

投稿論文 (和文)
PAPERS

拡散問題に対する解析解を応用した逐次計算手法の提案

多田東臣*

任意な初期値の下での非定常一様流場における拡散の解析解を求めた。空間を直方体状セルに分割し、セル内の平均濃度が Δt の後、周辺セルへ及ぼす影響量を解析解より計算し、それを有限個のセル内で質量保存が成り立つように修正を施して影響係数とした後、これを重みとした重ね合わせ法による逐次計算手法を提案した。精度、安定性について差分法と比較し、拡散数 ≥ 0.5 、Courant 数 ≥ 1 であっても計算が安定して精度良く行えることを示した。

Key Words : diffusion, influence-coefficient, Green-function

1. はじめに

拡散方程式は土木工学においても大気拡散や水質汚濁、あるいは土の圧密現象などの検討に対して用いられる重要な方程式の1つである。しかしながらその解析解は比較的条件的に整った場合の現象を対象として得られていることが多く、そのため解析解としての利用は物理現象の基本的性質を理解したり、有限要素法や差分法などの一般的な計算手法に対する精度検討のために用いられる程度に過ぎなかった。複雑な境界条件をもつ場合や移流速度、拡散係数が変化する場合のシミュレーション手法としては差分法や有限要素法等を用いるのが通常である。しかしながらこれらの手法は解を得るために連立方程式をステップごとに解いたり、ステップ時間を小さくとらないと係数が負となり、累積的な誤差によって解が発散したり振動を生じる可能性がある。

これに対し本文中で述べる逐次計算手法は任意の初期値と負荷を与えた場合の拡散の無限領域における解析解を基礎式として使用する。すなわち拡散する物理量を濃度にとるとき、空間を直方体状セルに分割し個々のセル内で平均化した値を初期値あるいは負荷量として与える。それ以後の時間的、空間的に連続した濃度分布を解析解として求めた後、同じセル内で再び平均化して得た値を次の計算用初期値として用いる。このとき1つのセルから周辺のセルへ移流・拡散によって与えられる影響量を保存則を満たすように補正した有限項数の係数とし、その係数を用いて重ね合わせにより陽解法として解くものである。結果に含まれる累積的な誤差としては、次のステップへの初期値を与えるセル内平均化過程などで生じるが、無次元パラメータ d の値を選択することにより安定で精度の高い解を得るようにする。また得られた解の

精度・安定性について検討を行い差分法との比較を行う。

2. 方程式と解

C を物質の濃度とし、直交3次元空間 (x, y, z) における移流・拡散現象の基礎方程式が次のように与えられているとする。

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \left(u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \lambda C + Q \dots \dots \dots (1)$$

ここで

- D_x, D_y, D_z : 乱流拡散を含む各軸方向の拡散係数, 空間的に一様で時間 t の関数
- u, v, w : 各軸方向の移流速度, 空間的に一様で時間 t の関数
- λ : 空間的に一様な減衰定数で t の関数
- Q : 拡散物質の負荷発生率で x, y, z, t の関数

とする。無限遠まで含めて有限で任意の値をもつ初期分布を

$$C(x, y, z, 0) = C_0(\xi, \eta, \zeta) \dots \dots \dots (2)$$

と与えた場合の解は¹⁾

$$\begin{aligned} C(x, y, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ C_0(\xi, \eta, \zeta) E(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, 0) \\ &\quad + \int_0^t Q(\xi, \eta, \zeta, \tau) E(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau) d\tau \} \\ &\quad d\xi d\eta d\zeta \dots \dots \dots (3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(4\pi)^3 \int_{\tau}^t D_x ds \int_{\tau}^t D_y ds \int_{\tau}^t D_z ds}} \end{aligned}$$

* 正会員 (株) 四国総合研究所 土木技術部
 主席研究員 (〒761-01 高松市屋島西町 2109)

$$\cdot \exp\left\{ -\frac{(x - \int_{\tau}^t u ds - \xi)^2}{4 \int_{\tau}^t D_x ds} - \frac{(y - \int_{\tau}^t v ds - \eta)^2}{4 \int_{\tau}^t D_y ds} - \frac{(z - \int_{\tau}^t w ds - \zeta)^2}{4 \int_{\tau}^t D_z ds} - \int_{\tau}^t \lambda ds \right\} \dots (4)$$

となる。Eは点(ξ, η, ζ)に対するGreen関数である。

次に座標軸に垂直な平面群で空間を直方体状のセルに分割し、それぞれのセル内では一定な値の初期値が与えられており、さらに負荷発生率Qも同じセル内でそれぞれ一様であるとして定義されているとき、これを切片の座標ξ_i, η_j, ζ_kを用いて

$$C(x, y, z, 0) = C_0(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \dots (5)$$

$$Q(x, y, z, \tau) = Q(\xi_i, \eta_j, \zeta_k, \tau) \dots (6)$$

と表すものとする。ただし各軸方向のセル幅はそれぞれΔξ, Δη, Δζとして等間隔にとり、x, y, zおよび時間τのとり方を

$$\xi_i \leq x < \xi_{i+1}, \eta_j \leq y < \eta_{j+1}, \zeta_k \leq z < \zeta_{k+1}, 0 \leq \tau \leq t$$

のようにする。式(5)(6)の下で式(3)は

$$C(x, y, z, t) = \sum_i \sum_j \sum_k \{ C_0(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) E_c(x, y, z, t; \xi_i, \eta_j, \zeta_k, 0) + \int_0^t Q(\xi_i, \eta_j, \zeta_k, \tau) E_c(x, y, z, t; \xi_i, \eta_j, \zeta_k, \tau) d\tau \} \dots (7)$$

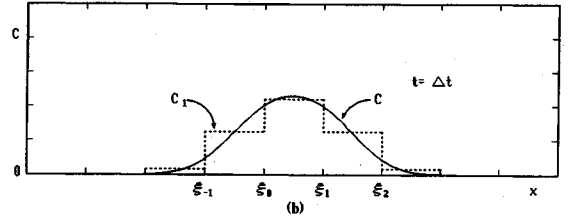
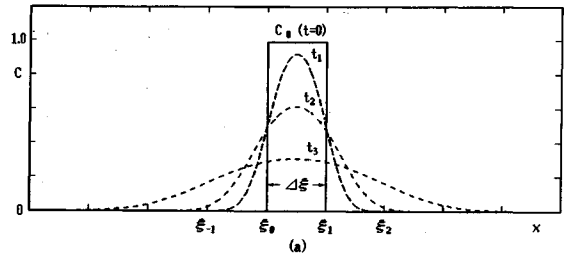
と変形される。ここに

$$E_c(x, y, z, t; \xi_i, \eta_j, \zeta_k, \tau) = [Erf\{(x - \int_{\tau}^t u ds - \xi_i) / (4 \int_{\tau}^t D_x ds)^{1/2}\} - Erf\{(x - \int_{\tau}^t u ds - \xi_{i+1}) / (4 \int_{\tau}^t D_x ds)^{1/2}\}] \cdot [Erf\{(y - \int_{\tau}^t v ds - \eta_j) / (4 \int_{\tau}^t D_y ds)^{1/2}\} - Erf\{(y - \int_{\tau}^t v ds - \eta_{j+1}) / (4 \int_{\tau}^t D_y ds)^{1/2}\}] \cdot [Erf\{(z - \int_{\tau}^t w ds - \zeta_k) / (4 \int_{\tau}^t D_z ds)^{1/2}\} - Erf\{(z - \int_{\tau}^t w ds - \zeta_{k+1}) / (4 \int_{\tau}^t D_z ds)^{1/2}\}] \cdot \exp(-\int_{\tau}^t \lambda ds) \dots (8)$$

であり、Erf(a)は

$$Erf(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^a \exp(-x^2) dx \dots (9)$$

と定義した誤差関数である。式(8)が各軸方向についての誤差関数の差の積として与えられていることから、式(1)で示される移流・拡散現象は各軸方向についてそれぞれ正規分布で表される独立した確率事象が重ね合わせられたものであり、加えて減衰が一様に作用してい



図一 拡散の時間経過と区間平均

るものと解釈できる。したがって独立した確率事象の同時生起確率は個々の事象の生起確率の積で与えられることから、以下では1次元問題に対して主に検討を進め、得られた結果を基に2, 3次元領域への拡張を試みる。

3. 移流項のない場合の逐次計算法

(1) 影響係数の導入

式(4)または式(8)によれば移流項の効果はt=τからt=tに至る間の輸送距離だけ、生起確率密度分布を下流方向へ平行移動させることを示している。そこでここでは移流項を0とおき初期値による拡散のみ考慮する場合の逐次計算方法について検討する。tをある値に定めて0~tの間拡散係数は定数とし、またQ=λ=0として1次元拡散に対する検討を行う。

x軸上にξ_i(i=0, 1, 2, ...)を等間隔Δξに取って区間(ξ_i ≤ x < ξ_{i+1})を区間ξ_iと呼ぶこととし、同区間におけるC(x, 0)の平均値をC₀(ξ_i)とおく。このとき拡散を求める基本式は式(7), (8)より次のように求められる。

$$C(x, t) = \sum C_0(\xi_i) [Erf\{(x - \xi_i) / \sqrt{4D_x t}\} - Erf\{(x - \xi_{i+1}) / \sqrt{4D_x t}\}] \dots (10)$$

今、初期値を

$$C_0(\xi_i) \begin{cases} = 1 & (i=0) \\ = 0 & (i \neq 0) \end{cases} \dots (11)$$

とした場合の経時変化を式(10)により求めると図一(a)のようになる。破線で示した3つの経過時間t₁に対する曲線Cの各々とx軸とで囲む面積は保存則により常に1×Δξである。次に図一(b)において経過時間tを逐次計算のステップ時間Δtにとった場合の連続な曲線Cに対し、同じ点ξ_iで区切ってΔξごとにCの平均値を求めると破線C₁が得られる。この場合も破線C₁

と x 軸とで囲む面積は $\Delta\xi$ とならなければならない。破線 C_1 は曲線 C の近似値を与えるものであるが、一方、 C_1 を次の拡散過程に対する各区間 ξ_i の初期値とみなし、再び式 (10) により計算を行い平均操作を繰り返すことで計算の続行が可能となる。ただし各区間 $\Delta\xi$ 内の平均操作は、物理的には濃度物質の存在位置を中心軸から遠ざけることに相当し、数学的取扱上の厳密性は保たれなくなる。すなわち誤差を持ち込むことになる。

C_1 が C_0 から Δt 経過後の値であることを表すために、座標点の呼び名を ξ_k から x_k とおきかえ、区間 x_k において $C_1(x_k)$ と表すとき、比 $C_1(x_k)/C_0(\xi_0)$ は区間 ξ_0 周辺における拡散の影響を与える係数と見ることができる。この係数の定義される区間数は数学的には有限ではないが、図にも示されるように有意な値をもつ区間は ξ_0 の周辺に限られ、ある範囲を越えれば実質的に係数は 0 と見なすことができよう。いま $C_0(\xi_i)$ に対し係数値を 0 と見なさない範囲を区間 x_i を中心にその両端に m ずつとるものとし、中心を含めてその数を奇数 N とおくとその範囲内の $C_1(x_k)$ と x 軸とで囲まれる面積は元の値 $\Delta\xi$ に一致しなくなる。そこで 1 つの修正方法として N の区間より外側へ拡散した量は両端にある 2 区間にそれぞれ加えて保存則を満たすよう修正する方法を採用する。このようにして得られた係数を拡散の影響係数と呼ぶこととし、区間数 N を付して $E_N(n)$ と表記すれば次式で定義される。

$$E_N(n) = \frac{1}{\Delta\xi} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \{ \text{Erf}\{(x-\xi_i)/\sqrt{4D_x\Delta t}\} - \text{Erf}\{(x-\xi_{i+1})/\sqrt{4D_x\Delta t}\} \} dx \dots\dots (12)$$

ここで $N=2m+1$ ($m=1, 2, \dots$)
 $n=m, m-1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -m$
 $=k-i$

ただし $n=m$ のとき $x_{k+1}=\infty$
 $n=-m$ のとき $x_k=-\infty$

このとき各係数値はすべて $0 < E_N < 1.0$ となる。

N を有限にとることは Δt 経過後の拡散が有限な範囲に留まるとすることに等しい。したがって、この近似方法も拡散式の取扱に対して数学的厳密さを欠くことになる。ただし物理的にみればこの修正方法は遠くまで拡散した物質を近傍に引き戻すことに相当する。実際の拡散現象が瞬時に無限の遠方にまで影響を及ぼすことはないと考えられるので、物理的な扱い方としては容認できる方向と考えられる。また先に行った区間ごとの平均操作が個々のセル内で拡散を促進させる方向であったことから、この修正方法はこれを相殺しようとする向きに働いているともいえる。さて式 (12) で示される影響係数 E_N は無次元数 d を

$$d = \Delta\xi / \sqrt{4D_x\Delta t} \dots\dots\dots (13)$$

表-1 拡散の影響係数 $E_N(n)$ の例

N	d	n	0	± 1	± 2	± 3	± 4
3	1.0	C_1/C_0	.486068	.232329	.024150	.000486	.170E-5
		E_N	.486068	.256966	---	---	---
5	0.6	C_1/C_0	.319577	.231973	.088580	.017714	.001843
		E_N	.319577	.231973	.1082385	---	---
7	0.5	C_1/C_0	.270904	.215162	.107755	.033987	.006739
		E_N	.270904	.215162	.107755	.041631	---

表-2 影響係数 $E_N(n)$ ($N=3$)

$E_N(n)$	$n=-1$	0	1
$d=0.8$	0.295634076	0.408731848	0.295634076
1.0	0.256966038	0.486067924	0.256966038
1.2	0.224223099	0.551553802	0.224223099

と定義すれば、この d により一意的に定まることになる。 d をこのように定義すると、 d は Courant 数 ($u\Delta t/\Delta\xi$) と Peclet 数 ($u\Delta\xi/D_x$) との比 r をとって $r = (u\Delta t/\Delta\xi)/(u\Delta\xi/D_x) = 1/4d^2 \dots\dots\dots (14)$ なる関係にあることが分かる。なお r は拡散数となる。表-1 には $N=3, 5, 7$ とした場合の影響係数を、適当な無次元数 d を与えて修正前の値 C_1/C_0 と共に示した。またこれを求めるための BASIC プログラム例を末尾に付記した。

さて、連続分布を表す式 (10) に対応する逐次計算は影響係数 $E_N(n)$ を用いて次式により実行できる。

$$C_1(x_k, \Delta t) = \sum_{i=k-m}^{k+m} C_0(\xi_i) E_N(k-i) \dots\dots\dots (15)$$

式 (15) による逐次計算は区間 x_k を中心に両側 m ずつの区間 ξ_i から拡散してくる物質濃度を重ね合わせるものである。これは相反定理を用いると、区間 ξ_i に在った物質が区間 ξ_i を中心に両側 m ずつの有限な区間内へ局所的に保存則を保ちながら拡散するとして解析する方法であるとも言える。さらに式 (15) は右辺が全て既知であり、これによる逐次計算法は影響係数の値 ($0 < E_N < 1.0$) からみて絶対的な安定性をもつ陽解法となる。 $N=3$ の場合を展開すると式 (16) を得るが、これは陽解法となる通常の差分法と見かけ上同じ形式であり、計算時間も同じとなる。

$$C_1(x_k, \Delta t) = C_0(\xi_{k-1})E_3(1) + C_0(\xi_k)E_3(0) + C_0(\xi_{k+1})E_3(-1) \dots\dots\dots (16)$$

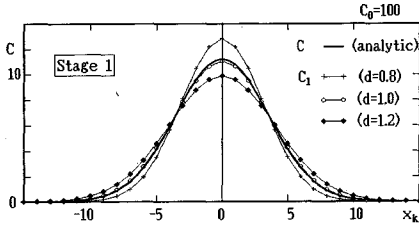
(2) 計算精度の向上

逐次計算の精度は影響係数 $E_N(n)$ の値により変化する。これを調べるため、 $N=3$ の場合に無次元数 d を変えて影響係数 $E_3(n)$ を求めた。これを表-2 に示す。

次にこれを用いて式 (16) により初期値を $C_0(0) = 100$ とした逐次計算を行い、結果 C_1 を解析解 $C(x + \Delta\xi/2, t)$ と比較した。ここで d の値の違いは式 (13) におけるステップ時間 Δt の取り方の違いに基づくと思われ、各ケースでステップ数 j を変えて $j\Delta t$ が 3 ケースとも同一経過時間となるようにしている。表-3 には経過時間を 2 ステージ選んだときの計算結果を示し、その

表—3 逐次計算例

ステージ	x_k	初期値 $C_0(0)=100$				
		0	± 1	± 2	± 5	± 10
1	C (Analytic)	11.2463	10.8082	9.59363	4.16484	0.21150
	$d=0.8(j=16)$	12.8379	12.2025	10.4743	3.53200	0.05351
	C_1 , 1.0(25)	11.0712	10.6572	9.50452	4.24335	0.22022
	1.2(36)	9.90258	9.60369	8.75972	4.59340	0.44692
2	C (Analytic)	5.63717	5.58121	5.41653	4.39207	2.07726
	$d=0.8(j=64)$	6.46869	6.38463	6.13892	4.66293	1.73890
	C_1 , 1.0(100)	5.55757	5.50404	5.34652	4.36280	2.10799
	1.2(144)	4.96116	4.92300	4.81024	4.09004	2.29079



図—2 d と逐次計算の関係

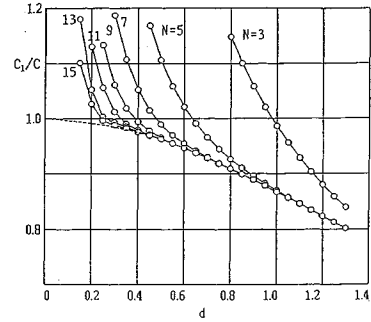
表—4 解と逐次計算の比較

計算回数 j	$d=1.00$ (N=3)			$d=0.979$ (N=3)		
	C(0)	C_1/C	誤差分散	C(0)	C_1/C	誤差分散
1	52.050	0.93385	35.1982	51.122	0.93601	35.5760
2	38.293	0.96187	1.34215	37.551	0.97187	0.946225
5	24.817	0.97664	0.085682	24.313	0.98890	0.037741
10	17.694	0.98153	0.011592	17.328	0.99459	0.003045
20	12.563	0.98395	0.005147	12.302	0.99740	0.349E-3
50	7.9655	0.98540	0.001765	7.7988	0.99908	0.192E-4
100	5.6372	0.98588	0.847E-3	5.5190	0.99964	0.225E-5
200	3.9877	0.98612	0.435E-3	3.9041	0.99991	0.273E-6
500	2.5227	0.98626	0.174E-3	2.4697	1.0001	0.306E-7
1000	1.7840	0.98631	0.844E-4	1.7465	1.0001	0.306E-7

うちステージ1に対しては図—2をあわせて示した。図と表において d の差は Δt の差であるとき逐次計算解 C_1 は d の値が大または小のとき解析解 C に対してそれぞれ拡散の経過時間を過大または過小に評価している事がわかる。これより d の値を選んで逐次計算による拡散を解析解に対して最適値とすることが可能になる。したがってその最適な d の値を推定するために、 C_1 と C に対し

- ① 中心における2値の比を1へ近づける ($C_1(0, t)/C(0, t) \rightarrow 1$)
- ② 求めた M 区間内での誤差分散を0に近づける ($\sum (C_1 - C)^2 / M \rightarrow 0$)

の2つを条件にとって、 d を変化させて検討を行った。その結果、この2つの条件は同じ d の値により両方ともほぼ満たされることが判明した。表—4には $N=3$, $d=1.0$ の場合に対して条件①, ②の値をステップ数 j とともに示した。またさらに良い近似を与える d の値を試行的に求め併せて示した。このように条件①と条件②は1つの d により同時に満たされる傾向にあるので、次に区間数 N の値を変えて条件①と d の関係を求めた。ただし表—4にも見られるように計算回数 j により



図—3 d と計算精度 C_1/C との関係

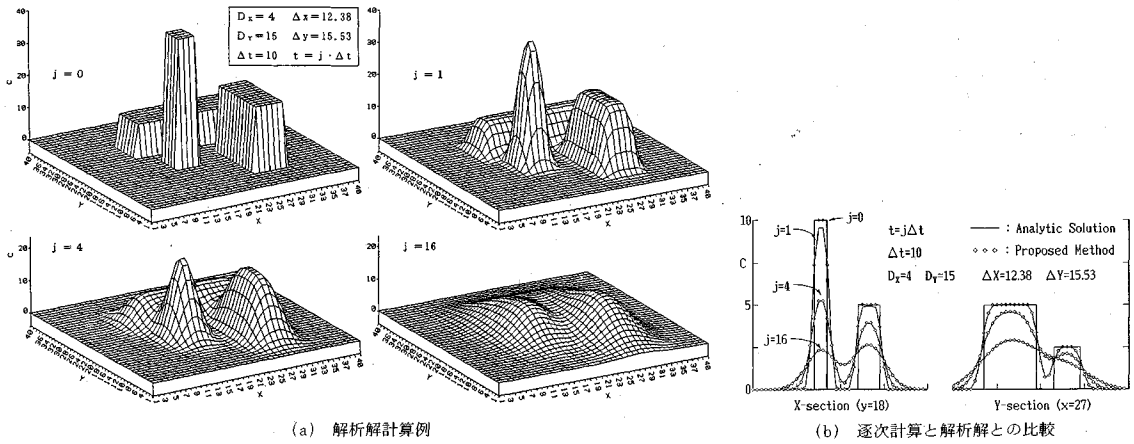
表—5 最適な影響係数 E_N の例

N	d_N	$E_N(n)$					
		n=0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
3	0.979	0.478512	0.260744				
5	0.634	0.335530	0.235722	0.096513			
7	0.477	0.259360	0.209984	0.111407	0.048929		
9	0.387	0.213050	0.184745	0.120453	0.059039	0.029238	
11	0.327	0.181272	0.163495	0.119956	0.071592	0.034753	0.019568

C_1/C の値は少しずつ変化するので $C_1/C_0=0.05$ となった時点における値をもって図—3に示した。なお $C_1/C_0=0.05$ となるに要するステップ数は $N=3$ で約125, $N=11$ で13程度である。このことから N を大きくとれば同一現象に対し Δt を大きくしたことに相当することが分かる。

図—3から各 N の曲線と $C_1/C=1$ の交点の近似値 d_N を読み取り、式(12)により求めた影響係数の一部を表—5に示す。 d_N を選定することにより式(13)から高精度化のために $\Delta \xi$, D_x , Δt の間に制約条件が生じることになり、逆にこの条件を満たしていれば精度の保証が得られることにもなる。したがって一次元拡散の場合は拡散係数が時間的に変化する場合にも $D_x \cdot \Delta t$ が一定になるようにステップ時間の読み変えをしてやることで同じ影響係数 d を用いて計算を続行することも可能である。長期間の変化を追跡するには、 d が一定となるよう Δt とともにメッシュ幅 $\Delta \xi$ を大きくするか、または拡散範囲としての N を大きくとることにより、 Δt は大きく、 $\Delta \xi$ は小さくとって同様に精度の良い計算を実行することが可能である。また図—3の曲線は N の増加とともに各々の下端が破線で示す曲線に漸近している。これは式(12)で定義した影響係数 E_N が N の増加により両端で保存則を満たすような修正を施さない元の係数 C_1/C_0 に近づくことによるものと判断される。したがって $N \rightarrow \infty$, $d \rightarrow 0$ のときこの破線は点 $(0, 1)$ へ近づくと推定される。

以上の検討は初期値を1区間のみ与えた場合のものであるが、拡散方程式の線形性に基づく重畳の原理から任意の初期値に対する拡散についてもこの方法が適用できるものと考えられる。2, 3次元拡散については各軸



(a) 解析解計算例

(b) 逐次計算と解析解との比較

図-4 2次元拡散例

方向の影響係数を掛け合わせることで解析できる。一例として $N=3$ および $N=5$ とした 2次元拡散の影響係数を表-6 に示す。総和が 1 となっており保存則が成立している。なお減衰定数 $\lambda \neq 0$ の場合は各項に $\exp(-\lambda \Delta t)$ を掛けることで対応できる。

図-4 (a) は 3 組の独立した初期値を与えた場合の時間経過を $t=j\Delta t$ として式 (17) で示される解析解により求めたものである。これに対し同図-(b) は式 (18) により $t=\Delta t, 4\Delta t, 16\Delta t$ の各ステージに対して表-6 に示した影響係数を用いて行った逐次計算結果を、適当な x, y の 2 断面において解析解の結果と併せて示したものである。◇印で示す逐次計算結果は x 断面における $j=1$ の頂部および底部の一部において解析解とわずかに異なっているが、その他は良く一致していることが分かる。

$$C(x, y, j\Delta t) = 40\{F_x(15, 18) \cdot F_y(16, 20)\} + 20\{F_x(25, 30) \cdot F_y(8, 20)\} + 10\{F_x(12, 32) \cdot F_y(24, 30)\} \quad (17)$$

ただし添字 i は x, y 軸方向の値を指すものとする。

$$F_i(a, b) = \text{Erf}\left(\frac{x_i - a\Delta x_i}{\sqrt{4D_{ij}\Delta t}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{x_i - b\Delta x_i}{\sqrt{4D_{ij}\Delta t}}\right)$$

$$C_2(x_k, y_l, \Delta t) = \sum_{i=k-1}^{k+1} \sum_{j=l-2}^{l+2} C_0(x_i, y_j) E_{3,5}(k-i, l-j) \dots \dots \dots (18)$$

(3) 差分法との関連

中央差分等の陽解法となる差分式は移流項がない場合は拡散数を $r(=D_x\Delta t/\Delta x^2)$ として

$$C_i^{n+1} = rC_i^n + (1-2r)C_i^n + rC_{i+1}^n \dots \dots \dots (19)$$

の形で表わされる。上式による逐次計算の精度については従来の研究により $r=1/6$ のとき誤差が最も小さくなるとされている。一方、提案手法では図-3、表-4 より $N=3$ の場合には $d=0.979$ すなわち式 (14) によれ

表-6 2次元拡散影響係数の例

(N=5x3)			
n	-1	0	1
-2	0.0251652	0.0461828	0.0251652
-1	0.0614629	0.1127960	0.0614629
0	0.0874875	0.1605550	0.0874875
1	0.0614629	0.1127960	0.0614629
2	0.0251652	0.0461828	0.0251652

表-7 最適な逐次計算の比較

method	central diff.			proposed		
	1.22474 (r=0.16667)			0.979 (E(1)=0.26074)		
d	C(0, jΔt)	C _i	C _i /C	C(0, jΔt)	C _i	C _i /C
step j						
1	61.3524	66.6667	1.08662	51.1224	47.8513	0.93601
2	45.9709	50.0000	1.08765	37.5512	36.4949	0.97187
5	30.1465	31.1728	1.03405	24.3125	24.0426	0.98890
10	21.5809	21.8860	1.01414	17.3281	17.2343	0.99459
50	9.74765	9.77256	1.00255	7.79880	7.79161	0.99908
100	6.90123	6.90996	1.00127	5.51898	5.51696	0.99963
200	4.88295	4.88601	1.00063	3.90406	3.90004	0.99991

ば $r=0.261$ のとき逐次計算の精度が最も良くなるとしている。この違いを検討するため両手法の計算過程を表-7 にそれぞれの解析解とともに示す。拡散の数値解析において無次元数 d の値が違うということは、拡散係数とメッシュ幅 Δx が同じでもステップ時間 Δt の異なる場合を対象としていることから、表中の 2 ケースはステップ数が同じでも別の時間断面を表していることになる。表-7 では両手法ともそれぞれのピーク値が解析解を十分な精度で近似していると言える。このように精度が最良となる拡散数 r の値が手法により違うのは右辺各項の係数の求め方が違うことによるものと考えられるので、それぞれの係数 $r, E_3(\pm 1)$ と d の関係を図-5 に示す。図では上述の最良近似点を◎印で示している。提案手法のそれはちょうど差分法の係数を表す曲線との交点になっている。このことから提案手法についても $N=3$ の場合は隣接区間への拡散影響が拡散数 r に等しいとき最も精度がよくなると言えよう。

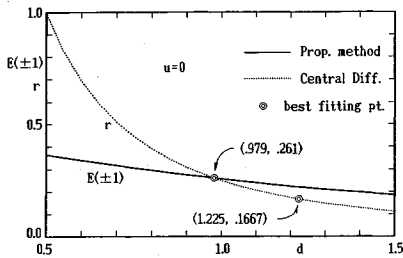


図-5 最適な逐次計算結果を与える点の関係

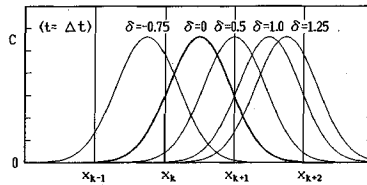


図-6 移流項の効果

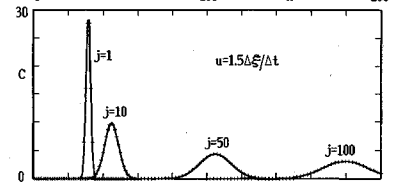
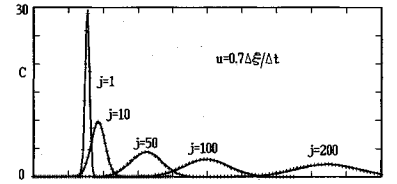
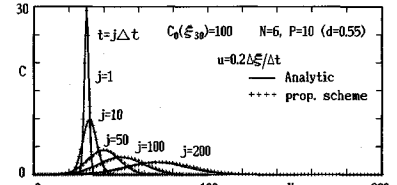


図-7 1次元流れ場における拡散計算例

4. 移流項を含む逐次計算法

(1) 移流・拡散の影響係数

移流項を取り入れた逐次計算法を検討するにあたり本節においても1次元拡散を基本に話を進めることとする。ステップ時間 Δt に対し $0 \sim \Delta t$ の間では移流速度 u および拡散係数 D_x は一定値とし、加えて $Q = \lambda = 0$ とする。区間 ξ_i における平均値としての初期値 $C_0(\xi_i)$ にもとづく拡散の基礎式は次のように求められる。

$$C(x, \Delta t) = \sum_j C_0(\xi_j) [Erf\{(x - u\Delta t - \xi_j)/\sqrt{4D_x\Delta t}\} - Erf\{(x - u\Delta t - \xi_{j+1})/\sqrt{4D_x\Delta t}\}] \quad (20)$$

式(20)によれば $C_0(\xi_i)$ にもとづく濃度分布は x 軸上で連続的に求められ、かつ $u\Delta t$ の値によって同じ分布が平行移動することが分かる。その様子を図-6に模式的に示した。図には矩形の初期値 $C_0(\xi_k)$ の分布が Δt の経過後、Courant 数 δ の値により区間 x_k から隣接する区間へ向けて平行移動の様子を示している。 $\delta = 1$ で区間 x_{k+1} へ分布が移動することになる。逐次計算では図に示す Δt 経過後の連続分布を区間 $x_k, x_{k+1} \dots$ ごとに平均して値 $C_1(x_k), C_1(x_{k+1}) \dots$ を求め次のステップの初期値 C_0 とする。すなわち

$$C_1(x_k, \Delta t) = \frac{C_0(\xi_i)}{\Delta \xi} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [Erf\{(x - u\Delta t - \xi_i)/\sqrt{4D_x\Delta t}\} - Erf\{(x - u\Delta t - \xi_{i+1})/\sqrt{4D_x\Delta t}\}] dx \quad (21)$$

式(21)が逐次計算の基礎式となる。式中の定積分は u の値が定まれば定数となり、これは区間 ξ_i に存在した $C_0(\xi_i)$ に基づく濃度分布が Δt の後、区間 x_k へ及ぼす影響の程度を表す係数とみなすことができる。式(21)を用いた逐次計算例を示す。図-7は u を一定値として区間 ξ_{30} にあるピーク状の初期値 $C_0(\xi_{30})$ が移流・拡散して行く様子を解析解とともに示している。精度、安定性も良く Courant 数 $\delta \geq 1$ であっても支障なく計算できることが分かる。

しかしながら流れの大きさ u は時間とともに変化するのが普通で、その都度式(21)において数値積分を行って係数値を求めることは可能であるものの計算効率の面からは得策ではない。そこで工学的に許容できる範囲で

区間幅 $\Delta \xi$ を細分し、それをある輸送距離としてあらかじめ係数値を求めておくとともに、別の輸送距離 $u\Delta t$ に対してはその両側の細分点のいずれか近い方の点における係数値を用いるという方法を考える。1区間の細分数を P とおくと細分点における Courant 数 δ は

$$\delta = f/P$$

$$f = 0, \pm 1, \dots, \pm(P-1), \pm P, \pm(P+1), \dots$$

$$(P=1, 2, \dots) \quad (22)$$

のように表すこともできる。この δ により $\Delta \xi$ を P 等分した距離を f 倍した点で移流・拡散による影響の大きさを逐次計算に先立ち係数化しておくことが可能になる。

ここで拡散のみを扱った前節では拡散現象の対称性から区間数 N を奇数としたが、移流のある場合は初期値の与えられた区間 ξ_0 に対して下流方向へ偏った非対称型となるので区間数を N から $N+1$ へと下流方向に対して1増した上で、移流・拡散の影響係数 $E_{N/P}(n, f)$ を次のように定義することとする。ただし $[]$ は Gauss の記号、 m は自然数とする。 $n = k - i$ として

$$E_{N/P}(n, f) = \frac{1}{\Delta \xi} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [Erf\{(x - u\Delta t - \xi_i)/\sqrt{4D_x\Delta t}\} - Erf\{(x - u\Delta t - \xi_{i+1})/\sqrt{4D_x\Delta t}\}] dx$$

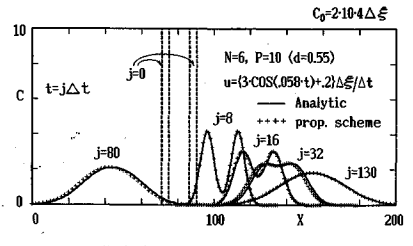
$$n = m + [\delta + 1] \quad \text{のとき} \quad x_{k+1} = \infty$$

$$n = -m + [\delta] \quad \text{のとき} \quad x_k = -\infty \quad \dots (23)$$

P の値は 5~10 程度でよいと考え、移流・拡散の影響係数の例として $P=5, N=4, 6$ とした場合の係数、 $E_{4/5}, E_{6/5}$ を適当な d の下で求めると表-8 のようになる。係数は全て $(0, 1)$ の間に入るの、これを用いて逐次計

表—8 移流・拡散の影響係数 $E_{N/P}$ の例

N	f	δ	$E_{N/P}(n, f)$								
			$n=-2$	-1	0	1	2	3			
4 $d=0.775$ (E4/5)	0	0.0		0.300889	0.398221	0.242348	0.058542		-1.0	-5	
	1	0.2		0.232489	0.390401	0.289848	0.087262		-0.8	-4	
	2	0.4		0.173712	0.367844	0.333090	0.125354		-0.6	-3	
	3	0.6		0.125354	0.333090	0.367844	0.173712		-0.4	-2	
	4	0.8		0.087262	0.289848	0.390401	0.232489		-0.2	-1	
5	1.0			0.300889	0.398221	0.242348	0.058542		0.0	0	
6 $d=0.55$ (E6/5)	0	0.0	0.127527	0.224694	0.295558	0.224694	0.098644	0.028883	-1.0	-5	
	1	0.2	0.098530	0.199154	0.292336	0.248003	0.121532	0.040445	-0.8	-4	
	2	0.4	0.074679	0.172680	0.282878	0.267788	0.146469	0.055506	-0.6	-3	
	3	0.6	0.055506	0.146469	0.267788	0.282878	0.172680	0.074679	-0.4	-2	
	4	0.8	0.040445	0.121532	0.248003	0.292336	0.199154	0.098530	-0.2	-1	
5	1.0		0.127527	0.224694	0.295558	0.224694	0.098644	0.028883	0.0	0	
			$n=-3$	-2	-1	0	1	2	3	δ	f



図—8 非定常1次元流れ場での拡散計算例

算を行えば不安定になることはない。 $E_{N/P}(n, f)$ の定義式からも明らかであるが、表—8 に示した係数値は $\delta \geq 1$ の場合には $\delta < 1$ と同じ係数が n の方向に 1 列ずつずれてくり返し表れることが分かる。 $\delta < 0$ の場合も同様であるがその場合は表中 n および δ は下段・右欄を読むこととする。

さて影響係数式 (23) を用いて逐次計算は式 (24) により実行できる。なおここでも $\lambda \neq 0$ なる場合は影響係数の各項に $\exp(-\lambda \Delta t)$ を乗じたものを係数として使用することで対処できる。 $n = k - i$ として

$$C_1(x_k, \Delta t) = \sum_{i=k-m}^{k+m-1} C_0(\xi_i) E_{N/P}(n, f) \dots (24)$$

一方、この方法では Courant 数 δ が有限個の細分点での値に限定されてしまうので、これをさけるため両端の細分点からの距離に応じた線形補間を行なう方法も考えられる。この場合、計算の基礎式は式 (25) のようになる。

$$C_1(x_k, \Delta t) = \sum_{i=k-m}^{k+m-1} C_0(\xi_i) \{ E_{N/P}(n, f)(i-\phi) + E_{N/P}(n, f+1)\phi \} \dots (25)$$

ただし $\phi = P\delta - f$

細分点においては影響係数は保存則を満たしているの、隣あう細分点の間を線形補間することで得られる新しい係数値も常に保存則を保つことが分かる。

図—8 には 2 つのピーク状初期値が移流・拡散する場合を式 (26) で表わされる解析解と式 (24) による逐次計算結果としてあわせて示す。

$$C\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) = 10 \{ F(\xi_{70}) - F(\xi_{74}) + F(\xi_{86}) - F(\xi_{90}) \} \dots (26)$$

ここで

$$F(\xi) = \text{Erf}\left\{ (x - \int_0^t u ds - \xi) / \sqrt{4Dt} \right\}$$

$$u = \{ 3.0 \cos(0.058 \cdot t) + 0.2 \} \Delta \xi / \Delta t, t = j \Delta t$$

図—8 によれば式 (24) による逐次計算は精度・安定性ともに良いことが分かる。なお式 (25) により求めた結果は式 (24) の結果と相対誤差で 0.1~1% の範囲に留まっており、精度上の優劣はつけられなかった。しかし同じ流速値を与えて中央差分法や Lax-Wendroff 法で行った結果は $\delta > 1$ となるので、解が発散して計算を実

行出来なかった。

(2) 逐次計算の精度

前節で示した移流・拡散の計算方法について精度と安定性を検討する。式 (24) において 1 つの区間 ξ_0 へのみ初期値 C_0 を与え、無次元数 d および Courant 数 δ を定めて逐次計算を行い解析解式 (20) と比較した。

解析解 C の最大値と初期値との比が 1/10 になった時点で、最大値を得た点での逐次計算結果 C_1 と解析解との比 C_1/C を求めて示したものが図—9 である。 δ に対しては (0, 1) の間の細分点を $P=10$ として図示しているが、本手法では (0, 1) 以外の δ の範囲に対しても精度 C_1/C は同じパターンを繰り返すことになる。

また $\delta=0.5$ が図の対称軸となっている。 δ の変化に対して精度 C_1/C は N が大きくなるほど安定する傾向が認められ、最適な d の値は $N=4, 6, 8$ に対してそれぞれ $d_N=0.775, 0.55, 0.42$ 程度であることが分かる。これは図—3 における d_N の間を補う値となっている。

次に C_1 と C との相対誤差の平均 σ を同じ検討結果について $C/C_0 > 0.05$ となる範囲に対して求め、結果を図—10 に示した。 σ は対称軸となる $\delta=0.5$ で最も低い値を示しながら変化している。 σ が 5% 以下の値ならば C_1 の分布はほとんど解析解と一致し、10% を超える場合は図—8 における $j=32$ の場合のように C_1 の分布が解から並行移動した状態を示す。なお $\sigma=0.1$ とは初期値 C_0 に対しては 1% の誤差ということになる。

さて本手法は陽解法に属するので同じ陽解法となる差分法と精度・安定性について比較、検討を試みる²⁾。差分法としては中央差分、後退差分それと Lax-Wendroff 法を取上げ図—9 に示したのと同じ計算を実行した。計算精度 C_1/C が 0.95~1.05 におさまる δ および d の範囲を求め、提案手法とともに図—11 に示した。差分法の安定性については $r \leq 0.5 (d \geq 1/\sqrt{2})$, $\delta^2 \leq 2r$ といわれており³⁾、図中の差分法はいずれも境界線がほぼ安定性の境界と等しい。これに対し提案手法は図に示すように主に差分法が安定性を保てない範囲で帯状に、Courant 数 δ の値にほぼ関わりなく精度良く計算できることが分かる。計算結果は解との相対誤差が 5%、初期値 C_0 に対しては 0.5% 以内の誤差範囲で得ることが可能であり、帯状の範囲外の d の値を用いても精度は下が

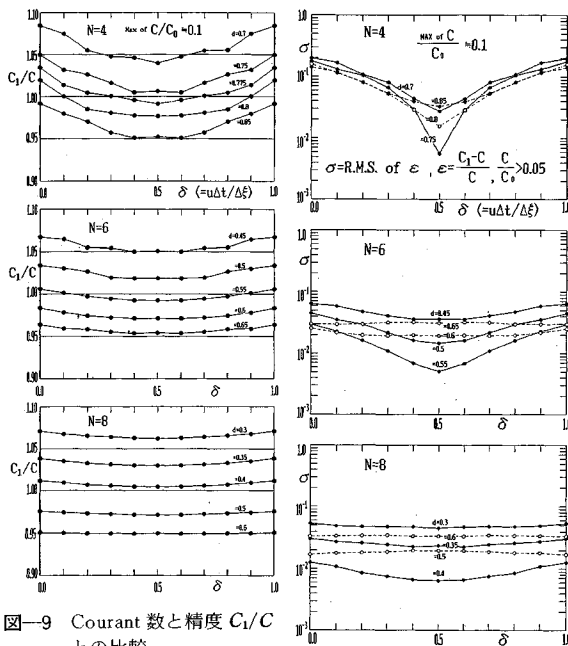


図-9 Courant 数と精度 \$C_1/C\$ との比較

図-10 Courant 数と相対誤差の関係

るものの発散等の不安定は生じないことが確認された。

5. 負荷発生率 \$Q\$ の取扱い

ここでは \$Q \neq 0\$ として負荷発生に基づく影響の係数化をまず 1 次元移流拡散に対して試みる。すなわち式 (7), (8) において積分の上限を \$\Delta t\$ とし, \$Q\$ および \$u\$ を \$\Delta t\$ 内で一定として \$0 \sim \Delta t\$ の間で時間積分を施し, 区間 \$x_k, x_{k+1}, \dots\$ ごとに平均して係数化を行う。

$$E_Q(n, f) = \frac{1}{\Delta\xi\Delta t} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_0^{\Delta t} [Erf\{(x-u\tau-\xi_i)/\sqrt{4D_x\tau}\} - Erf\{(x-u\tau-\xi_{i+1})/\sqrt{4D_x\tau}\}] d\tau dx \quad (27)$$

ここで係数 \$E_Q\$ を求める際の無次元数 \$d\$ は発生源付近の流動状況が他所ととくに大差がなければ, 移流・拡散の影響係数 \$E_{N/P}\$ を求めたのと同じ値を用いるのが良いと考えられる。また時間的に連続な負荷の発生に基づく影響は先の移流・拡散に対する区間数 \$N\$ には拘束されず, 流れ \$u\$ に応じた必要区間内で保存則を満たすように求めれば良いと考える。

図-12 には区間 \$x_k\$ における平均値をもって係数 \$E_Q\$ とする様子を図示した。なお区間平均値は \$\delta=0\$ および \$\delta=1.0\$ に対してのみ示した。表-9 へはその平均した値を負荷の影響係数として種々の \$\delta\$ について示した。また \$\lambda \neq 0\$ の場合は式 (27) に \$\lambda\$ の時間積分が加わるが, 図-13, 表-10 は \$N=3, u=0\$ の場合について例を示したものである。

2, 3 次元領域での負荷影響係数は, 時間積分のため

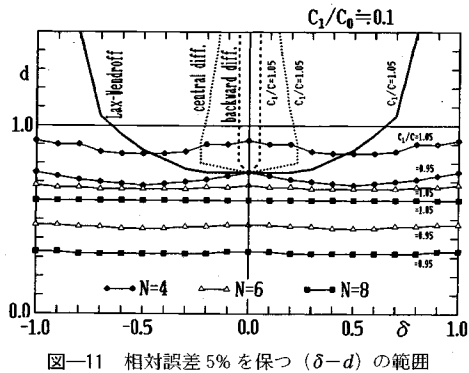


図-11 相対誤差 5% を保つ \$(\delta-d)\$ の範囲

厳密にはこれまでのように各軸ごとの掛け合わせで対処することはできない。表-11 には 2 次元領域に対して数値積分した値を示すとともに, 表-9 に示した軸方向ごとの負荷影響係数を掛け合わせて得た値を () 内に示した。両者に大差はなく, 総和が 1 になるような修正を施すのであれば若干の分布の違いはシミュレーションテクニックとして容認できる範囲内ではないと思われる。

こうして求めた負荷影響係数を用いて逐次計算を行うための計算の基礎式は, 式 (7), (27) から 1 次元の場合, 次式で与えられる。

$$C_1(x_k, \Delta t) = \sum_i \{C_0(\xi_i) E_{N/P}(n, f) + Q(\xi_i) E_Q(n, f)\} \quad (28)$$

2, 3 次元の拡散はこれまでと同様に各軸方向の係数の積を用いることができる。ここで負荷の影響は 1 ステップ時間の経過後には次の初期値として扱えることになるので, 負荷の時間的変化も取り入れた計算が可能となる。3 次元領域内での point source に対する定常解とこれに対応する非定常計算例として, セルの各辺長を \$\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta\$ とし, 点 \$(5\Delta\xi, 0, 0)\$ を含むセルが連続負荷源であるとした場合の計算結果を示す。\$x\$ 軸方向にのみ流れ (\$\delta=1\$) を考え対称性から平面 \$z=0\$ 上の計算結果を式 (29) で示される定常解と共に図-14 に示した。

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\sqrt{D_x D_y D_z} R} \exp\left(\frac{ux}{2D_x} - \sqrt{\frac{u^2 R}{4D_x}}\right) \quad (29)$$

ここに \$R = x^2/D_x + y^2/D_y + z^2/D_z\$

負荷の影響係数は各軸ごとの影響係数を掛け合わせる方法を採用した。計算のステップ数に応じ, また負荷源付近から順に解が定常解へ収束している様子が見られる。なお \$y, z\$ 軸方向については流れを定常的に \$\delta=0\$ としているので, このような場合には \$N=3, 5, \dots\$ に取る方が高精度を期待できると考え, 計算を実行した。

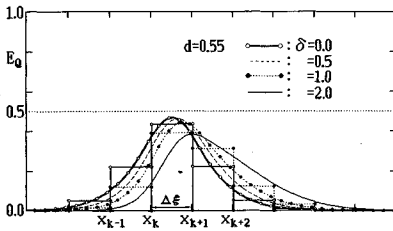


図-12 負荷影響係数 E_0 の求め方

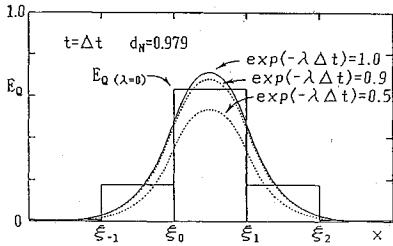


図-13 負荷影響係数 E_0 ($\lambda \neq 0$)

表-9 負荷影響係数 E_0 の例 (1 次元)

d	δ	E_0								
		n=-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
.775	0.0		.022403	.205067	.545060	.205067	.022403			
	0.5		.007693	.126878	.519126	.291750	.050570	.003983		
	1.0		.002218	.070693	.452207	.363222	.098708	.012303	.000649	
	2.0		.000118	.019084	.290612	.395506	.220070	.065281	.008329	
.550	0.0	.008866	.052163	.221755	.434432	.221755	.052163	.008866		
	0.5	.003650	.029480	.168477	.422640	.272344	.083989	.017037	.002383	
	1.0	.001356	.015214	.120163	.390136	.311695	.123001	.032360	.006075	
	2.0	.000139	.003181	.053132	.293654	.336207	.200877	.084504	.023612	.004694

表-10 負荷影響係数に対する減衰効果

$\exp(-\lambda \Delta t)$	n	$d_N=0.979$					Σ
		-2	-1	0	1	2	
=1.0		.0078934	.176052	.631929	.176052	.0078934	1.00
=0.9		.0072683	.165634	.603182	.165634	.0072683	.989
=0.5		.0046119	.119532	.473006	.119532	.0046119	.721

表-11 負荷影響係数の比較 (2 次元)

	ny	$E_0(n_x, n_y)$				Σ
		$n_x=0$	1	2	...	
$\delta x = 2$	0	0.18304 (0.16006)	0.18410 (0.18325)	0.09567 (0.10949)	...	(0.54506)
	1	0.05178 (0.06022)	0.06932 (0.06891)	0.04617 (0.04119)	...	(0.20507)
	2	0.00340 (0.00658)	0.00647 (0.00753)	0.00613 (0.00450)	...	(0.02240)
$\delta y = 0$
	Σ	(0.29365)	(0.33621)	(0.20087)	...	(1.0)
	ny	$E_0(n_x, n_y)$				Σ
		$n_x=-1$	0	1	...	
$\delta x = 1$	-1	0.00863 (0.00849)	0.02813 (0.02758)	0.02222 (0.02203)	...	(0.07609)
	0	0.05503 (0.05434)	0.20202 (0.17643)	0.13538 (0.14095)	...	(0.45221)
	1	0.04376 (0.04384)	0.12848 (0.14171)	0.11742 (0.11322)	...	(0.39322)
$\delta y = 1$
	Σ	(0.12026)	(0.39014)	(0.31170)	...	(1.0)

6. 境界条件の取扱い

シミュレーション計算においてよく用いられる境界条件として2つの条件を検討する。

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (x = \xi_b) \dots \dots \dots (30)$$

$$C = C_B \quad (x \leq \xi_b, t \geq 0)$$

$$C = C_0 \quad (x > \xi_b, t = 0) \dots \dots \dots (31)$$

式 (30) は $x = \xi_b$ において鏡像の原理が成り立つことを示しており $x \geq \xi_b$ を拡散を考えている範囲とすれば $C_0(\xi_{b-1}) = C_0(\xi_b)$, $C_0(\xi_{b-2}) = C_0(\xi_{b+1}) \dots$ となる。したがって式 (15) より

$$C_1(x_k, \Delta t) = \sum_{i=k-m}^{k+m} C_0(\xi_i) E_N(k-i) \\ = \sum_{i=k-m}^{b-1} C_0(\xi_{2b-1-i}) E_N(k-i) \\ + \sum_{i=b}^{k+m} C_0(\xi_i) E_N(k-i) \dots \dots \dots (32)$$

として計算を行うことが可能である。次に式 (31) に対しては式 (15) により得た値が $x \leq \xi_b$ の範囲で常に C_B に保たれると考え、各ステップごとに $C_1 = C_B$ と置き換えを行った計算を実行する。その結果を式 (33) で示される解析解と共に求めて図-15 に示した。

$$\frac{C - C_B}{C_0 - C_B} = 2 \cdot \text{Erf}\left(\frac{x - \xi_b}{\sqrt{4D_x t}}\right) - 1 \dots \dots \dots (33)$$

両者は良い一致を示しているため、強制的な置き換えがシミュレーションにおいて妥当な方法であると考えられる。なおこの方法において初期値 C_0 の値は C_B より大きくても同様に精度良く計算できる。

7. 結 論

一様流場において初期値を与えた拡散方程式の解析解により、隣接する有限個 (N 個) の直方体状セル内で質量保存を満たすように近似して得た影響係数を用いて、逐次計算が実行できることを示した。拡散計算の N は奇数、移流・拡散計算の場合は N を偶数とした。その結果を要約すれば以下のとおりである。

(1) 影響係数の値は流速 u にかかわらず常に 1 以下の正值となるから、提案手法は陽解法でありながら絶対安定性を持つ手法となる。

(2) 影響係数にはその大きさ N に応じた最も計算精度の良くなる無次元数 d_N が存在するとともに、得られた各軸方向ごとの影響係数の値を掛け合わせるだけで、2, 3次元拡散の逐次計算が安定して精度良く実行できる。

(3) 影響係数は数値積分により求めるが、逐次計算途中はこれを避けるため P ($=5 \sim 10$) 種類の流速 u に対する積分をあらかじめ求めて定数化しておき、この値を用いて任意の Courant 数に対応する影響係数を計算することができる。この場合 Courant 数 ≥ 1 であっても逐次計算が発散するようなことはない。

(4) 影響係数の大きさ N を大きく取ることにより、高い精度を与える d の範囲は広がり、加えてセル幅はより小さく、ステップ時間はより大きく取ることができると。

(5) 負荷の発生、減衰のある場合についてもほぼ同様の考え方で影響係数を求めて逐次計算が実行できる。

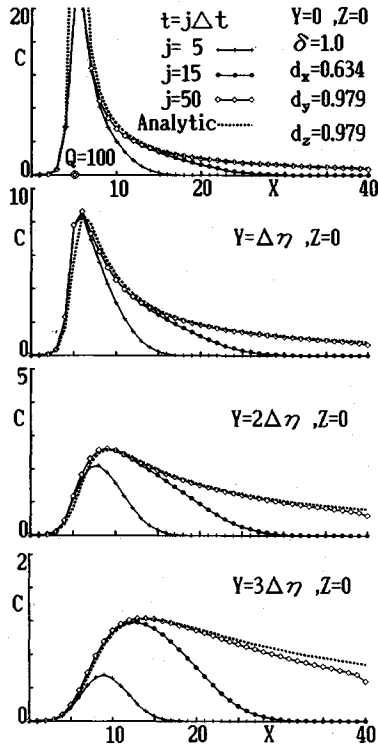


図-14 Point-source に対する 3 次元計算例

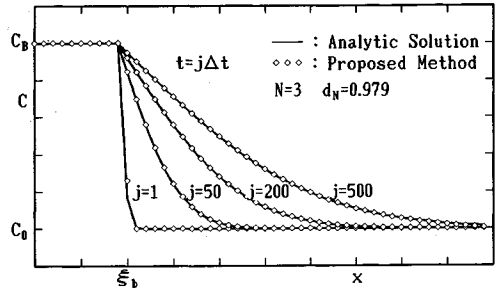


図-15 固定値境界の計算例

```

120 DT=1 :DX=1          *STEPの(SEC) 計算時間(M/M/SEC)
130 DELX=D(N)*SQR(4*DT*DX) *計算メッシュ長
140 XDIV=100          *1メッシュにXDIVを分割して計算
150 XDIV=XDIV-(XDIV MOD P) *Pは分割メッシュの整数
160 FDIV=XDIV/P      *分割したメッシュの長さ
170 DDX =D(N)/XDIV   *分割メッシュの長さ
180 X11 =DELX/2 :X12 =DELX/2 :DX11=-XDIV/2 :DX12=XDIV/2
190 DX11=-XDIV/2 :DX12=XDIV/2 :XMAX=(N/2+NOVR)*XDIV :XMIN=-XMAX
200 XMAX=(N/2+NOVR)*XDIV :XMIN=-XMAX
210 FOR I=0 TO P :FOR J=0 TO N :ENP(J,I)=0 :NEXT J :NEXT I
220 FOR IX=XMIN+5 TO XMAX-5
230 EX1=(IX-DX11)*DDX :EX2=(IX-DX12)*DDX :DER=FNERP(EX1)-FNERP(EX2)
240 FOR JF=0 TO P-1
250 IN=INT((IX-DX11+JF*FDIV)/XDIV)
260 IF IN<-(N-1)*Y2 THEN IN=-(N-1)*Y2
270 IF IN>N*Y2 THEN IN=N*Y2
280 ENP(IN+(N-1)*Y2,JF)=ENP(IN+(N-1)*Y2,JF)+DER/XDIV
290 NEXT JF
300 NEXT IX
310 ***** DATA OUTPUT *****
320 PRINT "INPUT DATA M, d, P=" :N,D(N),P
330 FOR JF=0 TO P-1 :FOR IN=0 TO N
340 IF IN<N THEN ENP(N,JF)=ENP(N,JF)+ENP(IN,JF)
350 PRINT USING"###.#####":ENP(IN,JF) :INFLUENCE-COEFFICIENTS
360 NEXT IN :PRINT :NEXT JF :STOP :END
    
```

今後の研究としては非一様流場、拡散係数の非一様場、セル幅の制限緩和などへの展開が重要であると考え、最後に本論文の作成にあたり有益な助言と討議を頂いた(株)四電技術コンサルタント古川修三氏に感謝致します。

[補遺] 影響係数を求めるプログラム例

```

10 sample program to obtain the influence-coefficients ==> N88BASIC
20 DEFDEL A-H, O-Z :CLS 3 :DIM D(9), ENP(10,10)
30 DEF FNERFC(X)=.5*(1#+.0705230784#*X+.0422820123#*X*X+.0092705272#*X^3
+.0001520143#*X^4+.0002765672#*X^5+.0000430638#*X^6)^.16
40 DEF FNERP(X)=.5+SGN(X)*(1.5-FNERFC(ABS(X))) :J=INT(X/1) :I=INT(J/2)
50 D(3)=.979# :D(5)=.634# :D(7)=.477# :D(9)=.387# *計算メッシュの長さ d
60 D(4)=.775# :D(6)=.55# :D(8)=.42# *計算メッシュの長さ d
70 NOVR=6 *計算メッシュの長さ (N/2+NOVR)
80 ***** DATA INPUT *****
90 INPUT "N=", N :INPUT "d= (0 から 1 までの値)": DD :IF DD>0 THEN D(N)=DD
100 INPUT "P= (0 から 10 までの値)": P :IF N MOD 2=1 OR P=0 THEN P=1
110 ***** INTEGRATION *****
    
```

参考文献

- 1) 寺沢寛一編：数学概論，応用編，pp.128～132，岩波書店。
- 2) 小林紘士・和田明・角湯正剛：流体数値実験，朝倉書店，1989。
- 3) 棚橋隆彦：数値流体力学，pp.191～248，アイビーシー。
- 4) LEON, L. F. and AUSTRIA P. M. : Stability Criterion for Explicit Schemes (finite-difference Method) on the Solution of the Advection-Diffusion Equation, Water Technology, Merelos, Mex.
- 5) Hans, J. V. Peter J. and Lars E. : Advection-dipersion modelling in three dimensions, Appl. Math. Modelling, Vol.16, October, 1992.

(1992. 11. 12 受付)

AN ITERATION METHOD APPLYING ANALYTICAL SOLUTION OF THE DIFFUSION EQUATION

Akiomi TADA

An analytical solution of diffusion equation is obtained under arbitrary initial condition on non-steady uniform flow field. It is calculated that concentration in a cubic cell diffuses into surrounding N cells by the rates of influence coefficients. These coefficients are determined by the analytical solution and to satisfy the mass conservation law in surrounding N cells. The presented method is explicit and absolutely stable, and is able to make highly accurate calculations for the diffusion number greater than 0.5 and the Courant number even larger than 1.