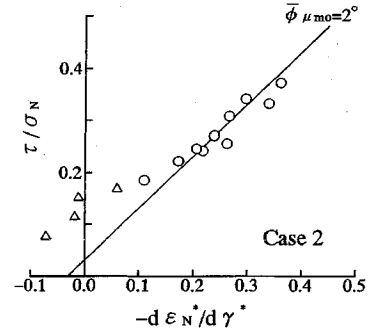
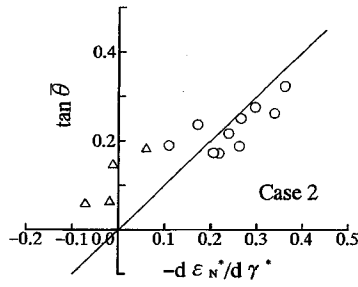
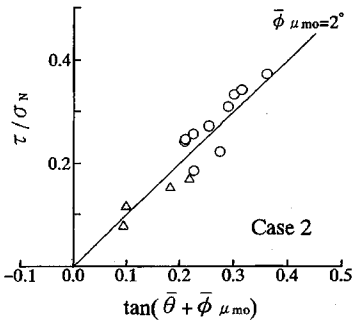
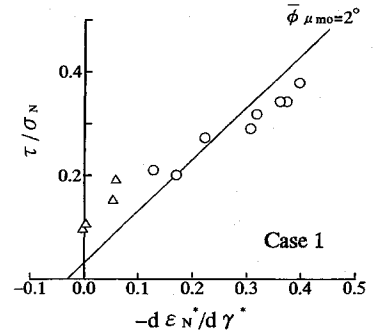
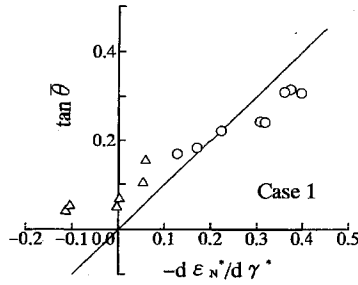
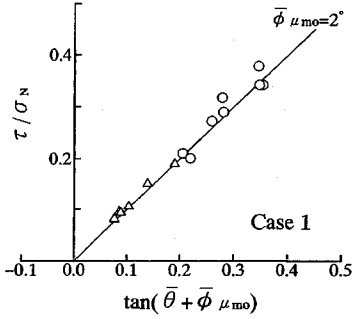


図-14 二軸圧縮試験の滑動面上での  $(\tau/\sigma_N) \sim \tan(\bar{\theta} + \bar{\phi}_{\mu mo})$  関係

図-15 二軸圧縮試験の滑動面上での  $(-d\epsilon_N^*/d\gamma^*) \sim \tan\bar{\theta}$  関係

図-16 二軸圧縮試験の滑動面上での  $(\tau/\sigma_N) \sim (-d\epsilon_N^*/d\gamma^*)$  関係

の変化が粒状体の外力に対する抵抗を支配する要因の1つであるといえる。図-12はケース1の滑動面上での粒子接点角の度数分布  $N(\theta)$  とその変化を最大度数  $N_{max}$  で正規化して示したものである(実際には、粒子接点角を  $10^\circ$  間隔の変域に区分し、その変域の中央値を  $\theta$ 、その変域内の接点の度数を  $N(\theta)$  としてプロットしている)。図-12に示される  $\tau/\sigma_N = 0.0, 0.2, 0.32$  での粒子接点角分布は、図-11の  $\sigma_1/\sigma_3 = 1.0, 1.5, 1.9$  における  $M(\alpha)$  の分布にそれぞれ対応するものである。ここに、滑動面としては、最大主応力面から角度  $(\pi/4 + \phi_{mo}/2)$  を成す複数の平行な面を供試体全体に一樣に設定し(間隔は  $10\text{ mm}$ 、数は  $44$  個)、接触する2粒子の中心を結ぶ線分が滑動面と交差するような2粒子の接点を滑動面上の接点としている(図-13参照)。従って、線分の長さが同じであれば、滑動面と線分の成す角が小さい( $\theta$ の絶対値が大きい)ものほど両者が交差する確率は小さくなる(交差する確率は線分が同じ長さの場合には  $\cos\theta$  となる)。よって、粒子構造が等方的で  $M(\alpha)$  が一定の場合(図-11(a))でも滑動面上の粒子接点角の度数分布  $N(\theta)$  は一定とはならず、図-12の破線で示されるように  $\cos\theta$  に近い分布となること( $M(\alpha)$  と  $N(\theta)$  の関係に注意すべきである。なお、図-11(b), (c)のように、最大主応力  $\sigma_1$  方向に粒子接点角の度数が集中している場合には、滑動面上で見ると  $\theta$  の正の

領域に粒子接点角の度数が集中するが、これらの場合にも  $\cos\theta$  で表される交差する確率が掛かるので、 $\theta$ の両端付近( $\theta$ が  $\pm 90^\circ$  に近いところ)の度数は小さくなるのが理解される(図-12の一点鎖線、実線を参照)。図-12より、「応力比  $(\tau/\sigma_N)$  の増加に伴って、滑動面上のせん断に抵抗する粒子接点角( $\theta$ が大きいほど抵抗しやすい)の度数が相対的に増加する」のが見られる。このことが粒状体のせん断抵抗を大きく支配する要因の1つであると考えられる<sup>9)</sup>。また、この事実が式(7)~(9)の誘導の基本的な考え方である。

図-14は式(7)に対する解析結果の整理を示している。縦軸にマクロ量としての滑動面上のせん断・垂直応力比  $(\tau/\sigma_N)$  を、横軸にミクロ量としての  $\tan(\bar{\theta} + \bar{\phi}_{\mu mo})$  をプロットしている。ここで、 $\bar{\phi}_{\mu mo}$  は滑動面上の粒子間で実際にモービライズされている摩擦角の平均値( $2^\circ$ 程度)から  $\bar{\phi}_{\mu mo} = 2^\circ$ (一定)とした。なお、せん断中の  $\bar{\phi}_{\mu mo}$  の変化は  $1.5^\circ \sim 2.5^\circ$  の範囲におさまっている。図-14より、式(7)が成立するのがみられる。図-15は式(8)に対するもので、マクロ量であるひずみ増分比  $(-d\epsilon_N^*/d\gamma^*)$  とミクロ量である  $\tan\bar{\theta}$  との関係が原点を通る  $45^\circ$  線上にほぼ整理されることがわかる。なお、図中の  $\Delta$  印は、ひずみの大きさに対して粒子自身の圧縮性が無視できないせん断初期の微小ひずみ( $\epsilon_1$ が  $10^{-3}\%$  オーダー以下)の時のもので、粒子の滑動によるひずみ

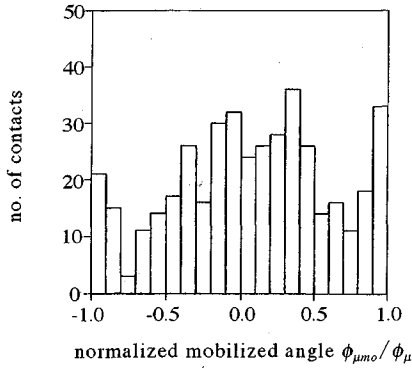


図-17 滑動面上でモービライズされている粒子間摩擦角の度数分布 (ケース1,  $\tau/\sigma_N=0.32$ )

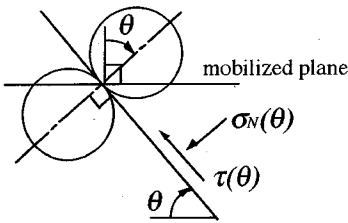


図-19 粒子接点角  $\theta$  の接平面に作用するマクロな垂直応力  $\sigma_N(\theta)$  とせん断応力  $\tau(\theta)$

を考慮する場合には除外すべきものである。図-16にミクロ量である滑動面上での平均的な粒子接点角  $\bar{\theta}$  を介して得られた式(9)のマクロ量 ( $\tau/\sigma_N$ ) とマクロ量 ( $-d\epsilon_N^*/d\gamma^*$ ) との関係 ( $\bar{\phi}_{umo}=2^\circ$ ) を実線で示し、解析結果から得られた応力比 ( $\tau/\sigma_N$ ) ~ ひずみ増分比 ( $-d\epsilon_N^*/d\gamma^*$ ) 関係をプロットしている。解析結果が式(9)の理論線上にほぼ整理されることがわかる。

以上から、第1次近似として、滑動面上の応力比 ~ ひずみ増分比関係は式(9)で表され、微視的、物理的意味は式(7)、(8)および図-9で示される関係であると解釈できる。

図-17は、二軸圧縮試験の場合の滑動面上の接点でモービライズされている正規化された粒子間摩擦角 ( $\phi_{umo}/\phi_\mu$ ) の度数分布の一例 (ケース1の  $\tau/\sigma_N=0.32$  の場合) を示している。なお、 $\phi_{umo}/\phi_\mu$  の正負は、滑動面上のせん断力に抵抗する方向にモービライズされている場合を正、その逆方向にモービライズされている場合を負としている。滑動面上の接点でモービライズされている摩擦角は、その絶対値の平均 ( $|\bar{\phi}_{umo}|$ ) では  $7\sim 9^\circ$  (粒子間摩擦角  $\phi_\mu=16^\circ$  の  $4\sim 6$  割) とかなりモービライズされているものの、正負をそのまま単純平均した場合には  $\bar{\phi}_{umo}=2^\circ$  程度である。これは、滑動面上の個々の接点でモービライズされる摩擦角は必ずしも滑動面上のせん断力に対して抵抗する方向だけではないことを意味し

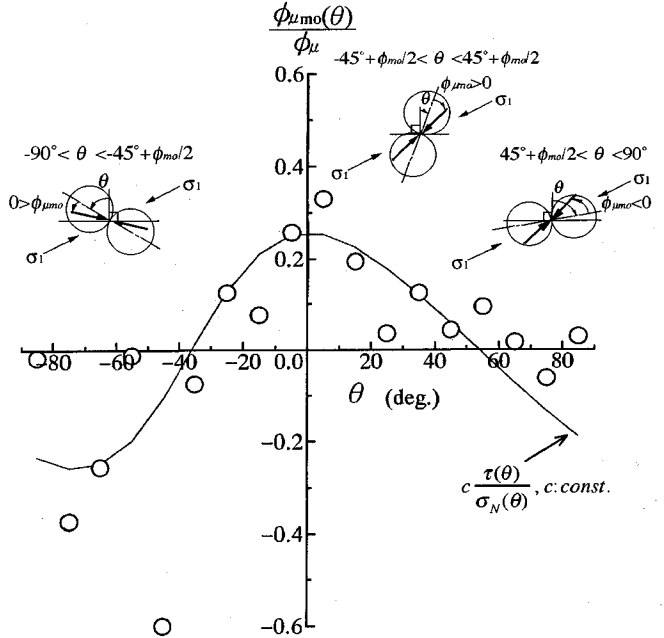


図-18 滑動面上でモービライズされている粒子間摩擦角の分布 (ケース1,  $\tau/\sigma_N=0.32$ )

ている。そこで、図-17と同じデータに対して、モービライズされている粒子間摩擦角  $\phi_{umo}$  を粒子接点角  $\theta$  との関係で整理しなおしたものを図-18に示す。ここでは、粒子接点角を  $10^\circ$  間隔の変域に区分し、その変域の中央値を  $\theta$ 、その変域内の粒子接点における  $\phi_{umo}$  の平均値を  $\phi_{umo}(\theta)$  として、 $\phi_{umo}(\theta)/\phi_\mu$  をプロットしている (○印)。なお、図中の実線は、粒子接点角  $\theta$  の接平面に平行な面に作用する次式で表されるマクロなせん断・垂直応力比 ( $\tau(\theta)/\sigma_N(\theta)$ ) の分布形を示したものである ( $\sigma_N(\theta)$ 、 $\tau(\theta)$  は図-19参照)。

$$\frac{\tau(\theta)}{\sigma_N(\theta)} = \frac{\sin \phi_{mo} \cdot \cos(2\theta - \phi_{mo})}{1 + \sin \phi_{mo} \cdot \sin(2\theta - \phi_{mo})} \dots \dots \dots (12)$$

図-18より、粒子接点角  $\theta$  の接点でモービライズされている平均的な摩擦角  $\phi_{umo}(\theta)/\phi_\mu$  の分布は、ほぼ実線 ( $c \cdot \tau(\theta)/\sigma_N(\theta)$ ,  $c: \text{const.}$ ) で近似されるのが見られる。これより、滑動面上の粒子接点での  $\phi_{umo}$  の正負は、図中上段の挿し絵に示すように粒子接点角  $\theta$  の3領域 ( $-90^\circ < \theta < -45^\circ + \phi_{mo}/2$ ,  $-45^\circ + \phi_{mo}/2 < \theta < 45^\circ + \phi_{mo}/2$ ,  $45^\circ + \phi_{mo}/2 < \theta < 90^\circ$ ) によって異なることがわかる (式(12)において  $\tau(\theta)/\sigma_N(\theta)=0$  とおけば、3つの領域の境界値  $\theta = \pm 45^\circ + \phi_{mo}/2$  が得られる)。この  $\phi_{umo}$  の正負は、最大主応力  $\sigma_1$  の作用方向を考慮して粒子が滑動しようとする方向を考えれば容易に理解される。以上より、滑動面上の粒子は一方に滑動するわけではなく、それゆえ図-17に示すような負の方向にモービライズされる粒子間摩擦角も多くなるのがわかる。



また、 $\phi_{umo}(\theta)$  がおおむね  $\tau(\theta)/\sigma_N(\theta)$  に比例するということは、粒子接平面に作用するマクロなせん断・垂直応力比 ( $\tau/\sigma_N$ ) が大きい粒子接点ほど滑動が活発である<sup>12)</sup> ことを示唆している。

## 6. おわりに

本研究では、アルミ丸棒積層体のせん断試験結果とそのDEMシミュレーション結果を定量的に比較して、DEMが粒状体の変形・降伏・破壊の基本的なメカニズムを研究するためのツールとして有効であるかどうかを調べた。また、丸棒積層体を模擬する場合の解析パラメータの決定方法を示した。そして、解析結果から土の構成式の中で最も重要な関係の1つである応力比～ひずみ増分比関係について考察した。本研究の主な結論は以下の通りである。

- (1) 個別要素法は粒状体挙動の微視的なメカニズムを研究する解析法として、定量的にも有効なツールである。
- (2) 粒状体の滑動面上の応力比 ( $\tau/\sigma_N$ ) とひずみ増分比 ( $-d\varepsilon_N^*/d\gamma^*$ ) は粒子構造を評価するパラメータ (平均粒子接点角  $\bar{\theta}$ ) を介して結び付けられ、両者の関係は第1次近似として本文中の式(9)で表現できる。

なお、用いた解析コードは、著者の1人が開発した粒状体個別要素解析プログラム (GRADIA 2D)<sup>13)</sup> である。また、計算にはNEC製のスーパーコンピュータSX-3/21Rを用いた。

最後に、齋木清志氏 (元名古屋工業大学学生)、武馬雅志氏 (名古屋工業大学学生) に実験を手伝って頂いた。また、本研究を行うにあたって大林組技術研究所の表佑太郎博士に数々のご助力を頂いた。記して感謝の意を表する次第である。

## 参考文献

- 1) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L. : A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, Vol.29, No.1, pp.47-65, 1979.
- 2) 中瀬仁・安中正・片平冬樹・興野俊也：平面ひずみ圧縮試験に対する個別要素法の適用, *土木学会論文集*, No. 454/Ⅲ-20, pp. 55-64, 1992.
- 3) Bardet, J. P. and Proubet, J. : A numerical investigation of the structure of persistent shear bands in granular media, *Geotechnique* 41, No.4, pp.599-613, 1991.
- 4) Rothenburg, L. , Bathurst, R. J. and Berlin, A. A. : Micromechanical response of simulated granular materials under principal stress rotations, *Powders & Grains* 93, Balkema, pp.147-153, 1993.
- 5) Rothenburg, L. and Bathurst, R. J. : Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials, *Geotechnique* 39, No.4, pp.601-614, 1989.
- 6) 土木学会編：構造力学公式集, 第2版, pp. 417-419, 1986.
- 7) 船橋鉦一・内藤正：接線力を受ける個体接触面の剛性について, *潤滑*, 第20巻, 第11号, pp.783-790, 1975.
- 8) 松岡元・齋木清志：2次元粒状体(丸棒)の粒子間摩擦角 ( $\phi_n$ ) の一測定法, 第27回土質工学研究発表会, 2分冊の1, pp. 579-590, 1992.
- 9) Matsuoka, H. : A microscopic study on shear mechanism of granular materials, *Soils and Foundations*, Vol.14, No.1, pp.29-43, 1974.
- 10) 中井昭夫：土の変形・強度特性と地盤の変形解析への適用に関する研究, *京都大学学位論文*, pp. 14-15, 1980.
- 11) Oda, M. : Deformation mechanism of sand in triaxial compression tests, *Soils and Foundations*, Vol.12, No.4, pp.45-63, 1972.
- 12) 山本修一・松岡元：粒状体のせん断時の粒子接点角の変化とせん断ひずみの関係, 第48回年次学術講演会講演概要集第3部, 土木学会, pp. 858-859, 1993.
- 13) 山本修一・表佑太郎・伯野元彦：スーパーコンピュータを用いた個別要素法による岩砕地盤の動的挙動解析, *地盤工学における数値解析法シンポジウム論文集*, 第14巻, pp. 377-382, 1990.

(1993. 6. 1 受付)

## A MICROSCOPIC STUDY ON SHEAR MECHANISM OF GRANULAR MATERIALS BY DEM

Hajime MATSUOKA and Syuichi YAMAMOTO

To investigate the quantitative applicability of the distinct element method (DEM) to stress-strain behavior of granular materials, direct shear box tests and biaxial compression tests on granular assemblies of aluminium rods are compared with DEM. And using the analytical results, the stress ratio versus strain increment ratio relation on the "mobilized plane" is investigated from the microscopic points of view. The conclusions can be summarized in the followings. (1) DEM can be a useful tool for research into the microscopic mechanism of the behavior of granular materials. (2) On the "mobilized plane", the stress ratio and the strain increment ratio can be linked respectively through the average value of interparticle contact angle and the stress ratio can be linearly related to the strain increment ratio.