

# 非共軸性の評価を取り入れた砂の繰返し弾塑性構成モデル

森尾 敏\*・日下部 伸\*\*・安福規之\*\*\*・  
兵動正幸\*\*\*\*

近年、液状化時の土の非線形挙動を解析的に求め、これを設計に取り入れようとする試みがみられるようになってきた。液状化解析で用いる構成モデルは、一般応力空間での砂の挙動が妥当に説明できるとともに、その土質定数も決定しやすいものである必要がある。ここでは、応力主軸と塑性ひずみ増分主軸の非共軸性を取り入れた繰返し構成モデルを提案し、実験結果との比較からその適用性について検討する。

**Key Words** : constitutive relations, liquefaction, non-coaxiality, dilatancy, anisotropy

## 1. ま え が き

1960～1980年代、降伏曲面の内部を弾性領域とする前提を捨て、その内部の応力変化による塑性変形の記述を目的として種々の繰返し弾塑性構成モデルが提案された<sup>1)</sup>。これらのモデルは、すべて何らかの異方硬化則を導入することで繰返し載荷時のメising則あるいはパウシンガー効果をうまく表現しようとしたものである。このうち、Mroz<sup>2)</sup>の塑性硬化係数場モデルはその後の繰返しモデルの発展の出発点となったモデルで、降伏曲面の内部に一定の硬化係数を有する多数の曲面を配置していることから、多曲面モデルとも呼ばれている。その後、多曲面モデルの煩雑さを嫌ってこのモデルを単純化した2曲面モデル<sup>3)</sup>、2曲面モデルをさらに簡潔にした単曲面モデル<sup>4),5)</sup>、また多曲面モデルを数学的に一般化した無数曲面モデル<sup>6)</sup>が提案された。また、橋口<sup>1)</sup>は相似中心と呼ばれる概念を導入することで、常に滑らかな応力-ひずみ関係を表現するとともにメising効果を制御できる拡張下荷面モデルを提案している。

しかし、これらのモデルは液状化解析への適用を想定すると、理論的枠組みとしての色彩が強い。さらに、その大部分は材料定数の数が非常に多く、対象材料への適用においては、その意味付け、決定法を確立すると共に圧密履歴、ダイレイタンス特性等の土固有の特性に対する検討が必要であろう。

一方、近年土質工学会では二つの研究委員会<sup>7),8)</sup>で要素試験、1次元地盤、土構造物、地盤-構造物連成系の問題に対して一斉解析を行い、構成モデルの液状化解析への適用性を調べており、境界値問題としての現実の問

題への適用も活発に行われるようになってきた。しかしながら、液状化挙動を解析で求めようとするとまだまだ十分でないことも多く、満足できる構成モデルは存在しないといえる。

本研究では、一般応力空間での砂の非線形挙動を表現するひとつの繰返し弾塑性構成モデルを提案する。モデルの最大の特長は、非共軸性（主応力方向と塑性主ひずみ増分方向が一致しない現象）の評価が積極的に取り入れられていることであり、その重要性が実験結果との比較から示される。

## 2. 繰返し弾塑性構成モデル

### (1) モデルの特長

繰返し弾塑性構成モデルを二次元あるいは三次元の液状化解析に適用する時、次の項目を解決しておかなければならないと考える。以下では、古典弾塑性論における降伏曲面を橋口<sup>1)</sup>にならって正規降伏曲面と呼ぶこととする。

- ①：一般応力空間での応力の反転が考慮できること。すなわち、不変量で記述された構成モデルでは、応力の符号も含めて完全に反転する両振り載荷と応力の符号は反転することのない片振り載荷の区別ができないが、両者が明確に区別できること。
- ②：負荷曲面は、ひずみの増加に伴って塑性状態で正規降伏曲面に漸近するが、交差してはならない。
- ③：土の異方性の影響により、主応力軸の回転に伴う塑性変形を記述できること。

本報告では、これらの点を考慮して既に提案している繰返し構成モデル<sup>9),10)</sup>を拡張し、飽和砂の液状化解析を想定した新たな繰返しモデルを提案する。モデルの特長は次の通りで、このうち③～⑥は本モデルの独自性を示すものである。

- ①：本モデルは、塑性硬化係数場理論<sup>2)</sup>に基づく無数

\* 正会員 (株)奥村組技術研究所 主任研究員  
(〒559 大阪市住之江区浜口西3-5-8)

\*\* 正会員 (株)奥村組筑波研究所 主任研究員

\*\*\* 正会員 工博 山口大学講師 工学部社会建設工学科

\*\*\*\* 正会員 工博 山口大学助教授 工学部社会建設工学科

曲面モデルの範疇に属し、応力比一定タイプの正規降伏曲面とその内部に定義される無数の硬化曲面によって構成される。硬化曲面は、応力空間において一定の硬化係数を有する応力点を結んだ曲面である。このうち、現在の応力点を通る活動硬化曲面は、負荷の方向を規定する負荷曲面として用いられ、その移動、拡大および縮小によって古典弾塑性論で弾性域として取り扱われてきた領域での弾塑性挙動を記述する。

- ②：本モデルで、陽に用いられる曲面は、正規降伏曲面、負荷曲面、最新の応力反転曲面、過去の最大の応力反転曲面および弾性域を定義する硬化曲面の5つで、5曲面モデルと呼ぶこともできる\*。
- ③：正規降伏曲面および負荷曲面に、中間主応力の影響を考慮した松岡・中井<sup>11)</sup>の破壊基準によって表現される異方性を組み入れる。このとき、一般応力空間では応力点の移動に伴って対応する正規降伏曲面の半径が変化するため、この変化を考慮した硬化則の設定が必要である。ここでは、偏差応力比を正規降伏曲面の半径で基準化した応力比でモデルを組み立てることでこの問題を解決している。
- ④：モデルは非関連流れ則に基づいており、塑性偏差ひずみ増分の方向は、③負荷曲面の偏差応力空間での外向き法線方向単位テンソル、⑥応力反転の影響を表す単位テンソル、および⑦過去の応力履歴の影響を表す単位テンソルの線形和によって決定されると仮定する。⑤、⑥の導入によって、増分線形モデルの範疇で繰返し載荷時の非共軸性をうまく表現することができる。
- ⑤：④で決定された偏差ひずみに関する流れ則に基づいて、一般応力空間で非共軸性の程度を表すスカラー変数  $c$  が定義される。この  $c$  をストレス・ダイレイタンス関係に導入すること、すなわち、非共軸性の評価を取り入れることで応力反転後のダイレイタンス特性をうまく表現することができる。
- ⑥：過去の最大の応力反転曲面による応力誘導異方性を表す新たな応力反転曲面を導入する。これによって、無数曲面モデルの問題点である応力振幅が低下する載荷に対する応答についてもうまく表現することができる。
- ⑦：モデルのパラメータは、弾性定数も含めて7個と比較的少なく、その意味も明らかである。

\* 無数曲面モデルでは、応力点の移動に伴って活動硬化曲面（負荷曲面）は別の硬化曲面に飛び移り、この曲面が新たな負荷曲面になると考えられている。しかし、設定された硬化係数の下で適応条件は暗に満足されると考えれば、応力点の移動に伴って同一の負荷曲面が移動、拡大したとみることができる。この意味から、本モデルは5曲面モデルと呼ぶこともできる。

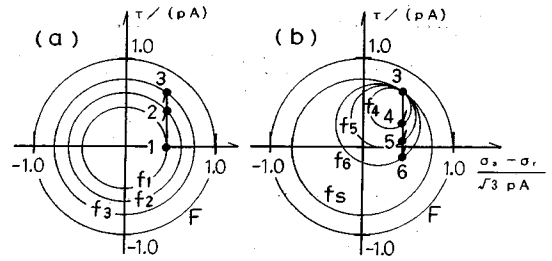


図-1 モデルの概要

以下、応力はすべて有効応力で圧縮を負とする。また、テンソルは指標表示し、総和規約を用いる。

(2) モデルの概要

図-1は、モデルの構成を簡単のため2次元平面で概念的に示したもので、ここに、 $\sigma_a$ は軸応力、 $\sigma_r$ は側方応力、 $\tau$ はせん断応力、 $p$ は平均主応力である。モデルは、軸差応力比 $((\sigma_a - \sigma_r) / (\sqrt{3} p))$ およびせん断応力比 $(\tau / p)$ を正規降伏曲面  $F$  の半径  $A$  で基準化した空間で組み立てられており、この空間では、 $F$  は半径1の円である。以下、この空間を基準化空間、この空間での応力比を基準化応力比と呼ぶ。

モデルを基準化空間で組み立てることで、負荷状態を正規降伏曲面  $F$  の大きさに対する負荷曲面  $f$  の大きさの比  $R$  で定義することができ、 $F$  の半径  $A$  が変化する一般応力空間での異方硬化則を幾何学的に容易に設定することができる。

同図 (a) は、異方圧密状態 ( $\sigma_a > \sigma_r, \tau = 0$ ) の点1からのせん断過程 (1→3) での負荷曲面  $f$  と正規降伏曲面  $F$  を示す。正規圧密砂の初期状態の  $f$  は、原点を中心とする  $f_1$  で表される。 $\tau$  の増加に伴って  $f$  は次第に拡大し、点3で  $f_3$  に達する。同図 (b) は、点3からの逆方向のせん断過程 (3→6) を示す。応力反転の瞬間に負荷曲面は、 $f_3$  上の点となって現れる。この応力反転が生じる直前の負荷曲面 ( $f_3$ ) を応力反転曲面  $f_s$  と呼ぶ。以後、逆方向のせん断の進行に伴って  $f$  は点3に接しながら次第に拡大し、点6で  $f_6$  に達する。このことは、1→3のせん断過程において負荷曲面が内側の硬化曲面を引き連れて拡大したことを表し、過去の最大の  $R$  を越えて  $f$  が拡大するとき (処女載荷時) は、 $f$  の中心は常に基準化空間の原点にある。

(3) 正規降伏曲面  $F$ 、負荷曲面  $f$ 、応力反転曲面  $f_s$  および弾性領域を定義する硬化曲面  $f^E$

正規降伏曲面  $F$  は、2階の応力テンソル  $\sigma_{ij}$  を用いて式 (1) で表され、前述のように基準化空間で半径1の円である。ここでは、 $F$  の硬化は考慮されておらず、 $F$  は破壊曲面としての意味をもつ。

$$F = R_{ij} R_{ij} - 1^2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $R_{ij} = \eta_{ij} / A, \eta_{ij} = S_{ij} / p, p = (1/3) \sigma_{kk}$

$S_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$ ,  $\theta = (1/3)\sin^{-1}(-1.5\sqrt{3}J_3/J_2^{3/2})$ ,  
 $A = \sqrt{2/3}G(\theta)$ ,  $J_3 = (1/3)S_{ij}S_{jk}S_{ki}$ ,  $J_2 = (1/2)S_{ij}S_{ij}$ ,  
 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。上式で用いられる  
 $G(\theta)$  は、中間主応力による強度異方向性を考慮し、かつ  
 数学的に取り扱いやすいテンソル不変量表示したもので、  
 種々の式が提案されている。ここでは、SMP の概念に  
 基づく松岡・中井モデル<sup>11)</sup>をローデ角  $\theta$  の関数として  
 表示した次式<sup>12)</sup>を用いる。

$$G(\theta) = 1/\{2(-v/3)^{1/2}\cos(u/3)\} \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $v = (3-k)/(3(k-9))$ ,  $k = 9 + 8\tan^2\phi$ ,  
 $\cos u = -s/\{2(-v/3)^{3/2}\}$ ,  $s = 2k \cdot \sin(3\theta)/\{27(k-9)\}$ ,  
 $\phi$  は軸対称応力状態 ( $\theta = \pm\pi/6$ ) での破壊時の内部摩擦  
 角である。すなわち、正規降伏曲面  $F$  の  $\pi$  平面での形  
 はモールクーロン規準の角を滑らかに結んだもので、軸  
 対称応力状態でモールクーロン規準と一致する。

負荷曲面  $f$  は常に現在の応力点を通るように決定さ  
 れ、次式で表される。

$$f = (R_{ij} - \alpha_{ij})(R_{ij} - \alpha_{ij}) - R^2 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 $\alpha_{ij}$  は基準化空間での  $f$  の中心座標、 $R$  ( $0 \leq R < 1$ )  
 は基準化空間での  $f$  の半径で、次式で表される一般応力  
 空間での  $f$  の半径  $a$  と  $F$  の半径  $A$  の比である。

$$a = a_0/G(\bar{\theta}) \dots \dots \dots (4)$$

上式の  $G(\bar{\theta})$  は式 (2) の  $\theta$  を次式の  $\bar{\theta}$  に置き換えたも  
 ので、 $a_0$  は後述の式 (23) から決定される。

$$\bar{\theta} = (1/3)\sin^{-1}(-1.5\sqrt{3}\bar{J}_3/\bar{J}_2^{3/2}) \dots \dots \dots (5)$$

ただし、 $\bar{J}_3 = (1/3)\bar{S}_{ij}\bar{S}_{jk}\bar{S}_{ki}$ ,  $\bar{J}_2 = (1/2)\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}$ ,  
 $\bar{S}_{ij} = S_{ij} - pA\alpha_{ij}$  である。

応力反転曲面  $f_s$  は応力反転が生じる直前の負荷曲面  
 で、 $f$  と同様に式 (3) で表される。この曲面は、応力  
 点が曲面の外に出てくるまではその大きさ、位置を変え  
 ず、外に出てきたとき  $f_s$  に関する過去の情報は消失す  
 る。このうち、最新の応力反転曲面を  $f_s^N$ 、過去の最大  
 の応力反転曲面を  $f_s^M$  と呼び、 $f_s^N$  の半径を  $R_s^N$ 、 $f_s^M$   
 の半径を  $R_s^M$  で表す。 $f_s^M$  は、基準化空間における過去  
 の最大の負荷曲面を意味する。

弾性領域を定義する半径  $R^E$  の硬化曲面  $f^E$  は、液状  
 化強度曲線の下限值 (液状化に至る繰返し回数  $N_1 = \infty$   
 の時の応力比) を制御し、強度曲線の勾配を調整するこ  
 とができる<sup>10)</sup>。 $R^E$  は一定で、パラメーターとして与え  
 られる。この曲面は、 $R > R^E$  の時  $f$  上の応力点に接し  
 ながら移動し、このとき弾塑性変形が生じる。応力点が  
 $f^E$  の内部にある時は、その位置も不変で、弾性変形  
 のみが生じる。本曲面は、弾性領域と弾塑性領域の境界を  
 定義するという意味から、古典弾塑性論における降伏曲  
 面とみなすことができ、 $R^E = 0$  の時降伏曲面は存在し  
 ないことになる。また、 $R^E = 1$  の時正規降伏曲面内全

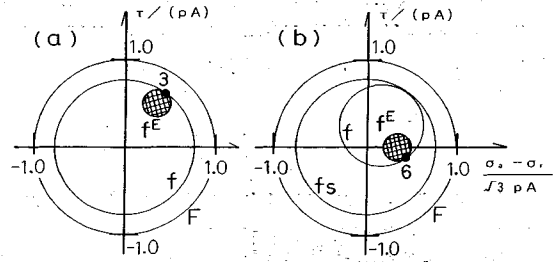


図-2 弾性領域を定義する硬化曲面  $f^E$

域が弾性域となり、古典弾塑性論に帰着する。図-1 は  
 $R^E = 0$  の時の説明図であるが、 $R^E \neq 0$  の時、点 3 及び  
 点 6 の時点での  $f^E$  を示すと図-2 のようになる。

(4) 流れ則

本モデルでは、2種類の流れ則が用いられる。1つは、  
 偏差応力空間での流れ則、もう1つは、 $p - \sqrt{2}j_2$  平面で  
 の流れ則である。前者は 3. で後述する実験結果に基づ  
 き設定されるもので、塑性偏差ひずみ増分  $de^p_{ij}$  の方向  
 を定義する。後者は、塑性体積ひずみ増分  $de^p_v$  と  $|de^p_{ij}|$   
 の比、すなわち、ストレス-ダイレイタンス-関係を  
 定義する。ここに、 $de^p_{ij} = de^p_{ij} - (1/3)de^p_v\delta_{ij}$ ,  $de^p_v =$   
 $de^p_{kk}$ ,  $de^p_{ij}$  は塑性ひずみ増分で、 $| \cdot |$  はテンソルの大き  
 きを表す。

a) 偏差応力空間での流れ則

まず、塑性偏差ひずみ増分  $de^p_{ij}$  に関する流れ則を示  
 す。 $de^p_{ij}$  の方向を示す単位テンソル  $G_{ij}$  ( $= de^p_{ij}/|de^p_{ij}|$ )  
 として、次式を用いる。

$$G_{ij} = Q_{ij}/|Q_{ij}| \dots \dots \dots (6)$$

上式の  $Q_{ij}$  として新たに次式を導入する。

$$Q_{ij} = (1-d)Q^N_{ij} + d(Q^L_{ij} + \chi(1-R_s^M)Q^H_{ij}) \dots (7)$$

ここで、 $d$  ( $0 \leq d \leq 1$ )  $= R/R_s^M$ ,  $\chi$  は応力履歴に依存す  
 る非共軸性の程度を表すパラメーターである。 $Q^L_{ij}$  は負  
 荷曲面  $f$  の偏差応力空間での外向き法線方向単位テンソ  
 ルで、式 (8) で表される。

$$Q^L_{ij} = -(R_{ij} - \alpha_{ij})/|R_{ij} - \alpha_{ij}| \dots \dots \dots (8)$$

$Q^N_{ij}$  は現在の応力点から過去の最大の応力反転曲面  $f_s^M$   
 の中心 (基準化空間の原点) に向かう単位テンソルで、  
 応力反転の影響を表し、式 (9) で示される。

$$Q^N_{ij} = R_{ij}/|R_{ij}| \dots \dots \dots (9)$$

なお、 $R > R_s^M$  の処女載荷時においては、 $d = 1$  である  
 ことに留意する必要がある。 $Q^H_{ij}$  は直前の応力経路の  
 方向を示す単位テンソルで、過去の応力履歴の影響を表  
 し、式 (10) で示される。

$$Q^H_{ij} = -(R_{ij} - R^L_{ij})/|R_{ij} - R^L_{ij}| \dots \dots \dots (10)$$

ここに、 $R^L_{ij}$  は前ステップでの基準化応力比である。こ  
 の応力履歴の影響を表す  $Q^H_{ij}$  は、塑性ひずみ増分方向

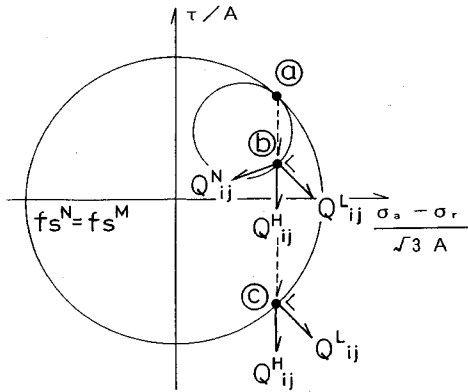


図-3 偏差応力空間での流れ則

の応力増分方向依存性<sup>1), 4), 5), 10), 13)</sup>を考慮することによる非共軸性に比べ、より強い非共軸性を与えることができる。また、応力増分方向依存性を考慮した増分非線形のモデルは、一般に、塑性ひずみ増分方向を定義するのに、応力増分  $d\sigma_{ij}$  と  $F$  の交点（共役点）を求める必要があるが、式（2）のようにローデ角  $\theta$  の関数として異方向性を導入したモデルでは、共役点を解析的に決定できないこと、および、構成関係が増分非線形であるために、（6）で後述する弾塑性係数テンソルを求めるのに収束計算が必要であること等の問題点を有する。一方、ここで示すモデルは増分線形であるため、これらの問題が解消され、FEM 解析において計算時間を大幅に低減することができる。

図-3は、上述した  $Q_{ij}^L$ ,  $Q_{ij}^N$ ,  $Q_{ij}^H$  を偏差応力空間で模式的に示したものである。①点での応力反転が生じ①→②→③と応力点が移動したとき、②, ③点でのそれぞれの単位テンソルを示している。②点では  $0 < d < 1$  で、 $Q_{ij}$  は式（8）,（9）,（10）の3つの単位テンソルの線形和で表され、 $R$  が小さいほど  $Q_{ij}^N$  の効果（応力反転の影響）が大きくなる。③点を越えると  $d=1$  のため、 $Q_{ij}^N$  の効果は消失し、 $Q_{ij}$  は  $Q_{ij}^L$  と  $Q_{ij}^H$  で記述される。そして、 $R=1$ , すなわち、 $f=F$  に接近するにつれて  $Q_{ij}^H$  の効果は減少し、 $R=1$  では  $Q_{ij}$  は  $Q_{ij}^L$  のみで記述され、主応力方向と塑性主ひずみ増分方向が一致する共軸性を表すことができる。

パラメータ  $\chi$  は、処女載荷時 ( $d=1$ ) に応力履歴に依存する非共軸性の程度を表す。 $\chi=0$  の時は、 $G_{ij} = Q_{ij}^L$  で常に共軸である。 $\chi$  を大きくするほど応力履歴に依存する非共軸性の程度を大きく表現することができ、前ステップの  $d\sigma_{ij}$  の方向によってその程度は変化する。

b)  $p-\sqrt{2}J_2$  平面での流れ則

次に、上で定義された  $G_{ij}$  に  $p-\sqrt{2}J_2$  平面での流れ則、すなわちストレス-ダイレイタンス-関係を重ね合

わせて、塑性ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}^p$  の方向を規定する単位テンソル  $g_{ij}$  ( $=d\epsilon_{ij}^p/|d\epsilon_{ij}^p|$ ) を定義する。 $g_{ij}$  は  $G_{ij}$  に体積成分を導入することによって次式で表すことができる。

$$g_{ij} = \alpha G_{ij} + (1/3)\alpha\beta\delta_{ij} \dots\dots\dots(11)$$

上式の両係数  $\alpha, \beta$  を決定するために、本モデルでは次のカムクレイ型のストレス-ダイレイタンス-関係を用いている。

$$-d\epsilon_v^p/d\epsilon_s^p = M - c\eta \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $M = \sqrt{2/3}G_M(\theta)$ ,  $\eta = |\eta_{ij}|$ ,  $d\epsilon_s^p = |d\epsilon_{ij}^p|$  であり、 $\phi_m$  を軸対称応力状態での体積最大圧縮時の内部摩擦角とすると、 $G_M(\theta)$  は式（2）の  $\phi$  を  $\phi_m$  に置き換えたものとなる。

式（12）の  $c$  ( $-1 \leq c \leq 1$ ) は、本研究で新たに導入した非共軸性の程度を表すスカラー変数で、 $c=1$  は共軸を、 $c=-1$  は主応力方向と塑性主ひずみ増分方向が逆向きであることを示す。すなわち、式（12）はカムクレイ型のストレス-ダイレイタンス-関係に非共軸性の評価を導入したもので、Gutierrez の 2 次元平面（平面ひずみ）での提案<sup>13)</sup>を一般応力空間での関係式に拡張したものである。以下、その決定法を示す。

カムクレイ・モデルのエネルギ-消散式を一般応力空間で表すと次式のようにになる。

$$p d\epsilon_v^p + S_{ij} d\epsilon_{ij}^p = M p d\epsilon_s^p \dots\dots\dots(13)$$

上式の左辺第 2 項は、主応力方向と塑性主ひずみ増分方向が異なる場合、応力とひずみの不変量  $(2J_2)^{1/2}$  および  $d\epsilon_s^p$  を用いると次のように表される。

$$S_{ij} d\epsilon_{ij}^p = c(2J_2)^{1/2} d\epsilon_s^p \dots\dots\dots(14)$$

比例定数  $\lambda$  ( $=|d\epsilon_{ij}^p|$ ) と式（11）を用いて、次式が得られる。

$$d\epsilon_{ij}^p = \lambda(\alpha G_{ij}) \dots\dots\dots(15)$$

$$d\epsilon_s^p = \lambda\alpha \dots\dots\dots(16)$$

両式を式（14）に代入すると、 $c$  は次式で与えられる。

$$c = S_{ij} G_{ij} / (2J_2)^{1/2} \dots\dots\dots(17)$$

ここに、 $\lambda = df/K_p$ ,  $df$  ( $=n_{ij} d\sigma_{ij}$ ) は負荷指標、 $K_p$  は硬化係数、 $n_{ij}$  は負荷の方向を示す単位テンソルで、式（14）を式（13）に代入すると、式（12）が得られる。

以上から、式（12）に式（16）と式（18）を代入すると式（11）の係数  $\beta$  は式（19）で表される。

$$d\epsilon_v^p = \lambda\alpha\beta \dots\dots\dots(18)$$

$$\beta = -(M - c\eta) \dots\dots\dots(19)$$

係数  $\alpha$  は、 $|g_{ij}|=1$  より、次のようになる。

$$\alpha = \{3/(\beta^2 + 3)\}^{1/2} \dots\dots\dots(20)$$

流れ則の解析手順は、まず、式（6）～（10）から  $G_{ij}$  が決定され、 $G_{ij}$  を式（17）に代入して  $c$  が決まる。次に、 $c$  を式（19）に代入して  $\beta$  が、式（20）で  $\alpha$  が決定

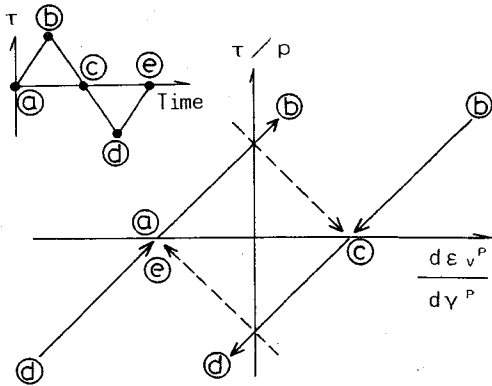


図-4 ストレス-ダイレイタンス-関係

される。最後に、 $G_{ij}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ を式(11)に代入して $g_{ij}$ が定義される。

ここで、 $c$ の影響を調べるため、等方応力状態でせん断応力 $\tau$ が変動する場合を考えてみる。図-4の左上に示すようなせん断履歴において、a~bおよびc~dでは $c=1$ 、b~cおよびd~eでは $c=-1$ である。この結果、式(12)は図-4の実線で示すように実験結果とうまく対応するストレス-ダイレイタンス-関係を表現することができ、 $c$ の符号の反転によってストレス-ダイレイタンス-関係に応力反転の効果が反映される。比較のため、式(12)で $c=1$ とし、カムクレイ・モデルのストレス-ダイレイタンス-関係をそのまま繰返し載荷に用いた場合は、応力反転後のb~cおよびd~eは破線のようになり、明らかに既往の実験結果<sup>14)</sup>と矛盾し、 $d\varepsilon_v^p$ の符号さえ一致しないことが分かる。

(5) 負荷指標  $df$

塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^p$ の大きさを規定する $df$ は、式(15)、(16)に関連して前述したように次式で与えられ、同式は、同時に載荷、除荷状態を判定する負荷指標として用いられる。

$$df = n_{ij} d\sigma_{ij} \dots \dots \dots (21)$$

負荷の方向を示す単位テンソル $n_{ij}$ は、次式で与えられる(付録1参照)。

$$n_{ij} = (\partial f / \partial \sigma_{ij}) / |\partial f / \partial \sigma_{ij}| \dots \dots \dots (22)$$

上式は式(8)との比較から、処女載荷時( $d=1$ )に $\chi=0$ の時のみ偏差応力空間で負荷の方向が流れの方向と一致することを表す。式(21)は応力反転の瞬間のみ $df < 0$ を示し、この時 $f$ は点に縮小する。それ以外はすべて $df > 0$ で、載荷として取り扱われる。

(6) 硬化則

本モデルでは $df=0$ 及び $R \leq R^E$ の場合を除いて、応力点の移動によって常に新しい負荷曲面 $f$ が形成される。ただし、2曲面および多曲面モデルにおいては、何らかの移動硬化則を設定し、適応条件を介して $f$ の中心

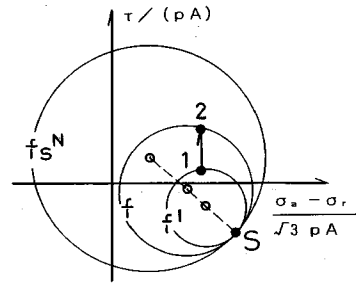


図-5 負荷曲面の決定法則

座標 $\alpha_{ij}$ が決定されるのに対し、本モデルではこれを介さず幾何学的条件だけから $\alpha_{ij}$ および $f$ の半径 $R$ を決定することができる。このことは、後述の式(25)で与えられ硬化係数の下で、適応条件を満足する移動則が暗に設定されていると考えることもできる。

具体的には、式(23)を式(3)に代入し $R$ に関する2次方程式を作成する。

$$\alpha_{ij} = \{ \alpha^I_{ij} (R_s^N - R) + \alpha^N_{ij} (R - R^I) \} / (R_s^N - R^I) \dots \dots \dots (23)$$

ここに、 $R^I$ ,  $\alpha^I_{ij}$ は前ステップの負荷曲面 $f^I$ の半径と中心座標、 $\alpha^N_{ij}$ は $f_s^N$ の中心座標である。 $R$ はこの2次方程式の一つの解(付録2参照)で、 $\alpha_{ij}$ は、得られた $R$ を式(23)に代入して決定される。

図-5は、図-1と同じ平面で式(23)を示したものである。同図は、応力点が1→2に移動した時、 $f^I$ の中心と $f_s^N$ の中心を結ぶ線の上に $f$ の中心が決定され、 $f$ ,  $f^I$ および $f_s^N$ が応力反転の生じた点Sで接し、これらの曲面が交差しないことを表している。別の表現をすると、負荷曲面の中心の移動量 $d\alpha_{ij} (= \alpha_{ij} - \alpha^I_{ij})$ は、半径の拡大量 $dR (= R - R^I)$ を用いて次式で表せることを意味している。

$$d\alpha_{ij} = (\alpha^N_{ij} - \alpha^I_{ij}) dR / (R_s^N - R^I) \dots \dots \dots (24)$$

なお、繰返し載荷時の応力反転を記述するために、応力反転が生じた図-5の点Sを中心とし、等方的に拡大する同心円で負荷曲面を表すモデルも数多く提案されている<sup>15)</sup>。しかし、この種のモデルは、一次元応力-ひずみ関係を取り扱う場合には問題ないが、一般応力空間では $f$ と $F$ が交差し、 $K_p \neq 0$ で応力点が $F$ に到達することとなり、塑性状態で $f$ が $F$ に漸近する現象をうまく表せない。

ところで、本モデルで採用した無数曲面モデルあるいは多曲面モデルは、応力振幅が低下する繰返し載荷において原理的には、すべての応力反転曲面を記憶せねばならないという問題をもっている。この問題は、Hardin-Drnevich, Ramberg-Osgood等の一次元応力-ひずみモデルにメISING則を導入する時、除荷開始時の情報を何個まで記憶しておくかという問題と同じである。

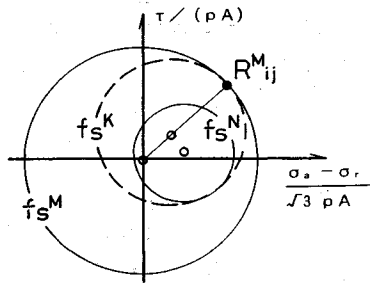


図-6 新たな応力反転曲面  $f_s^K$

この問題に対し、本モデルでは負荷曲面  $f$  および最新の応力反転曲面  $f_s^N$  の半径と中心座標、過去の最大の応力反転曲面  $f_s^M$  が生じた時点での基準化応力比  $R_s^M$  を記憶することで、上述した無数曲面モデルの煩雑さを解消している。ここに、 $R_s^M = |R^M|$  である。この場合、応力振幅が低下する応力反転が3回以上発生すると  $f_s^N$  と  $f_s^M$  は接しなくなり、その後応力点が  $f_s^N$  の外側に出てきたとき何らかの工夫が必要になる。この対策として、図-6を用意した。同図では、応力点が  $f_s^N$  の外側で  $f_s^M$  の内側に出たときは、破線で示すように  $R_s^M$  を通り  $f_s^N$  の外側に接する新たな曲面  $f_s^K$  を定義し、応力点が  $f_s^K$  の内にあるか否かを判定する。内にあるときは、 $f_s^N$  を  $f^I$ 、 $f_s^K$  を新たな応力反転曲面  $f_s^N$  とし、外にあるときは  $f_s^K$  を  $f^I$ 、 $f_s^M$  を  $f_s^N$  として式 (23)、(3) から  $f$  が決定される。このことは、過去の最大基準化応力比  $R_s^M$  による応力誘導異方性が  $R < R_s^M$  で存在し、 $R \geq R_s^M$  で消失することを意味する。 $f_s^K$  の半径  $R^K$  および中心座標  $\alpha_{ij}^K$  は、付録3に示す通りで、 $\alpha_{ij}^M$  は  $f_s^M$  の中心（基準空間での原点）と  $R_s^M$  を結ぶ線上に位置する。

この方法を用いることで、負荷曲面の半径  $R$  の滑らかな遷移を表現することができる。同時に、プログラム記憶域を大幅に低減でき、数値計算アルゴリズムの簡略化を図ることができる。また、下の式 (25) で示すように硬化係数  $K_p$  は  $R$  の関数で表されるため、 $K_p$  の滑らかな遷移も表現される。

応力-ひずみ関係を定義するには、最後に硬化係数  $K_p$  を設定する必要がある。硬化係数  $K_p$  は、負荷曲面の半径  $R$  で規定され、次式で与えられる。

$$K_p = K_{pI} (p/p_I)^{1/2} \{ (1-R)/(1-R^E) \}^2 \dots \dots \dots (25)$$

ここに、 $K_{pI} = rK_I$ 、 $p_I$  は初期平均主応力、 $K_I$  は初期体積弾性係数である。 $r$  は本モデルのパラメーターで、硬化係数の初期値  $K_{pI}$  を初期体積弾性係数  $K_I$  で規準化したものである。

この結果、除荷曲線は処女載荷曲線の半分の曲率をもつことになり、メイシング則が表される<sup>1)</sup>。また、 $f = F$  の時、 $R = 1$ 、 $K_p = 0$  であり、塑性状態で  $f$  は  $F$  に限りなく漸近するが、一致することはない。

誘導過程は省略するが、式 (25) は、処女載荷時の一次元応力-ひずみ関係 ( $\tau$ - $\gamma$  関係) を双曲線で表示したことに相当し、このとき、 $r$  はこの応力-ひずみ関係の初期接線勾配を規定する。

(6) 弾塑性定数テンソル  $D_{ijkl}^{EPE}$

上で算定された  $n_{ij}$ 、 $g_{ij}$  および  $K_p$  を基づいて、応力増分  $d\sigma_{ij}$  は、全ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}$  ( $= d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p$ ) を用いて式 (26) で表される。

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{EPE} d\epsilon_{kl} \dots \dots \dots (26)$$

弾塑性定数テンソル  $D_{ijkl}^{EPE}$  は次の通りである。

$$D_{ijkl}^{EPE} = D_{ijkl}^E - (D_{ijmn}^E g_{mn} n_{st} D_{stkl}^E) / (K_p + n_{mn} D_{mnst}^E g_{st}) \dots \dots \dots (27)$$

ここに、 $d\epsilon_{ij}^e$  は弾性ひずみテンソル、 $D_{ijkl}^E$  は弾性定数テンソルで、 $D_{ijkl}^E$  を構成するせん断弾性係数  $G$  および体積弾性係数  $K$  は、次式で与えられる。

$$G = G_I (p/p_I)^{1/2} \dots \dots \dots (28)$$

$$K = K_I (p/p_I)^{1/2} \dots \dots \dots (29)$$

ここに、 $G_I$ 、 $K_I$  は初期平均主応力  $p_I$  の時の  $G$  および  $K$  である。

(7) 本モデルのパラメーター

本モデルのパラメーターは、2つの弾性定数 ( $G_I$ 、 $K_I$ ) と  $\phi$ 、 $\phi_m$ 、 $r$ 、 $\chi$ 、 $R^E$  の7つである。 $\phi$  と  $\phi_m$  は三軸圧縮試験から決定され、前者は、式 (1) において正規降伏曲面  $F$  の半径  $A$  を、後者は式 (12) において  $d\epsilon_V^p = 0$  の時の応力比  $M$  を定義する。 $r$ 、 $\chi$ 、 $R^E$  の物理的な意味は本文中に述べたが、これらは液状化強度試験結果のフィッティングによって決定される。まず、 $R^E$  の効果が最も小さい最大応力比での実験結果に合うように  $r$  と  $\chi$  を決め、その後、 $R^E$  で強度曲線の勾配を調整する。

3. 非共軸性の程度を表すスカラー変数  $c$

式 (17) で定義されたスカラー  $c$  は、一般応力空間で非共軸性の程度を表す重要な変数である。以下では、中空ねじりせん断試験機を用いた等方および異方圧密からの非排水単純せん断試験結果に基づいてこの  $c$  を求め、繰返し載荷時の非共軸性について調べる。

(1)  $c$  の決定法

式 (17) で用いられる  $G_{ij}$  は次式で表され、塑性偏差ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}^p$  の方向を示す単位テンソルである。

$$G_{ij} = d\epsilon_{ij}^p / |d\epsilon_{ij}^p| \dots \dots \dots (30)$$

塑性偏差ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}^p$  は式 (31) から得られる。

$$d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij} - dS_{ij} / (2G) \dots \dots \dots (31)$$

ここに、 $d\epsilon_{ij}$  は全偏差ひずみ増分で、非排水単純せん断変形のひずみの境界条件は、 $d\epsilon_{11} = d\epsilon_{22} = d\epsilon_{33} = d\epsilon_V = 0$  である。 $G$  は、式 (28) で決定される。

表-1  $e, \sigma_a, \sigma_r, B$  値および  $G_I$

	Void Ratio	$\sigma_a$ (kPa)	$\sigma_r$ (kPa)	B Value	$G_I$ (kPa)
Anisotropic	0.792	-163.66	-65.66	0.98	70000
Isotropic	0.778	-98.00	-98.00	0.95	73500

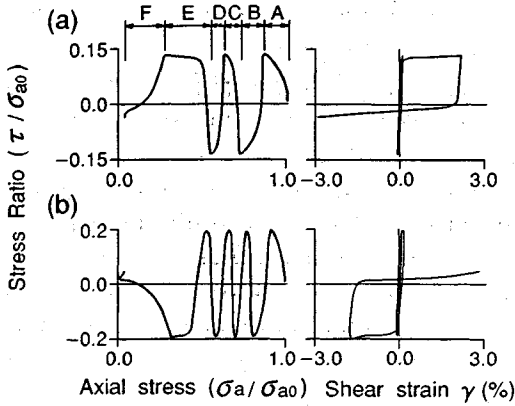


図-7 液状化強度試験結果

(2) 試験方法および試験結果

供試体は豊浦砂を用いて空中落下法で作成した (高さ 20 cm, 外径 10 cm, 内径 6 cm). 異方圧密の方法は、まず側方応力  $\sigma_r$  を等方的に載荷後、異方分の軸応力  $d\sigma_a$  を載荷して所定の  $\sigma_a$  とした。非排水単純せん断変形は、供試体の高さを一定に保ち、供試体中空部に満たした水の出入を止める方法<sup>16)</sup>を用いて表現した。

圧密打切り時の間隙比  $e, \sigma_a, \sigma_r, B$  値および式 (28) の  $G_I$  を表-1 に示す。  $G_I$  は微小ひずみ時 ( $2.5 \times 10^{-5}$ ) の実測値である。

異方圧密からのせん断応力振幅一定の液状化強度試験結果を図-7 (a) に、等方圧密からの結果を同図 (b) に示す。縦軸はせん断応力  $\tau$  を初期軸応力  $\sigma_{a0}$  で正規化した応力比で表示している。両結果から変数  $c$  を求めた。なお、同図 (a) では 1/4 サイクルごとに A~F の区間を指定している。

a) 異方圧密からのせん断試験における  $c$  の特性

A~F 区間の  $c$  の変化を図-8 (a) に実線で示す。対応する  $\tau$  を破線で併記しており、横軸は、応力増分の数である。矢印で示すように、 $\tau$  の符号にかかわらずピークせん断応力時の  $c$  は繰返し載荷に伴って次第に 1 に接近しており、非共軸から共軸へ近づいているのが分かる。ピークせん断応力付近の  $c$  の凸状の変化は除荷直後のもので、このときひずみ増分は極めて小さくこの現象は無視することができる。

また、応力反転が生じた瞬間  $c = -1$  が表れていること、 $\tau = 0$  付近で  $c = 0$  となっていることも分かる。

この様子を偏差応力空間で模式的にみると図-9 のようになる。同図では、 $\textcircled{a}$  点で応力反転が生じ、 $\textcircled{a} \rightarrow \textcircled{b} \rightarrow$

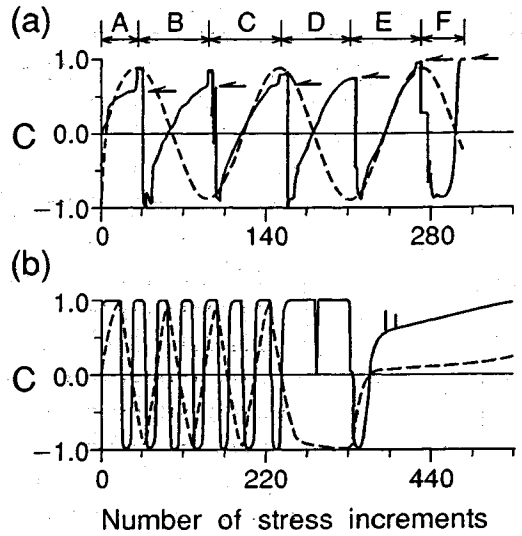


図-8 非共軸性の程度を表す変数  $c$

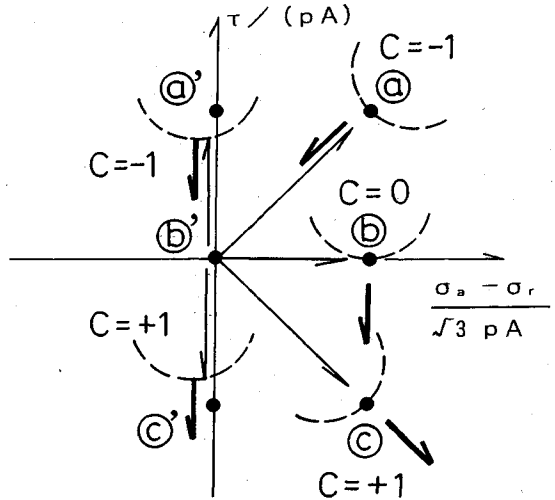


図-9 主応力の方向と塑性ひずみ増分の方向

$\textcircled{c}$  と応力点が移動した時、 $\textcircled{a}$ ,  $\textcircled{b}$ ,  $\textcircled{c}$  それぞれの点での主応力の方向を細い実線の矢印、塑性ひずみ増分の方向を太い実線の矢印で表すことができる。破線は、対応する塑性ポテンシャル曲面の断面である。応力反転直後の  $\textcircled{a}$  点では両方向はほぼ逆向き ( $c = -1$ ) で、塑性ひずみ増分は応力経路の方向 ( $\textcircled{a} \rightarrow \textcircled{b}$ ) ではなく、応力空間の原点 (応力反転曲面  $f_s^M$  の中心) に向っている。  $\tau = 0$  の三軸圧縮状態の  $\textcircled{b}$  点では両方向は直交 ( $c = 0$ ) し、ピークせん断応力時の  $\textcircled{c}$  点では両方向は次第に一致するようになり、 $c = 1$  に接近している。

b) 等方圧密からのせん断試験における  $c$  の特性

a) と同様に変数  $c$  を実線で、対応する  $\tau$  を破線で図-8 (b) に示す。 a) との違いは、図-4 に関連して述べたように応力反転の瞬間に  $c = -1$  になるが、そのま

表-2 解析ケース

	$\chi_1$	$\chi_2$
Case 1	1.0	10.0
Case 2	1.0	5.0
Case 3	1.0	0.0
Case 4	0.0	0.0

表-3 パラメーター

(a) Anisotropic			
$G_1 = 70000$ kPa	$\phi = 31^\circ$		
$K_1 = 187000$ kPa	$\phi_m = 30^\circ$		
$R^E = 0.0$	$r = 10$		
(b) Isotropic			
$G_1 = 74000$ kPa	$\phi = 31^\circ$		
$K_1 = 196000$ kPa	$\phi_m = 30^\circ$		
$R^E = 0.0$	$r = 7$		
$x = 10.0$			

ま  $c = -1$  を保ち、 $\tau$  の符号が変わると  $c = 1$  になることで、 $c = 1$  と  $c = -1$  が交互に表れている。

この様子を同様に偏差応力空間でみたのが図-9の①', ②', ③' である。応力反転直後の①' から②' までは両方向は逆向きで  $c = -1$ ,  $\tau$  の符号が変わる②' からピークせん断時の③' までは両方向は一致し  $c = 1$  が表れている。

これらの結果は、繰返し載荷時の塑性ポテンシャル曲面の偏差応力空間での断面は原点の中心とする凸な曲面では表せないこと、負荷曲面を塑性ポテンシャル曲面とする関連流れ則 ( $G_{ij} = Q_{ij}^H$ ) が適用できないこと、さらに、応力増分  $d\sigma_{ij}$  と正規降伏曲面  $F$  の交点 (共役点) での法線方向成分も実験結果に比べ弱い非共軸性しか与えることができないことを示している。前述の式 (6) ~ (10) はこれらの結果に基づいて導入されたものであり、材料定数を適切に選べば、これらの式は実験結果の特性をうまく表すものとする。

#### 4. 解析結果

3. に示した異方および等方圧密からの液状化強度試験の解析を行い、式 (6) ~ (10) で定義した偏差応力空間での流れ則が実験で得られた非共軸性をどの程度表現できるかについて検討する。

解析はひずみ制御方式で行う。せん断ひずみ増分  $d\gamma$  ( $= 1 \times 10^{-3}$ ) を順次与え、式 (26) で得られるせん断応力  $\tau$  の絶対値が所定の値に達したら  $d\gamma$  の符号を変えて繰返し載荷を再現する。

##### (1) 異方圧密からの液状化強度試験の解析

ここでは、式 (7) を便宜的に次式のように変更して表-2の4ケースの解析を行っており、ケース1からケース4の順に非共軸性が弱くなるよう設定されている。

$$Q_{ij} = \chi_1(1-d)Q_{ij}^H + d(Q_{ij}^H + \chi_2(1-R_S^M)Q_{ij}^H) \quad (32)$$

$\chi_1 = 1.0$  のケース1~3は式(7)のモデルと一致し、ケース数が増えるほど応力履歴の影響を表す  $Q_{ij}^H$  の効果を低下させている。ケース4は、 $Q_{ij}^H$  と  $Q_{ij}^M$  を取り去ったもので、 $G_{ij} = Q_{ij}^H$  である。その他のパラメーターは共通で、表-3(a)に示す。

ケース1~4の解析結果(応力経路, 応力-ひずみ関係)

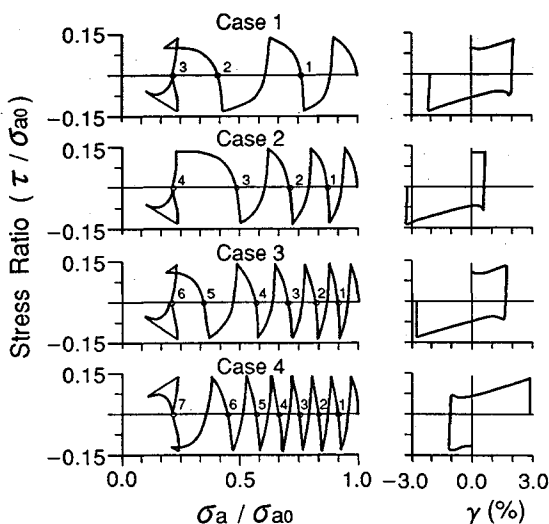


図-10 応力経路, 応力-ひずみ関係

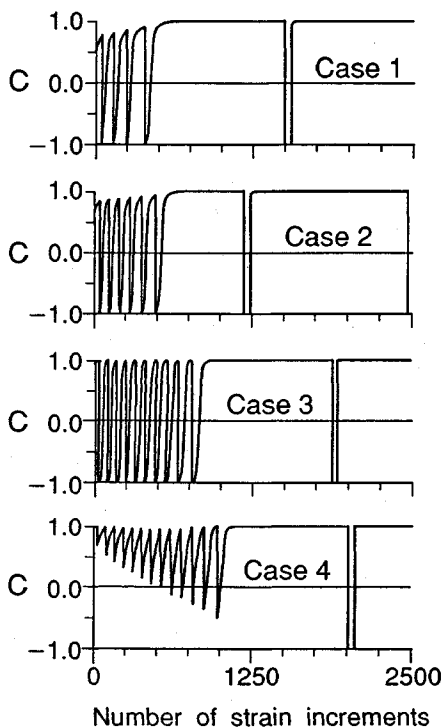


図-11 cの変化

を図-10に示す。表示法は図-7と同じで、図中の数字は繰返し回数である。応力履歴の影響を表す  $Q_{ij}^H$  による非共軸性を最大に評価したケース1 ( $\chi_2 = 10.0$ ) は、図-7(a)の実験結果とよい対応関係があることが認められ、2.5サイクル目にひずみが急増し、2%程度の大ひずみに至る過程をうまく表しているといえる。一方、 $\chi_2$  を小さくして  $Q_{ij}^H$  による非共軸性を少なくするほど軸応力  $\sigma_a$  の低下が抑えられ、液状化強度が増加するこ



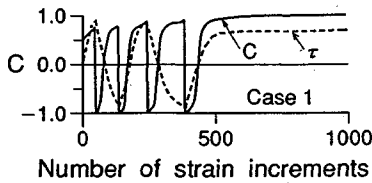


図-12 ケース1のcの変化の拡大図

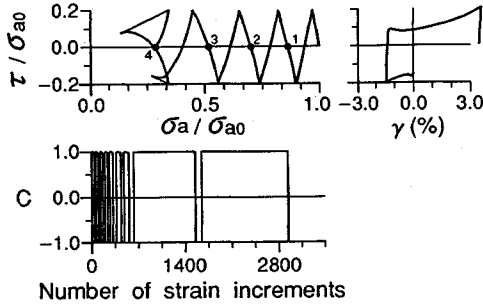


図-13 等方圧密からの解析結果

と、さらに、ケース3とケース4を比べると、応力反転の影響を表す  $Q_{ij}^k$  による非共軸性を取り去るだけでも液化強度が増加することなどが分かる。

ケース1~4の変数  $c$  の変化を図-11に示す。また、ケース1の1000ステップまでの  $c$  の変化を図-12に拡大して示す。ここに、横軸のステップとは  $dy$  を与えた回数で、図-12では対応する  $\tau$  を破線で併記している。

図-11, 12において、ケース1のピークせん断応力時の  $c$  は0.75から1に近づいており、非共軸から共軸に至る図-8(a)の様子をうまく表している。また、応力反転の瞬間  $c=-1$  が現れ、 $\tau=0$  付近で  $c=0$  となる傾向も表現されている。一方、図-11のケース2のピークせん断応力時の  $c$  は0.85~1でケース1に比べ非共軸の程度が若干低い。ケース3のピークせん断応力時の  $c$  は、つねに1(共軸)である。これらの結果は、異方応力状態の土の繰返し載荷の非線形挙動を表現する場合、ピーク応力時に非共軸から共軸に至る過程をいかにモデル化するかが重要であることを示していると考えられる。

ケース4はケース1~3と大きく異なっており、応力反転時に  $c=-1$  が表現されていない。この応力反転時の  $c=-1$  は、弾性としての挙動が卓越する領域であるが、図-10のケース3とケース4の違いをみると、この領域での非共軸性も土の非線形挙動に影響していることが分かる。これは、図-4に関して前述したように、 $c$  の符号の反転によってストレス-ダイレイタンス関係に応力反転の効果が評価されるためである。

(2) 等方圧密からの液化強度試験の解析

応力経路、応力-ひずみ関係および変数  $c$  の変化を図-13に示す。用いたパラメーターは表-3(b)に示し

ている。ただし、等方圧密からの解析では  $Q_{ij}^k = Q_{ij}^k = Q_{ij}^k$  であるため、 $\chi$  の値は意味をもたない。

図-13と、図-7(b)および図-8(b)の実験結果との対応はよいように思われ、4サイクル目にひずみが急増し、大ひずみに至る過程がうまく表れている。また、応力反転に伴って  $c=1$  と  $c=-1$  が交互に現れる様子がうまく表現されている。

5. 結 論

以上、非共軸性の評価を取り入れた砂の繰返し弾塑性構成モデルを提案し、その適用例として実験結果に基づく非共軸性をどの程度表現できるかを示した。得られた主要な結論は、次の通りである。

① 正規降伏曲面、負荷曲面、応力反転曲面等、すべての曲面が交差しない条件下で、松岡・中井の破壊基準によって表現される異方性を組み込んだモデルが提案された。

② 偏差応力空間での流れ則に応力反転の影響を表すテンソル、応力履歴の影響を表すテンソルが導入され、この流れ則に基づいて非共軸性の程度を示すスカラー  $c$  が定義された。この  $c$  をストレス-ダイレイタンス関係に導入することで、応力反転の効果を評価することができた。

③ 実験結果に基づく  $c$  と解析で得られた  $c$  の比較から、本モデルは増分線形モデルの範囲で繰返し載荷時の非共軸性をうまく表現できることが分かった。

④ 新たな応力反転曲面  $f_s^k$  を用いることで、無数曲面モデルの問題点とされている応力振幅が低下する繰返し載荷をうまく表現することができた。

付録-1

負荷曲面  $f$  の外向きテンソルは、式(22)で単位テンソルに変換されるため、その大きさは意味を持たない。このため、式(3)は次のように書くことができる。

$$f = (\eta_{ij} - A\alpha_{ij})(\eta_{ij} - A\alpha_{ij}) - a^2 = 0 \dots \dots \dots (A-1)$$

上式から、 $\partial f / \partial \sigma_{ij}$  は次式で表される。

$$\begin{aligned} \partial f / \partial \sigma_{ij} = & 2(\eta_{ij} - A\alpha_{ij}) / p \\ & - \{2 / (3p)\} (\eta_{kl} - A\alpha_{kl}) \eta_{kl} \delta_{ij} \\ & - 2(\eta_{kl} - A\alpha_{kl}) \alpha_{kl} \partial A / \partial \sigma_{ij} \\ & - 2a \partial a / \partial \sigma_{ij} \dots \dots \dots (A-2) \end{aligned}$$

ここに、 $\partial A / \partial \sigma_{ij} = \sqrt{2/3} \partial G(\theta) / \partial \sigma_{ij}$ ,

$$\partial G(\theta) / \partial \sigma_{ij} = \{ \partial G(\theta) / \partial \theta \} \{ \partial \theta / \partial \sigma_{ij} \},$$

$$\partial G(\theta) / \partial \theta = sG(\theta)^4 / [1 + (v/3)G(\theta)^2] \tan(3\theta),$$

$$\partial \theta / \partial \sigma_{ij} = \{ \partial \sin(3\theta) / \partial \sigma_{ij} \} / \{ 3 \cos(3\theta) \},$$

$$\partial \sin(3\theta) / \partial \sigma_{ij} = B_1 \partial J_2 / \partial \sigma_{ij} + B_2 \partial J_3 / \partial \sigma_{ij},$$

$$\partial J_2 / \partial \sigma_{ij} = S_{ij}, \quad \partial J_3 / \partial \sigma_{ij} = S_{ik} S_{kj} - (2J_2/3) \delta_{ij},$$

$$B_1 = (9\sqrt{3}/4)J_3/J_2^{5/2}, \quad B_2 = -(3\sqrt{3}/2)/J_2^{3/2},$$

$$\partial a/\partial \sigma_{ij} = \sqrt{2/3} \partial G(\bar{\theta})/\partial \sigma_{ij},$$

$$\partial G(\bar{\theta})/\partial \sigma_{ij} = \{\partial G(\bar{\theta})/\partial \bar{\theta}\} \{\partial \bar{\theta}/\partial \sigma_{ij}\},$$

$$\partial G(\bar{\theta})/\partial \bar{\theta} = sG(\bar{\theta})^4/[1 + (v/3)G(\bar{\theta})^2 \tan(3\bar{\theta})],$$

$$\partial \bar{\theta}/\partial \sigma_{ij} = \{\partial \sin(3\bar{\theta})/\partial \sigma_{ij}\}/\{3 \cos(3\bar{\theta})\},$$

$$\partial \sin(3\bar{\theta})/\partial \sigma_{ij} = \bar{B}_1 \partial \bar{J}_2/\partial \sigma_{ij} + \bar{B}_2 \partial \bar{J}_3/\partial \sigma_{ij},$$

$$\partial \bar{J}_2/\partial \sigma_{ij} = \bar{S}_{ij} - (A/3) \bar{S}_{kl} \alpha_{kl} \delta_{ij} - p \bar{S}_{kl} \alpha_{kl} \partial A/\partial \sigma_{ij},$$

$$\partial \bar{J}_3/\partial \sigma_{ij} = \bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj} - \{(2\bar{J}_2 - D/3)/3\} \delta_{ij}$$

$$- p \alpha_{lm} \bar{S}_{mn} \bar{S}_{nl} \partial A/\partial \sigma_{ij},$$

$$D = -A(\alpha_{kl} S_{lm} S_{mk} + S_{kl} \alpha_{lm} S_{mk} + S_{kl} S_{lm} \alpha_{mk}) + 2pA^2(\alpha_{kl} \alpha_{lm} S_{mk} + \alpha_{kl} S_{lm} \alpha_{mk} + S_{kl} \alpha_{lm} \alpha_{mk}) - 3p^2 A^3(\alpha_{kl} \alpha_{lm} \alpha_{mk}),$$

$$\bar{B}_1 = (9\sqrt{3}/4) \bar{J}_3/\bar{J}_2^{5/2}, \quad \bar{B}_2 = -(3\sqrt{3}/2)/\bar{J}_2^{3/2}$$

である。

付録—2

$$R = (-A_2 - (A_2^2 - A_1 \cdot A_3)^{1/2})/A_1 \dots \dots \dots (A-3)$$

ここに,  $A_1 = A_{ij} A_{ij} - 1$ ,  $A_2 = A_{ij} B_{ij}$ ,  $A_3 = B_{ij} B_{ij}$ ,

$$A_{ij} = (\alpha_{ij}^I - \alpha_{ij}^N)/(R_S^N - R^I),$$

$$B_{ij} = R_{ij} - (\alpha_{ij}^I R_S^N + \alpha_{ij}^N R^I)/(R_S^N - R^I)$$

である。

付録—3

$$R^K = (1-t)|R^N|, \quad \alpha_{ij}^K = tR_{ij}^N$$

両式の  $t$  は,  $R^K$ ,  $\alpha_{ij}^K$  を  $R$ ,  $\alpha_{ij}$  として式 (3) に代入して得られる方程式の解である。

参 考 文 献

- 1) 橋口公一：最新弾塑性学，朝倉書店，1990。
- 2) Mroz, Z. : On the description of anisotropic workhardening, J. Mech. Phys. Solids, 15, pp.163~175, 1967.
- 3) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P. : Plastic internal variables

formalism of cyclic plasticity, J. Appl. Mech. (ASME), 43, pp.645~651, 1976.

- 4) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P. : Cyclic loading for materials with a vanishing elastic domain, Nucl. Eng. Design, 41, pp.293~302, 1977.
- 5) Mroz, Z., Norris, V.A. and Zienkiewicz, O.C. : Application of anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils, Geotechnique, Vol.29, pp.1~34, 1979.
- 6) Mroz, Z., Norris, V.A. and Zienkiewicz, O.C. : An anisotropic critical state model for soils subject to cyclic loading, Geotechnique, Vol.31, pp.451~469, 1981.
- 7) 地盤と土構造物の地震時の挙動に関するシンポジウム発表論文集，土質工学会，pp.50~136, 1989.
- 8) 地盤の液状化対策に関するシンポジウム発表論文集，土質工学会，pp.77~190, 1991.
- 9) 森尾 敏・日下部伸・兵動正幸：多曲面モデルによる液状化解析，第35回土質工学シンポジウム発表論文集，pp.9~16, 1990.
- 10) 森尾 敏・日下部伸・安福規之・兵動正幸：非共軸繰返し弾塑性構成モデルの提案，第27回土質工学研究発表会，pp.819~822, 1992.
- 11) Matsuoka, H. and Nakai, T. : Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, Proc. of JSCE, No.232, pp.59~70, 1974.
- 12) 西川明宏・安福規之・中田幸男・兵動正幸・村田秀一：砂の拘束圧依存性と中間主応力の影響を考慮した構成式について，第28回土質工学研究発表会，pp.495~498, 1993.
- 13) Marte Gutierrez : Behaviour of sand during rotation of principal stress directions, Doctor Eng. Thesis, Univ. of Tokyo, 1989.
- 14) Pradhan, T.B.S. and Tatsuoaka, F. : Experimental stress-dilatancy relations of sand subjected to cyclic loading, Soils and Foundations, Vol.29, No.1, pp.45~64, 1989.
- 15) Pender, M.J. : A model of the behaviour of overconsolidated soil. Geotechnique, Vol.28, No.1, pp.1~25, 1978.
- 16) ブラタン・テージ・B.S., 佐藤靖彦・龍岡文夫：地震波荷重に対する砂の非排水応力~ひずみ関係，第19回地震工学研究発表会，pp.213~216, 1987.

(1993.5.14 受付)

A CYCLIC ELASTO-PLASTIC CONSTITUTIVE MODEL FOR SAND CONSIDERING THE EFFECT OF NON-COAXIALITY

Satoshi MORIO, Shin KUSAKABE, Noriyuki YASUFUKU and Masayuki HYODO

This study presents theoretical and experimental investigations into the strength-deformation characteristics of sand under cyclic loading. A constitutive relation for expressing the inelastic behaviour of sandy soil is proposed based on experimental data. The theoretical aspects are based on a plasticity theory framework. The effect of non-coaxiality was progressively incorporated in the model and was found to be very effective, particularly for modeling the behaviour of sand during unloading or reverse loading. A comparison between predicted and actual results for undrained cyclic shear tests shows that the dynamic strength-deformation characteristics of sands can be satisfactorily simulated