

# 波状透水層上の波動方程式とBragg散乱解析

間瀬 肇\*・竹葉 憲\*\*・酒井哲郎\*\*\*・  
喜岡 渉\*\*\*\*

透水層の層厚が表面重力波の波長と同オーダーで空間的に変化する海底地形と波との相互干渉を考慮できる波動方程式を導く。この方程式は従来の緩勾配方程式、および波状海底地形上の波動方程式を特別な場合として含む。ここで得られた方程式を用いてBragg散乱に及ぼす海底の透水性の影響を解析し、透過波および反射波の両者が、透水層内のエネルギー散逸により、不透過海底の場合に比べて減少することを示す。

**Key Words :** Bragg scattering, porous rippled bed, extended mild slope equation, bottom-wave interaction

## 1. はじめに

多段沿岸砂洲の形成メカニズムの一因、あるいは、多段砂洲と波との相互干渉の問題としてBragg散乱が近年注目されている<sup>1),2)</sup>。また、Bragg共鳴反射を応用した高波制御法および海岸侵食制御法が研究されている<sup>3)</sup>。

Davies and Heathershaw<sup>1)</sup>およびMei<sup>2)</sup>は、正弦的に変化する海底地形による波の散乱問題を取り上げ、海底起伏の波長が表面波のその半分となる場合に生じるBragg共鳴反射を理論的および実験的に調べた。彼らの理論は、任意の断面2次元海底地形の場合や平面2次元の場合の解析には適用できない。Kirby<sup>4)</sup>は、そのような場合に対しても適用可能な理論式を誘導した。その式は、Berkhoff<sup>5)</sup>による緩勾配方程式を拡張したものになっており、海底起伏と波との共鳴条件および非共鳴条件の波浪変形に対して解析が可能である。しかし、透水性を考慮しなければならない自然の海底地盤、あるいは潜堤や人工海藻などを設置した場合のような、海底が透水性を有する場合には適用できない。

水質保全、水産資源環境、景観の点から近年人工リーフ、あるいは、大規模潜堤を用いた面的波浪制御工法への注目が高まっており、これに関連して泉宮・遠藤<sup>6)</sup>やRojanakamthorn<sup>7)</sup>は透水性構造物による波浪変形理論を導いた。これらの理論は緩勾配の仮定を用いており、水深変化が急な海底地形に対しては理論の適用範囲外であり、Bragg散乱の解析には不都合である<sup>4)</sup>。捨石、消波ブロック、人工魚礁群等を適切に配置してBragg共

鳴反射が生じるように海底起伏を形成できれば、透水層内におけるエネルギー散逸、構造物上の砕波によるエネルギー散逸に加えて、Bragg共鳴反射により透過波および反射波の両者を低減できる可能性がある。

先にBragg共鳴反射を利用した波浪制御について触れたが、この場合岸側海域における透過波を減じ得たとしても、沖側海域では反射波により波高が増大し、不都合が生じることになる。透水性構造物を利用してBragg共鳴反射を生じさせ、透過波および反射波の両者とも低減できれば好都合である。こうした問題を取り扱うための基礎として、本研究は波状透水層上の波動方程式を導き、この方程式を用いてBragg散乱に及ぼす海底地盤の透水性の影響を解析するものである。

## 2. 波状透水層上の波動方程式

図-1に示すように、不透過海底地盤上に波長のオーダーで層厚が変化する透水層が存在する場での表面重力波を考える。 $h'(\vec{x})$ は全水深、 $h(\vec{x})$ は平均水深、 $h_s'(\vec{x})$ は全透水層厚、 $h_s(\vec{x})$ は平均透水層厚、 $\delta(\vec{x})$ は平均水深からの変動量、 $\vec{x}$ は水平座標( $x, y$ )を表すベクトルである。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} h'(\vec{x}) &= h(\vec{x}) - \delta(\vec{x}) \\ h_s'(\vec{x}) &= h_s(\vec{x}) + \delta(\vec{x}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

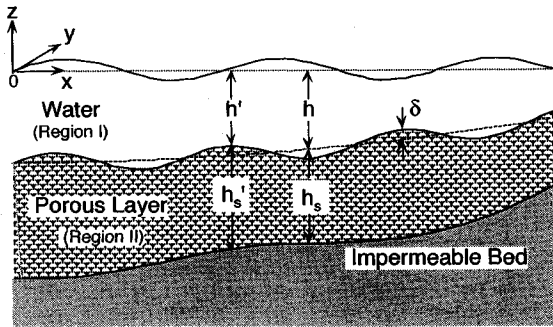
であり、 $h(\vec{x})$ および $h_s(\vec{x})$ について、以下のように緩勾配を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} O\left(\frac{\nabla_h h}{kh}\right) &\approx O(k\delta) \ll 1 \\ O\left(\frac{\nabla_h(h+h_s)}{kh}\right) &\approx O(k\delta) \ll 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は水平勾配ベクトルである。 $\delta(\vec{x})$ の空間変動スケールに関しては

$$O\left(\frac{\nabla_h \delta}{k\delta}\right) \approx O(1) \dots\dots\dots (3)$$

\* 正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学科 (〒606 京都市左京区吉田本町)  
\*\* 学生会員 京都大学大学院工学研究科  
\*\*\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科  
\*\*\*\* 正会員 Ph.D 名古屋工業大学助教授 社会開発工学科



図一 座標系および各諸量の定義

のように波長のオーダーとし、緩勾配からの急変動を考慮する。

流体層を領域 (I)、多孔質剛体の透水層を領域 (II) と区別して、領域 (I) および (II) のそれぞれにおける基礎式および境界条件式、また領域 (I) と (II) の境界面における連続条件をもとに解を求める。ただし、ここでは線形の場合を対象とする。

流体は非粘性、非圧縮とし、非回転運動を考えると、領域 (I) では以下の式が成り立つ。

$$\nabla_h^2 \phi + \phi_{zz} = 0; -h \leq z \leq 0 \quad (4)$$

$$\phi_{tt} + g\phi_z = 0; z = 0 \quad (5)$$

$$\phi_z = -\nabla_h \cdot \nabla_h \phi + \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \phi) + w^{(I)}; z = -h \quad (6)$$

ここで、 $\phi$  は速度ポテンシャル、 $t$  は時間、 $g$  は重力加速度、 $w^{(I)}$  は境界面での鉛直流量流速である。上式は、 $z = -h$  でテイラー展開した  $O(k\delta)$  までのものであり、式 (4) はラプラスの式、式 (5) は表面における運動学的境界条件と力学的境界条件から水位を消去した式、式 (6) は底面境界条件である。流体密度を  $\rho$  とし流体場の圧力は次式で表される。

$$p^{(I)} = -\rho(\phi_t + gz); -h \leq z \leq 0 \quad (7)$$

領域 (II) における連続式および運動方程式は次のようである<sup>81,9)</sup>。

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\tau}{n} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla (p^{(II)} + \rho gz) - (\alpha + \beta) \vec{u} \quad (9)$$

ここに、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ 、 $\vec{u} = (u, v, w)$  は流量流速、 $n$  は間隙率、 $\tau$  は慣性係数であり、次のように表される。

$$\tau = 1 + \kappa(1-n) = n + C_M(1-n) \quad (10)$$

$\kappa$  は付加質量係数、 $C_M$  は質量係数である。式 (9) の右辺の抵抗は Dupuit-Forchheimer 型の抵抗則といわれるもので、係数  $\alpha$  および  $\beta$  は粒径や間隙率、あるいは透水係数や乱流抵抗係数を用いて表現される<sup>81,9)</sup>。式 (9) を線形化するために線形抵抗係数  $f$  を用いて抵抗を次のように表す。

$$(\alpha + \beta) \vec{u} = f \frac{\omega}{n} \vec{u} \quad (11)$$

ここで、 $\omega$  は角周波数である。ここでは単に線形化した形を示したが、 $f$  の値はローレンツの等価仕事の原理に基づき繰返し計算によって同定できる。この場合  $f$  は等価線形抵抗係数と呼ばれる。出口ら<sup>10)</sup>は、非定常透水試験により  $f$  を KC 数の関数として次のように表した。

$$f/n = 0.1 + 1.8 \left( \frac{\vec{u}}{\omega d} \right) \quad (12)$$

$\vec{u}$  は断面平均流速振幅、 $d$  は粒径である。

領域 (II) において渦なし流れを仮定し、速度ポテンシャル  $\phi$  を導入すると、式 (8) および式 (9) は次のように書ける<sup>81)</sup>。

$$\nabla_h^2 \phi + \phi_{zz} = 0; -(h+h_s) \leq z \leq -h \quad (13)$$

$$p^{(II)} = -\rho \left( \frac{\tau}{n} \phi_t + gz + f \frac{\omega}{n} \phi \right); -(h+h_s) \leq z \leq -h \quad (14)$$

透水層上面および下面における境界条件は次のとおりである。

$$\phi_z = -\nabla_h \cdot \nabla_h \phi + \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \phi) + w^{(II)}; z = -h \quad (15)$$

$$\phi_z = -\nabla_h (h+h_s) \cdot \nabla_h \phi; z = -(h+h_s) \quad (16)$$

領域 (I) と (II) の境界面における連続条件としては、圧力および鉛直流量流速が等しいという

$$p^{(I)} = p^{(II)}; z = -h \quad (17)$$

$$w^{(I)} = w^{(II)}; z = -h \quad (18)$$

を用いる。式 (17) および (18) は、それぞれ式 (7) と (14)、および式 (6) と (15) を用いて以下のように書ける。

$$\phi_t = \frac{\tau}{n} \phi_t + f \frac{\omega}{n} \phi; z = -h \quad (19)$$

$$\phi_z + \nabla_h \cdot \nabla_h \phi - \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \phi) = \phi_z + \nabla_h \cdot \nabla_h \phi - \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \phi); z = -h \quad (20)$$

$\delta \rightarrow 0$  に対する解は

$$\phi(\vec{x}, z, t) = f^{(I)}(\vec{x}, z) \tilde{\phi}(\vec{x}, t) + \sum \text{non-propagating modes} \quad (21)$$

$$\phi(\vec{x}, z, t) = f^{(II)}(\vec{x}, z) \tilde{\phi}(\vec{x}, t) + \sum \text{non-propagating modes} \quad (22)$$

である。ここで、 $f^{(I)}$  および  $f^{(II)}$  は、局所的に一定の水

注) 透水性が大きい場合、実際の透水層内の流れは乱れ・渦の発生による回転流速成分が生じ、速度ポテンシャルの存在が仮定できなくなる。厳密な理論的取り扱いとしては、流速を非回転成分と回転成分の和として表し、それぞれについて境界値問題の解を求める必要がある\*。しかし、ここでは理論的取り扱いを簡便にするため非回転運動を仮定した。

\* Liu, P. L.-F. and Dalrymple, R.A.: The damping of gravity water-waves due to percolation, Coastal Eng., Vol. 8, No. 1, pp. 33-49, 1984.

深に対する鉛直分布関数である。不透底面の場合には、良く知られているように、次式である。

$$f' = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \dots\dots\dots (23)$$

透水層が存在する場合には、式(4)~(7)、式(13)~(16)、式(19)~(20)において、 $\nabla_h h = \nabla_h h_s = \nabla_h \delta = 0$ として $f^{(I)}$ および $f^{(II)}$ を求める。結果は次のとおりである(誘導過程については、例えば、文献6, 11)を参照)。

$$f^{(I)} = \frac{1}{D} \{ \cosh kh_s \cosh k(h+z) + \gamma \sinh kh_s \sinh k(h+z) \} \dots\dots\dots (24)$$

$$f^{(II)} = \frac{1}{D} \gamma \cosh k(h+h_s+z) \dots\dots\dots (25)$$

$$D = \cosh kh_s \cosh kh (1 + \gamma \tanh kh_s \tanh kh) \dots\dots\dots (26)$$

$$\gamma = n / (\tau + if) \dots\dots\dots (27)$$

分散関係は次式で与えられる。

$$\omega^2 = gk \frac{\tanh kh + \gamma \tanh kh_s}{1 + \gamma \tanh kh \tanh kh_s} \dots\dots\dots (28)$$

いま、 $\phi = \tilde{\phi} f^{(I)}$ 、 $\varphi = \tilde{\varphi} f^{(II)}$ とおくと、圧力の連続条件より

$$\tilde{\phi} = \tilde{\varphi} \dots\dots\dots (29)$$

であることがわかる。

さて、スカラー関数 $\phi$ と $f^{(I)}$ に対するグリーンの第2定理は

$$\int_{-h}^0 f^{(I)} \phi_{zz} dz - \int_{-h}^0 \tilde{\phi} f_{zz}^{(I)} dz = [f^{(I)} \phi_z - \tilde{\phi} f_z^{(I)}]_{-h} \dots\dots\dots (30)$$

のように表される。式(30)の各項を計算し(付録1参照)、海底勾配の高次のオーダーの項を省略すると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} & -\nabla_h \cdot \int_{-h}^0 \nabla_h \tilde{\phi} f^{(I)2} dz - \int_{-h}^0 k^2 \tilde{\phi} f^{(I)2} dz \\ & = -\frac{1}{g} (\tilde{\phi}_{tt} f^{(I)2}) \Big|_0 - \frac{\omega^2}{g} (\tilde{\phi} f^{(I)2}) \Big|_0 \\ & \quad - \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \tilde{\phi}) f^{(I)2} \Big|_{-h} - \omega^{(I)} f^{(I)} \Big|_{-h} \\ & \quad + \tilde{\phi} f_z^{(I)} \Big|_{-h} + \text{high order terms} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

同様に、 $\varphi$ と $f^{(II)}$ に対するグリーンの第2定理は

$$\int_{-(h+h_s)}^{-h} f^{(II)} \varphi_{zz} dz - \int_{-(h+h_s)}^{-h} \tilde{\varphi} f_{zz}^{(II)} dz = [f^{(II)} \varphi_z - \tilde{\varphi} f_z^{(II)}]_{-(h+h_s)} \dots\dots\dots (32)$$

である。上式の各項を付録1と同様の手順で計算すると、式(32)は以下ようになる。

$$\begin{aligned} & -\nabla_h \cdot \int_{-(h+h_s)}^{-h} \nabla_h \tilde{\varphi} f^{(II)2} dz - \int_{-(h+h_s)}^{-h} k^2 \tilde{\varphi} f^{(II)2} dz \\ & = \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \tilde{\varphi}) f^{(II)2} \Big|_{-h} + \omega^{(II)} f^{(II)} \Big|_{-h} \end{aligned}$$

$$- \tilde{\phi} f_z^{(I)} \Big|_{-h} + \text{high order terms} \dots\dots\dots (33)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 f^{(I)2} dz & = \frac{1}{4kD^2} \left\{ \cosh^2 kh_s \sinh 2kh \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right. \\ & \quad + \gamma \sinh 2kh_s (\cosh 2kh - 1) \\ & \quad \left. + \gamma^2 \sinh^2 kh_s \sinh 2kh \right. \\ & \quad \left. \times \left( 1 - \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right\} \equiv p \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-(h+h_s)}^{-h} f^{(II)2} dz & = \frac{1}{4kD^2} \left\{ \gamma^2 \sinh 2kh_s \right. \\ & \quad \left. \times \left( 1 + \frac{2kh_s}{\sinh 2kh_s} \right) \right\} \equiv q \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

$$\alpha = p + \frac{q}{\gamma} \dots\dots\dots (36)$$

とおき、また式(31)および(33)に含まれる $f^{(I)}$ や $f^{(II)}$ に関する項(付録2参照)を代入した後、式(31)+式(33)/ $\gamma$ として鉛直流量流速の項を消去し次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g} (\tilde{\phi}_{tt} + \omega^2 \tilde{\phi}) - \nabla_h \cdot (\alpha \nabla_h \tilde{\phi}) - k^2 \alpha \tilde{\phi} \\ & \quad + \frac{\cosh^2 kh_s}{D^2} (1 - \gamma) \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \tilde{\phi}) = 0 \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

式(37)において、 $\tilde{\phi}$ の時間項を分離して

$$\tilde{\phi} = \hat{\phi} e^{-i\omega t} \dots\dots\dots (38)$$

とおくと、式(37)は

$$\begin{aligned} & \nabla_h \cdot (\alpha \nabla_h \hat{\phi}) + \alpha k^2 \hat{\phi} - \frac{\cosh^2 kh_s}{D^2} (1 - \gamma) \nabla_h \\ & \quad \cdot (\delta \nabla_h \hat{\phi}) = 0 \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

となる。式(39)が波状透水層上の波動方程式である。

### 3. 従来の理論との関連

#### (1) $h_s = 0$ & $\delta \equiv 0$

透水層がなく、しかも波長スケールの海底起伏がない場合は、式(28)より分散関係は

$$\omega^2 = gk \tanh kh \dots\dots\dots (40)$$

となる。また式(26)、(34)、(35)より

$$D = \cosh kh \dots\dots\dots (41)$$

$$p = \frac{\omega^2}{2gk^2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) = \frac{1}{g} CC_o \dots\dots\dots (42)$$

$$q = 0 \dots\dots\dots (43)$$

であり、

$$\alpha = \frac{1}{g} CC_o \dots\dots\dots (44)$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} C & = \frac{\omega}{k} \\ C_o & = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

である。これらを式 (39) に代入すると、以下に示す、Berkhoff<sup>5)</sup>の緩勾配方程式となる。

$$\nabla_h \cdot (CC_0 \nabla_h \hat{\phi}) + k^2 CC_0 \hat{\phi} = 0 \quad \dots\dots\dots (46)$$

(2)  $h_s = 0$  &  $\delta \neq 0$

透水層はないが波長スケールの海底起伏がある場合、分散関係は式 (40) で表され、 $D$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $\alpha$  は式 (41) ~ (44) となり、式 (39) は以下に示す Kirby<sup>1)</sup>の式になる。

$$\nabla_h \cdot (CC_0 \nabla_h \hat{\phi}) + k^2 CC_0 \hat{\phi} - \frac{g}{\cosh^2 kh} \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \hat{\phi}) = 0 \quad \dots\dots\dots (47)$$

(3) 透水性が極めて小さい場合

透水層構成材料の間隙率が小さくなるほど、また粒径が小さくなるほど、透水性は小さくなる。通常の土では間隙率は 0 に近づくことはなく、透水性が極めて小さいということは粒径が非常に小さいことを意味する。しかし、2. で導いた理論には陽なパラメータとして粒径が入っていない。ここでは実際の透水層構成材料を対象とするのではなく、数学的極限を対象とし、透水性が極めて小さいということを、間隙率が小さく ( $n \rightarrow 0$ )、抵抗係数が大きい ( $f \rightarrow \infty$ ) とし、式 (27) で表される透水層の特性を表すパラメータ  $\gamma$  を 0 とする。その結果、分散関係は式 (40) となり、また  $D$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $\alpha$  は式 (41) ~ (44) となり、結局透水層が存在しない (2) の場合と同じである。

(4) 透水性が極めて大きい場合

式 (27) において  $n \rightarrow 1$ ,  $f \rightarrow 0$  となるので  $\gamma \rightarrow 1$  となる。分散関係は

$$\omega^2 = gk \tanh k(h+h_s) \quad \dots\dots\dots (48)$$

となり、また

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2gk^2} \left\{ 1 + \frac{2k(h+h_s)}{\sinh 2k(h+h_s)} \right\} = \frac{1}{g} CC_0 \quad \dots\dots\dots (49)$$

となる。これらを式 (39) に代入すると Berkhoff<sup>5)</sup>の式となるが、この場合の水深は  $h+h_s$  である。

#### 4. 波状透水層上の Bragg 散乱解析

(1) 境界条件

式 (39) において  $\hat{\phi}$  を複素振幅  $A$  で置き換える。沖側境界、すなわち、入射境界では水位変動は入射波と反射波の和で表され、入射波を  $A_I$ 、反射波を  $A_R$  とすると

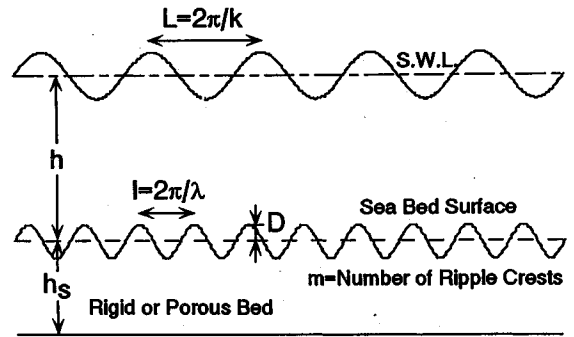
$$A = A_I + A_R = a_I e^{ikx} + a_R e^{-ikx} \quad \dots\dots\dots (50)$$

であり、これより反射波を消去することにより

$$A_R = -ik(A - 2A_I) \quad \dots\dots\dots (51)$$

が得られる。ここで、下付き添え字の  $x$  は微分を意味する。岸側境界では反射波は省略でき、境界条件は次式で表される。

$$A_R = ikA \quad \dots\dots\dots (52)$$



図—2 実験および計算におけるパラメータの定義

式 (39) の数値計算には、中央差分法を用いた。

(2) 解析条件

解析条件は、Davies and Heathershaw<sup>1)</sup>の実験条件にあわせた。図—2に示すように、水深  $h$  および透水層厚  $h_s$  を一定とし、海底起伏を

$$\delta = D \sin(\lambda x); 0 \leq x \leq ml \quad \dots\dots\dots (53)$$

とする。ここに、 $m$  は砂れんの峰の数、 $\lambda$  は海底起伏の波数、 $l$  は波長を表し、 $l = 2\pi/\lambda$  である。このような条件のもとで、

i) Case 1 として  $m = 10$ ,  $D/h = 0.16$

ii) Case 2 として  $m = 4$ ,  $D/h = 0.32$

iii) Case 3 として  $m = 2$ ,  $D/h = 0.32$

の 3 種類を解析対象とした。実験における実際の値は  $D = 0.05$  m,  $l = 1.0$  m,  $h_s = 0$  m である。

(3) 解析結果および考察

図—3 (a) および (b) は、Case 1 において表面波の周期  $T$  を 1.0 s および 1.3 s とし、それぞれの場合について底面が不透過な場合と透水性を有する場合の波状底面上の無次元振幅の空間変化を示したものである。慣性係数  $\tau$  は 1.0、間隙率  $n$  は 0.4、透水層厚  $h_s$  は 0.2 m とし、抵抗係数  $f$  は 1 および 10 の 2 種類とした。(a) 図では、 $2|k|/\lambda$  は約 1.4、反射率は 0.1 以下である。不透過底面の場合には振幅減衰がほとんど見られないのに対し、透水性を有する場合は振幅が減衰し、 $f$  が小さいと振幅減衰が大きい。(b) 図は、 $2|k|/\lambda$  が約 1.0 の共鳴反射条件を満たす場合であり、反射率が大きく重複波の形成が顕著である。不透過底面の場合には振幅の変動が大きく、振幅減衰は緩やかなのに対し、透水性底面では  $f$  が小さいと反射率が小さくなって振幅変動が小さく、また振幅減衰が大きくなる。

図—4 は、横軸に  $2k/\lambda$  (透水性底面の場合には  $k$  とし、波数の実数部を用いる) をとり、線形抵抗係数  $f$  をパラメータとして反射率  $R$  (上段の図) および透過率  $T$  (下段の図) を示したものである。ただし、 $\tau = 1.0$ ,  $n = 0.4$ ,  $h_s = 0.2$  m とした。図中の実線で示した結果は不透過底面のものであり、この結果は Kirby<sup>1)</sup>と同じで、

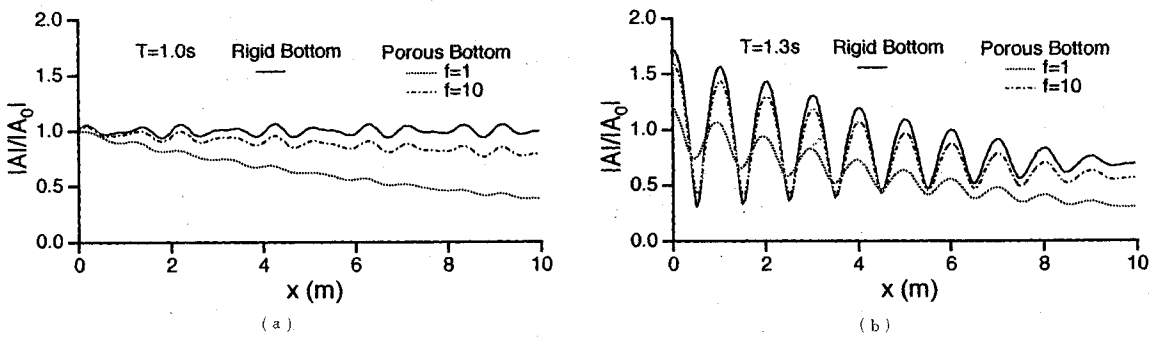


図-3 波状海底上の波の振幅の空間変化

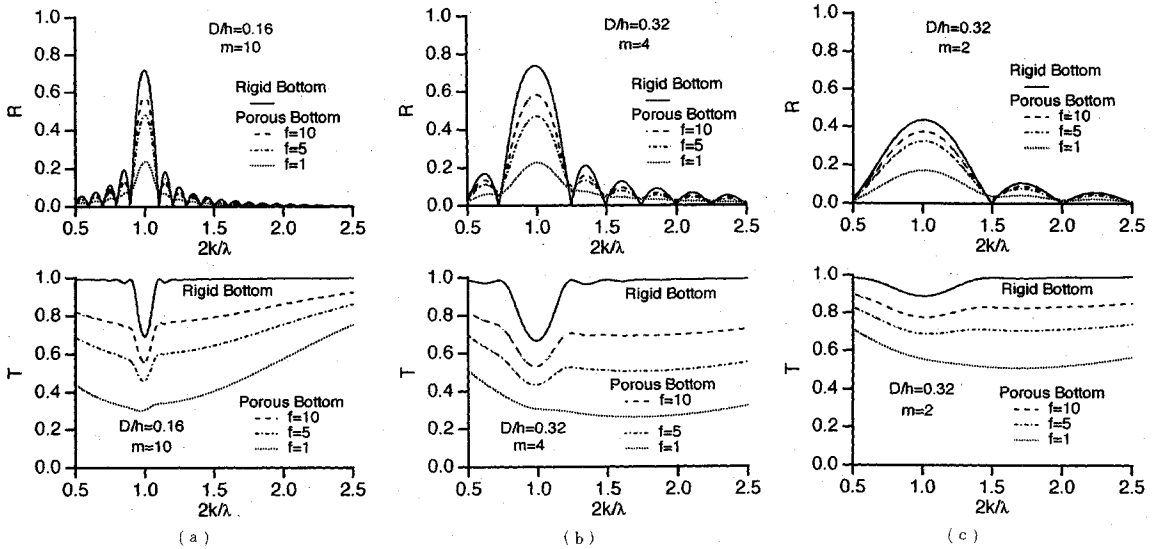


図-4 正弦的に変化する海底上を伝播する波の反射率と透過率

ここには示していないが、実験結果とほぼ一致する<sup>4)</sup>。これらの図から、 $f$ が小さいと反射率および透過率がともに小さくなっていることがわかる。(b)図と(c)図を比較すると、砂れん数が少なくなると反射率は小さくなり、透過率は大きくなっている。また、(a)図と(b)図によると、 $D/h$ により Bragg 共鳴反射が生じる領域幅に差がでる。

図-4では $f$ を10, 5, 1と変化させたが、 $f \rightarrow 0$ になると $R$ および $T$ がどうなるかについて触れておく。 $f \rightarrow 0$ のケースは3.(4)に示した通り、実際の水深が $h+h_s$ となり、透水層がない場合に相当する。こうした場合、 $R=0$ 、 $T=1$ である。

式(28)の分散関係式によると波数 $k$ は複素数である。実数部と虚数部をそれぞれ $k_r$ および $k_i$ とすると、一定厚さの透水層がある一定水深地形を伝播する波は次のように表される。

$$\eta = A_0 \exp(-k_i x) \exp\{i(k_r x - \omega t)\} \dots \dots \dots (54)$$

上式は、 $k_i$ の項により、伝播距離とともに振幅(エネ

ルギー)が減少することを示している。いま、周期1.0 sの波に対し、 $\tau=1.0$ 、 $n=0.4$ 、 $h_s=0.2$  mとして、 $k_i$ の $f$ に対する変化を図-5に示す。 $f$ が約1.0で $k_i$ が最大(振幅減衰率が最大)となり、 $f \rightarrow 0$ で $k_i \rightarrow 0$ 、すなわち、エネルギー減衰は生じなくなることがわかる。物理的には次のことを表している。 $f$ がある値より大きくなるにつれて(抵抗が大きくなる)、透水層内の流体は流れにくくなり、その結果エネルギー散逸が小さくなる。逆に $f$ がある値より小さくなるにつれて(抵抗が小さくなる)、間隙流体は流れやすくなってエネルギー散逸が小さくなる。したがって、 $f$ の特定の値でエネルギー散逸が最大となる。

図-6は、Case 2について、反射率に及ぼす透水層厚 $h_s$ の影響を示したものである。ただし、 $\tau=1.0$ 、 $n=0.4$ 、 $f=10$ とした。この図から、透水層厚 $h_s$ が大きいほど反射率が減少するのが見られる。透水層厚が大きくなるほどその内部でのエネルギー散逸が大きくなるためである。透過率についても同様な傾向が見られた。

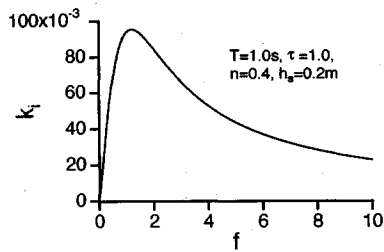


図-5 抵抗係数に対する波数の虚数部の変化

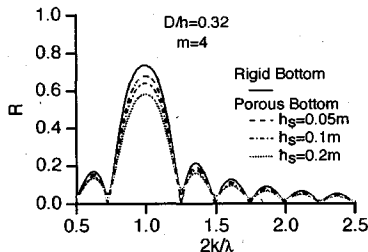


図-6 反射率に及ぼす透水層厚の影響

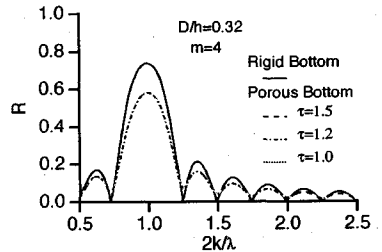


図-7 反射率に及ぼす慣性係数の影響

図-7は、反射率に及ぼす慣性係数  $\tau$  の影響を示したものである ( $f=10, n=0.4, h_s=0.2\text{ m}$  とした)。他のいずれのケースにおいても慣性係数  $\tau$  の影響はほとんどなかった。

本解析では  $n=0.4$  と一定とし、 $f$  や  $\tau$  の値を変化させたが、実際にはこれらの値は互いに独立ではないということに注意しなければならない。

### 5. 底面摩擦に関する一考察

透水層表面は一般に粗度が大きいので、乱れが容易に発生し乱流境界層が形成される。乱流境界層が発達している場合の底面摩擦は経験的に次式で表される。

$$\tau_b = \frac{1}{2} f_b u_b |u_b| \dots\dots\dots (55)$$

ここで、 $u_b$  は底面における水粒子速度、 $f_b$  は摩擦係数で、レイノルズ数や相対粗度の関数として表される。この底面摩擦によってなされる単位面積、単位時間当たりの仕事量 (すなわち、波のエネルギー減衰率) は次のようになる。

$$\varepsilon_D = \overline{\tau_b u_b} \dots\dots\dots (56)$$

は時間平均を表す。 $u_b$  として

$$u_b = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{ig|A|}{\omega} f^{(1)} e^{i(kx-\omega t)} \right\} \Big|_{z=-h}$$

$$= \frac{|A|\omega}{\cosh kh (\tanh kh + \gamma \tanh kh_s)} e^{i(kx-\omega t)} \dots\dots\dots (57)$$

を用いると、式 (56) は次のように変形される。

$$\varepsilon_D = E \frac{4f_b |A|\omega^3}{3\pi g \{ \cosh kh (\tanh kh + \gamma \tanh kh_s) \}^3} \dots\dots\dots (58)$$

$$E = \frac{1}{2} \rho g |A|^2 \dots\dots\dots (59)$$

である。緩勾配方程式は式 (46) で表された ( $\hat{\phi}$  を複素振幅  $A$  で置き換えてもよい)。

いま、式 (46) の左辺に  $i\omega WA$  を加えれば波のエネルギー減衰を表すことができる<sup>12)</sup>。このエネルギー減衰項を含んだ緩勾配方程式を変形すると、

$$\nabla_h \cdot (\vec{C}_p E) = -WE \dots\dots\dots (60)$$

が得られる。式 (60) の  $WE$  と式 (58) の右辺を等し

いとにおいて

$$W = \frac{4f_b |A|\omega^3}{3\pi g \{ \cosh kh (\tanh kh + \gamma \tanh kh_s) \}^3} \dots\dots\dots (61)$$

を得る。こうした底面摩擦項  $i\omega WA$  ( $W$  は式 (61) を用いる) を本研究で導いた方程式に付け加えると、さらに反射率および透過率が小さく計算されることになる。出口<sup>10)</sup>は、詳細な乱流境界層理論を用いて透水層上を伝播する波の振幅減衰への影響を検討したが、その結果によると乱流境界層の影響は小さかった。この点については、さらに検討の余地があると考えられる。

### 6. あとがき

本研究では、透水層の層厚が表面重力波の波長と同オーダーで空間的に変化する海底地形と波との相互干渉を考慮できる、波状透水層上の波動方程式を導出した。この方程式は、Berkhoff<sup>9)</sup>の緩勾配方程式および Kirby<sup>11)</sup>の波状海底地形上の波浪変形理論を特別な場合として含んでいる。この理論を断面2次元の波浪変形の解析に適用した。解析条件は Davies and Heathershaw<sup>1)</sup>の行った水理実験条件に対応させた不透過底面の場合に加えて、透水性を有する場合を想定し、透水層厚  $h_s$ 、線形抵抗係数  $f$ 、慣性係数  $\tau$  といった透水層の条件を変化させた。そして Bragg 散乱に及ぼす透水性の影響を調べた。Bragg 共鳴反射は、海底が透水性を有する場合でも、海底起伏の波長が表面重力波の波長のほぼ半分の時に生じるが、透水層の抵抗係数がある値 (分散関係式から求められる波数の虚数部が最大値となる時の値) までは値が小さいほど、反射率および透過率ともに不透過底面の場合に比べて減少する。また、透水層厚が大きいくほど、透水層内のエネルギー散逸により、反射率および透過率がともに小さくなる。反射率および透過率に及ぼす慣性係数の影響はほとんどない。

Bragg 共鳴反射を利用した波浪制御を試みる場合、捨石群などの透水性を有する構造物を用いることで透過波および反射波の両者を低減できる可能性がある。なお、Bragg 共鳴反射が生じる領域幅を大きくするための平面的な海底起伏の配置について検討する必要がある。

本研究は、(財)前田記念工学振興財団の研究助成による研究であり、ここに謝意を表します。また、分散関係を解くプログラムを提供して頂いた新潟大学工学部泉宮尊司助教授に謝意を表します。

付録1 式(30)から式(31)への計算過程

式(30)左辺第1項

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 f^{(1)} \phi_{zz} dz &= - \int_{-h}^0 f^{(1)} \nabla_h^2 \phi dz \\ &= - \int_{-h}^0 \left\{ \nabla_h (f^{(1)2} \nabla_h \tilde{\phi}) + f^{(1)} \tilde{\phi} \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial h^2} (\nabla_h h)^2 \right. \\ &\quad \left. + f^{(1)} \tilde{\phi} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial h} \nabla_h^2 h \right\} dz \\ &= - \nabla_h \cdot \int_{-h}^0 \nabla_h \tilde{\phi} f^{(1)2} dz \\ &\quad - \int_{-h}^0 \left\{ f^{(1)} \tilde{\phi} \left( \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial h^2} \right) (\nabla_h h)^2 \right. \\ &\quad \left. + f^{(1)} \tilde{\phi} \left( \frac{\partial f^{(1)}}{\partial h} \right) \nabla_h^2 h \right\} dz + \nabla_h h \cdot \nabla_h \tilde{\phi} f^{(1)2} \Big|_{-h} \\ &\quad \dots \dots \dots (1.1) \end{aligned}$$

式(30)左辺第2項

$$\int_{-h}^0 \phi f_{zz}^{(1)} dz = \int_{-h}^0 f^{(1)} \tilde{\phi} k^2 f^{(1)} dz = \int_{-h}^0 f^{(1)2} k^2 \tilde{\phi} dz \dots \dots \dots (1.2)$$

式(30)右辺

$$\begin{aligned} [f^{(1)} \phi_z - \phi f_z^{(1)}]_0^h &= - \frac{1}{g} (f^{(1)} \phi_n) \Big|_0 - \frac{\omega^2}{g} (\phi f^{(1)}) \Big|_0 \\ &\quad - [f^{(1)} \{ - \nabla_h h \cdot \nabla_h \phi + \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \phi) + w^{(1)} \}] \Big|_{-h} \\ &\quad + (\phi f_z^{(1)}) \Big|_{-h} \\ &= - \frac{1}{g} (f^{(1)2} \tilde{\phi}_{,n}) \Big|_0 - \frac{\omega^2}{g} (\tilde{\phi} f^{(1)2}) \Big|_0 \\ &\quad - \left[ - \tilde{\phi} (\nabla_h h)^2 \left( \frac{\partial f^{(1)}}{\partial h} \right) f^{(1)} - \nabla_h h \cdot \nabla_h \tilde{\phi} f^{(1)2} \right. \\ &\quad \left. + \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \tilde{\phi}) f^{(1)2} \right. \\ &\quad \left. + 2\delta (\nabla_h \tilde{\phi} \cdot \nabla_h h) \left( \frac{\partial f^{(1)}}{\partial h} \right) f^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\phi} (\nabla_h \delta \cdot \nabla_h h) \left( \frac{\partial f^{(1)}}{\partial h} \right) f^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + \delta f^{(1)} \left( \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial h^2} \right) (\nabla_h h)^2 \tilde{\phi} \right. \\ &\quad \left. + \delta \tilde{\phi} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial h} \nabla_h^2 h + f^{(1)} w^{(1)} \right] \Big|_{-h} + (\tilde{\phi} f^{(1)} f_z^{(1)}) \Big|_{-h} \\ &\quad \dots \dots \dots (1.3) \end{aligned}$$

付録2 式(31)および式(33)の係数  
(式(34)および(35)以外)

$$f^{(1)} \Big|_{-h} = \frac{1}{D} \cosh kh_s \dots \dots \dots (2.1)$$

$$f_z^{(1)} \Big|_{-h} = \frac{k}{D} \gamma \sinh kh_s \dots \dots \dots (2.2)$$

$$f^{(II)} \Big|_{-h} = \frac{1}{D} \gamma \cosh kh_s \dots \dots \dots (2.3)$$

$$f_z^{(II)} \Big|_{-h} = \frac{k}{D} \gamma \sinh kh_s \dots \dots \dots (2.4)$$

$$f^{(1)} \Big|_0 = 1 \dots \dots \dots (2.5)$$

$$f^{(1)2} \Big|_0 = 1 \dots \dots \dots (2.6)$$

$$f^{(1)2} \Big|_{-h} = \frac{1}{D^2} \cosh^2 kh_s \dots \dots \dots (2.7)$$

$$f^{(II)2} \Big|_{-h} = \frac{\gamma^2}{D^2} \cosh^2 kh_s \dots \dots \dots (2.8)$$

参考文献

- 1) Davies, A. G. and Heathershaw, A. D. : Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography, Jour. Fluid Mech., Vol.144, pp.419~443, 1986.
- 2) Mei, C. C. : Resonant reflection of surface waves by periodic sand-bars, Jour. Fluid Mech., Vol.152, pp.315~335, 1985.
- 3) Bailard, J. A., DeVries, J.W. and Kirby, J. T. : Considerations in using Bragg reflection for storm erosion protection, Jour. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol.118, No.1, pp.62~74, 1992.
- 4) Kirby, J. T. : A general wave equation for waves over rippled beds, Jour. Fluid Mech., Vol.16, pp.171~186, 1986.
- 5) Berkhoff, J. C. W. : Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13 rd Coastal Eng. Conf., ASCE, pp.471~490, 1972.
- 6) 泉宮尊司・遠藤雅人：潜堤および透過性構造物のある海浜における波動場解析，第36回海岸工学論文集，pp. 638~642, 1989.
- 7) Somchai Rojanakamthorn・磯部雅彦・渡辺晃：透過潜堤による波浪変形の解析モデル，第36回海岸工学論文集，pp. 643~647, 1989.
- 8) Sollit, C. K. and Cross, R.H. : Wave transmission through permeable breakwaters, Proc. 13 rd Coastal Eng. Conf., ASCE, pp.1827~1846, 1972.
- 9) Madsen, O. S. : Wave transmission through porous structures, Proc. of ASCE, Vol.100, WW3, pp.169~188, 1974.
- 10) 出口一郎・棋木 亨・水野 立：透水層表面の境界摩擦の推定と透水層上の波変形に対する線形波動理論の適用限界，第36回海岸工学論文集，pp. 596~600, 1992.
- 11) Gu, Z. and Wang, H. : Gravity waves over porous bottoms, Coastal Eng., Vol.15, Nos.5 & 6, pp.497~524,

1991.

Univ. of Tech., The Netherland, 130p., 1981.

- 12) Booij, N. : Gravity waves on water with non-uniform depth and currents, Rept. 81-1, Dept. of Civil Eng., Delft

(1993. 4. 30 受付)

---

## WAVE EQUATION OVER POROUS RIPPLED BED AND ANALYSIS OF BRAGG SCATTERING

Hajime MASE, Ken TAKEBA, Tetsuo SAKAI and Wataru KIOKA

A time-dependent wave equation is developed for waves propagating over a porous rippled layer, with rapid undulations about the mean depth satisfying the mild slope assumption, on an impermeable slowly varying depth also satisfying the mild slope assumption. The ripples are assumed to have wavelengths of the same order as those of surface gravity waves. The equation developed here contains the existing theories of Berkhoff (1972) and Kirby (1986). The rates of both reflection and transmission over porous rippled beds become smaller than those over impermeable rippled beds, due to the energy dissipation in porous layer.

---