

モールド内に拘束された円柱弾性体の3次元応力解析

秋葉正一*・能町純雄**・木田哲量***・
栗谷川裕造****

本論文では、まず、モールド内に拘束された軸対称円柱弾性体の3次元応力問題について、有限 Fourier-Hankel 変換による一般解法を示した。この一般解を用い円柱弾性体の表面に等分布荷重や剛スタンプ圧が作用する場合について、側方境界面に関する3種類の境界条件を設定し、数値計算例で円柱弾性体の表面たわみや応力分布を調べた。このような解析結果は舗装の理論構造設計に必要な材料定数を載荷試験で求めることや試験結果の現象分析に有効と考えられる。

Key Words : finite fourier-hankel transforms, cylindrical elastic body, three-dimensional stress problems, surface displacement, loading test

1. はじめに

近年、舗装には経済性や機能性を考慮した新材料や新工法、あるいは環境問題に対する対応策としてリサイクル材や産業廃棄物の利用が多くなっており、現在の構造設計は今までの設計法に加え多層弾性理論を用いた設計法の適用が考慮されている¹⁾。構造理論を適用した設計法を用いることは構造設計はもちろんのこと、舗装の破壊現象の原因分析や構造評価などに利用可能であり、したがって舗装の設計、施工、維持、管理などを総合的に管理する PMS²⁾において重要な役割を持つことになる。

多層弾性論を用いる場合、入力条件の1つである材料条件(弾性係数、ポアソン比)の決定あるいは推定については、FWD 試験結果を用いた逆解析による方法が主流であり笠原らや松井らによる研究など³⁾⁻⁵⁾がある。また多くの実験による決定方法や実験値を利用した推定方法がある⁶⁾が十分に確立されていない現状である。

現在の設計において使用材料の強度決定はマーシャル安定度試験、一軸圧縮強度試験、CBR 試験を用いるのが一般的である。この内、路盤材料や路床土は一軸圧縮強度試験、CBR 試験による試験結果を用い路盤材料や路床土の弾性係数を推定する方法として、古くは Heukelom らや植下による CBR 値と弾性係数の相関式を用いる方法がある^{7),8)}。またこれらの試験結果と FWD 試験によるデータを収集して逆解析結果の相関を調べる方法があるがいずれも間接的なものである。松井らによれば路床において強固な層がある場合、逆解析によって得られる舗装各層の弾性係数はこの層に影響さ

れるという解析結果もあり⁹⁾、このような方法を用いて材料定数を推定する方法は経験的要素の強いものとなる。

したがって室内試験結果を利用して弾性係数を推定する場合には理論的根拠に基づいた材料定数の決定を行うことが望ましく、既存の試験設備等を利用した合理的で簡便な材料定数決定法があれば実用的であると考えられる。そこでこのような材料定数決定を行う方法として、本研究では円筒モールド内に拘束された供試体を用いた載荷試験に着目した。これは、通常の載荷試験で予想される供試体の挙動を考慮した問題が解析されれば、舗装の理論構造設計を行う場合に材料定数決定のための1手段として有効と考えたためである。

本研究で用いた円柱弾性体の解析方法は、有限積分変換である有限 Fourier-Hankel 変換⁹⁾によるもので、過去には松岡らがこの方法を用い円筒問題に関する一般解法を示している¹⁰⁾⁻¹³⁾。このような解法は、3次元弾性体の境界値問題に関する一般解を与えるもので、円柱弾性体内部の応力および変位状態を把握するのに有効である。

本論文では、まず軸対称円柱弾性体の有限 Fourier-Hankel 変換を用いた解析方法を示し、載荷試験時に予想される供試体の挙動として、載荷形態の違いやモールド壁面と供試体との間に生じる摩擦力の違いに対する境界条件を考え、弾性解析による材料定数を求めるために必要な鉛直変位係数の違いを数値計算例によって調べた。

なお、本解析手法は静的な載荷を対象としたものであり、特に供試体サイズ等に限定したものでなく、例えば室内 CBR 試験のような載荷にも応用可能と考えられるので、本論文では解析結果と CBR 値との関係についても検討を行った。

* 学生会員 工修 日本大学大学院生産工学研究科
(〒275 習志野市泉町 1-2-1)

** 正会員 工博 日本大学教授 生産工学部

*** 正会員 工博 日本大学教授 生産工学部

**** 正会員 日本大学専任講師 生産工学部

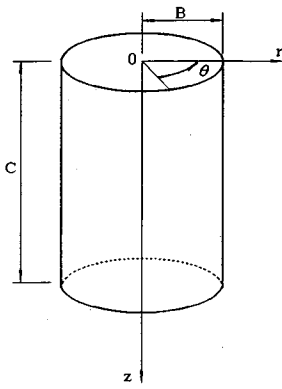


Fig.1 Cylindrical Co-ordinates

2. 有限 Fourier-Hankel 変換を用いた解析方法

(1) 円柱弾性体の応力および変位に関する一般解

Fig.1 に示す円柱座標において、弾性問題におけるつり合い方程式は次式の通りである。σ_r, σ_θ, σ_z はそれぞれ r, θ, z 方向の垂直応力, τ_{rθ}, τ_{θz}, τ_{rz} はせん断応力, また K_r, K_θ, K_z は物体力を表す。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = K_r \dots (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = K_\theta \dots (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = K_z \dots (3)$$

本論文で取り扱う問題は軸対称問題であり、応力分布は角 θ について無視できるので、r 方向および z 方向の変位成分をそれぞれ u, w とすると、弾性問題における Hooke の法則は次式で表される。なお μ, λ は Lamé の弾性係数である。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_\theta &= \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (2\mu + \lambda) \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_z &= \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

いま積分変換の核となる関数は次式のようにおく。

$$L_1 = R_1 \cdot \cos Nz$$

$$L_2 = R_0 \cdot \sin Nz$$

ここで、N = nπ/C, n = 1, 2, 3, ... である。これをそれぞれ式 (1), (3) の両辺に掛け式 (4) を考慮し積分変換を r に対して 0 から B まで、z に対して 0 から C までの範囲で行う。また、R₁, R₀ を核として Fourier 展開を行う。

つぎに R₁ = rJ₁(ξ_ir), R₀ = rJ₀(ξ_ir) において、得られた結果について Fourier-Hankel 変換を行う。なお J₀,

J₁ はそれぞれ第 1 種 0 次, 第 1 種 1 次の Bessel 関数で、ξ_iB は J₁(x) の i 番目の 0 点で、ξ_i はパラメータである。この結果は物体力を無視すると、つぎのように整理される。

$$\begin{aligned} &(-1)^n J_1((\tau_{rz})_{z=c}) - J_1((\tau_{rz})_{z=0}) \\ &- (2\mu + \lambda) \xi_i J_0(\xi_i B) \cdot C_n(u_{r=B}) \\ &- \lambda \xi_i \{ (-1)^n J_0(w_{z=c}) - J_0(w_{z=0}) \} \\ &= \{ (2\mu + \lambda) \xi_i^2 + \mu N^2 \} J_1 C_n(u) \\ &\quad + (\mu + \lambda) N \xi_i J_0 S_n(w) \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &J_0(\xi_i B) \cdot S_n((\tau_{rz})_{r=B}) - \lambda N J_0(\xi_i B) \cdot C_n(u_{r=B}) \\ &- (2\mu + \lambda) N \{ (-1)^n J_0(w_{z=c}) - J_0(w_{z=0}) \} \\ &= (\mu + \lambda) N \xi_i J_1 C_n(u) \\ &\quad + \{ u \xi_i + (2\mu + \lambda) N^2 \} J_0 S_n(w) \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

ここで、右辺の J₁C_n(u), J₀S_n(w) はそれぞれ変位成分 u, w に関する Fourier-Hankel 変換値である。変位成分 u, w はこの変換値を逆変換することで次式の通りとなる。

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{CB^2} \frac{J_1(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)^2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^C J_1(u) dz \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \cdot J_1 C_n(u) \right\} \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{CB^2} \sin Nz \cdot \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)^2} J_0 S_n(w) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{CB^2} \sin Nz \int_0^B S_n(w) r \cdot dr \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

式 (7), (8) は変位成分 u, w の一般式である。なおこの変位成分は高さ中央において u は正対称で、w は逆対称となることから、円柱弾性体の高さは鏡像を考えた 2C となる。つぎに式 (5) および (6) において左辺の積分変換値を次のようにおいて、J₁C_n(u), J₀S_n(w) について解く。

$$\begin{aligned} C_n(u_{r=B}) &= A_n \cdot BC, \quad S_n((\tau_{rz})) = NB_n \cdot BC \\ J_0(w_{z=c}) &= (D_i + D'_i) B^2 / 2 \\ J_0(w_{z=0}) &= (D_i - D'_i) B^2 / 2 \\ J_1((\tau_{rz})_{z=c}) &= (E_i + E'_i) \xi_i B^2 / 2 \\ J_1((\tau_{rz})_{z=0}) &= (E_i - E'_i) \xi_i B^2 / 2 \end{aligned}$$

ここで A_n, B_n, D_i, D'_i, E_i, E'_i は境界条件によって定まる境界未知数である。得られた結果は解の像関数を表すもので、これを式 (7), (8) に代入すると、結局変位成分は次のように整理される。

$$\begin{aligned} u &= A_0 \frac{r}{B} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \cdot \left[A_n \left\{ G(Nr) + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times F(Nr) \right\} - \frac{\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} B_n F(Nr) \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)^2} \left[D_i \left\{ \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (\phi(\xi_i z) \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\phi(\xi_i z) - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \phi(\xi_i z) \Big\} + D_i \left\{ \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \right. \\
 & \times (\phi'(\xi_i z) - \psi'(\xi_i z)) - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \phi'(\xi_i z) \Big\} \\
 & - E_i \left\{ \frac{\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} (\phi(\xi_i z) - \psi(\xi_i z)) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2\mu + \lambda} \phi(\xi_i z) \right\} - E_i \left\{ \frac{\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} \right. \\
 & \left. (\phi'(\xi_i z) - \psi'(\xi_i z)) + \frac{1}{2\mu + \lambda} \phi'(\xi_i z) \right\} \Big\} \dots\dots (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w = & \sum_{n=1}^{\infty} \sin Nz \left[-A_n \left\{ \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \chi(Nr) - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \right. \right. \\
 & \times (\chi(Nr) - \omega(Nr)) \Big\} + B_n \left\{ \frac{1}{2\mu + \lambda} \chi(Nr) \right. \\
 & \left. + \frac{\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} (\chi(Nr) - \omega(Nr)) \right\} \Big] \\
 & - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)^2} \left[D_i \left\{ Q(\xi_i z) + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \right. \right. \\
 & \times P(\xi_i z) \Big\} + D_i' \left\{ Q'(\xi_i z) + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \right. \\
 & \times P'(\xi_i z) \Big\} + \frac{\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} \left\{ E_i P(\xi_i z) \right. \\
 & \left. + E_i P'(\xi_i z) \right\} \Big] - \left\{ D_0 + D_0' \left(1 - \frac{z}{C} \right) \right\} \dots\dots (10)
 \end{aligned}$$

上式中,

$$\begin{aligned}
 G(Nr) = & - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{B} \frac{J_1(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)} \frac{\xi_i}{N^2 + \xi_i^2} \\
 F(Nr) = & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{B} \frac{J_1(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)} \frac{N^2 \xi_i}{(N^2 + \xi_i^2)^2} \\
 \chi(Nr) = & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{B} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)} \frac{N}{N^2 + \xi_i^2} - \frac{2}{BN} \\
 \chi(Nr) - \omega(Nr) = & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{B} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)} \frac{N \xi_i^2}{(N^2 + \xi_i^2)^2} \dots\dots (11)
 \end{aligned}$$

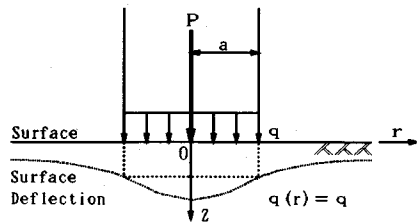
であり、 $\phi(\xi_i z)$, $\phi'(\xi_i z)$, $\psi(\xi_i z)$, $\psi'(\xi_i z)$, $Q(\xi_i z)$, $Q'(\xi_i z)$, $P(\xi_i z)$, $P'(\xi_i z)$ は Fourier 級数の無限和で次のように表せる。

$$\begin{aligned}
 \phi(\xi_i z) & \Big\} = \frac{sh \xi_i (2C - z) \mp sh \xi_i z}{ch 2 \xi_i C \pm 1} \\
 \phi'(\xi_i z) & \Big\} = \frac{\xi_i \{ z ch \xi_i (2C - z) \mp (2C - z) ch \xi_i z \}}{ch 2 \xi_i C \pm 1} \\
 Q(\xi_i z) & \Big\} = \frac{ch \xi_i (2C - z) \pm ch \xi_i z}{ch 2 \xi_i C \pm 1} \\
 Q'(\xi_i z) & \Big\} = \frac{\xi_i \{ z sh \xi_i (2C - z) \pm (2C - z) sh \xi_i z \}}{ch 2 \xi_i C \pm 1} \dots\dots (12)
 \end{aligned}$$

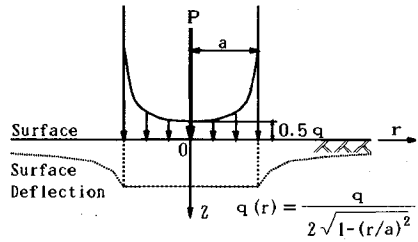
なお、 $shx = \sinh x$, $chx = \cosh x$ である。また、応力成分は式 (9) および (10) を式 (4) に代入することによって得られる。

(2) 境界条件

r 方向と z 方向に拘束された円柱弾性体の表面に作用する荷重は Fig.2 に示す円形の等分布荷重と剛スタンプ



(a) Uniform Load



(b) Rigid Load

Fig.2 Load intensity distribution and surface deflection form

圧の2種類とした。なお剛スタンプ圧はこの荷重が半無限体表面に作用すると載荷面直下の鉛直変位が一樣となるもの⁹⁾である。この荷重が作用した場合の表面の荷重強度分布は Fourier-Bessel 展開により¹¹⁾,

$$q(r) = q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} q_i J_0(\xi_i r) \dots\dots (13)$$

で表される。ここで q_0 は

$$q_0 = \frac{a^2}{B^2} q \dots\dots (14)$$

で、 q_i は等分布荷重の場合

$$q_i = \frac{2aqI_1(\xi_i a)}{B^2 \xi_i J_0(\xi_i B)^2} \dots\dots (15)$$

剛スタンプ圧の場合

$$q_i = \frac{aq \sin(\xi_i a)}{B^2 \xi_i J_0(\xi_i B)^2} \dots\dots (16)$$

で表される。

このような荷重条件のもとで、拘束面での境界条件を次のように設定した。

(a) 側方境界面で鉛直変位が自由である。

$$r = B \text{ で } w \neq 0, \tau_{rz} = 0 \dots\dots (17)$$

(b) 側方境界面で鉛直変位が完全に拘束されている。

$$r = B \text{ で } w = 0, \tau_{rz} \neq 0 \dots\dots (18)$$

(c) 側方境界面で変位 w に比例する摩擦抵抗が発生する。

$$r = B \text{ で } k \times w = \tau_{rz} \dots\dots (19)$$

ここで、 k は単位長さ当たりの力の次元を持つ、一種のパネ定数であり、本論において拘束係数と称する。

なお (a), (b), (c) に共通する条件は

$$z=0 \text{ で } \sigma_z=q(r), \tau_{rz}=0 \dots\dots\dots(20)$$

$$z=C \text{ で } w=0, \tau_{rz}=0 \dots\dots\dots(21)$$

$$r=B \text{ で } u=0 \dots\dots\dots(22)$$

である。ここで (b), (c) の境界条件を設定した理由は型枠内に粒状材や粘性材料を締固め、型枠内に拘束された状態で載荷試験を行う場合、特に側方境界面で摩擦抵抗が発生すると考えたためである。

境界条件を考慮すると定数は (a) の場合、 D_i のみで、これは i 個の一次方程式を解くことで得られ、(b) および (c) は B_n と D_i の両方で、これは $(i+n)$ 行 $(i+n)$ 列のマトリックスを解くことで得られる。応力および変位はこれらの定数を応力および変位式に代入することによって得られる。なお前述の境界条件に共通する応力成分は次式で表せる。

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \cdot NB_n \left\{ \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \left(\omega(Nr) - \chi(Nr) \right) \right. \\ & \left. - \frac{F(Nr)}{Nr} + \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \chi(Nr) \right\} - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \frac{J_1(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)^2} \\ & \times D_i' \left\{ \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} (\phi'(\xi_i z) - \psi'(\xi_i z)) \right. \\ & \left. - \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda} \phi'(\xi_i z) \right\} - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)^2} \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda} \\ & \times D_i' \phi'(\xi_i z) - \frac{\lambda}{C} D_0' \\ \sigma_\theta = & - \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \cdot B_n \left\{ \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \frac{F(Nr)}{r} + \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} N \right. \\ & \left. \times \chi(Nr) \right\} - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \frac{J_1(\xi_i r)}{r J_0(\xi_i B)^2} D_i' \left\{ \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \right. \\ & \left. \times (\phi'(\xi_i z) - \psi'(\xi_i z)) - \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda} \phi'(\xi_i z) \right\} \\ & - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)^2} D_i' \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda} \phi'(\xi_i z) - \frac{\lambda}{C} D_0' \\ \sigma_z = & \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \cdot NB_n \left\{ \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (\chi(Nr) - \omega(Nr)) \right. \\ & \left. + \chi(Nr) \right\} - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)^2} D_i' \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \\ & \times (\phi'(\xi_i z) + \psi'(\xi_i z)) - \frac{2\mu+\lambda}{C} D_0' \\ \tau_{rz} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sin Nz \cdot NB_n \left\{ G(Nr) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} F(Nr) \right\} \\ & - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \frac{J_1(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)^2} D_i' \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} P'(\xi_i z) \dots\dots(23) \end{aligned}$$

3. 数値計算

近年舗装の構造解析や逆解析がすでにパソコンレベルで運用されており¹⁵⁾、また今後の舗装の構造解析がこのような実用化レベルまで上げる必要があると言われて¹⁶⁾ことから、数値計算は本解析においてもパソコン(数

Table 1 Precision of numerical computation

ν	r/a	Boundary Condition (a)		Boundary Condition (b)	
		$B/a=3$	$B/a=5$	$B/a=3$	$B/a=5$
0.30	2	0.003	0.004	0.016	0.002
	3	0.027	0.015	1.881	0.011
	4		0.052		0.117
	5		0.094		0.678
	5	0.003	0.004	0.077	0.056
0.45	2	0.003	0.004	0.077	0.056
	3	0.027	0.015	1.622	0.135
	4		0.052		0.345
	5		0.094		2.318
	5	0.003	0.004	0.077	0.056

* unit:%, $C/a=5.0$

値演算コプロセッサ内蔵)を使用して行った。なお計算プログラムは Turbo Pascal を用いて作成した。この場合マトリックス計算において要素数に限りがあることから、側方境界面にせん断応力が生じない場合が、 D_i 項を250項とし、せん断応力が生じる場合が、 B_n 、 D_i 項ともに120項とした。このような計算における計算精度は Table 1 に示す。計算結果は任意の断面における分散荷重の総和と外力 P の差を外力 P に対する割合で示したもので、分散荷重の総和とは

$$P = 2\pi \int \sigma_z \cdot r \cdot dr + 2\pi B \int \tau_{rz} \cdot dz \dots\dots\dots(24)$$

である。

この結果より、境界条件 (a) の場合はすべての面において非常に誤差が小さく、ほぼ100%収束している。また境界条件 (b) では側方境界面において他の面より2%前後の誤差の生じる結果であるが、この程度の項数でも収束性が良好であると言える。なお応力成分については級数和が周期的な変動を示すことから、1周期毎の級数和の平均値を解とみなしたが、変位成分に関しては級数和があまり大きな周期的な変動をせず、一定値に収束する。この場合、変位成分に関しては境界条件 (b) で小数第5位にわずかに誤差の度であった。

数値計算は基本的に側方境界面の鉛直変位が自由な場合とそうでない場合を中心に、多層弾性構造解析プログラム (ELSA)¹⁵⁾ による計算結果や半無限体のものと比較しながら応力および表面たわみに影響を与える要因について考察を行った。なお、ELSA による計算結果は $B/a=\infty$ で底面が剛体 ($\nu=0.25$, $E=2.1 \times 10^6$ kgf/cm²) として得たものである。基本的に側方境界面の鉛直変位が自由な場合の解析結果は、渡辺¹⁴⁾によって解析されたものと同様と予想される。

(1) 円柱弾性体表面に等分布荷重が作用する場合

Fig.3 (a)~(c) は、 $B/a=3$, $C/a=5$, $\nu=0.3$, $E=100$ kgf/cm² の円柱弾性体が等分布荷重を受けた場合に生じる σ_z , σ_r , τ_{rz} と平均荷重強度の比、すなわち相対応力 (%) のコンターを示したものである。ただしこれらは境界条件が側方境界面で鉛直変位が自由の場合のものである。また、コンターは σ_θ のものもあるが、これは σ_r と似たようなものであったのでここでは省略す

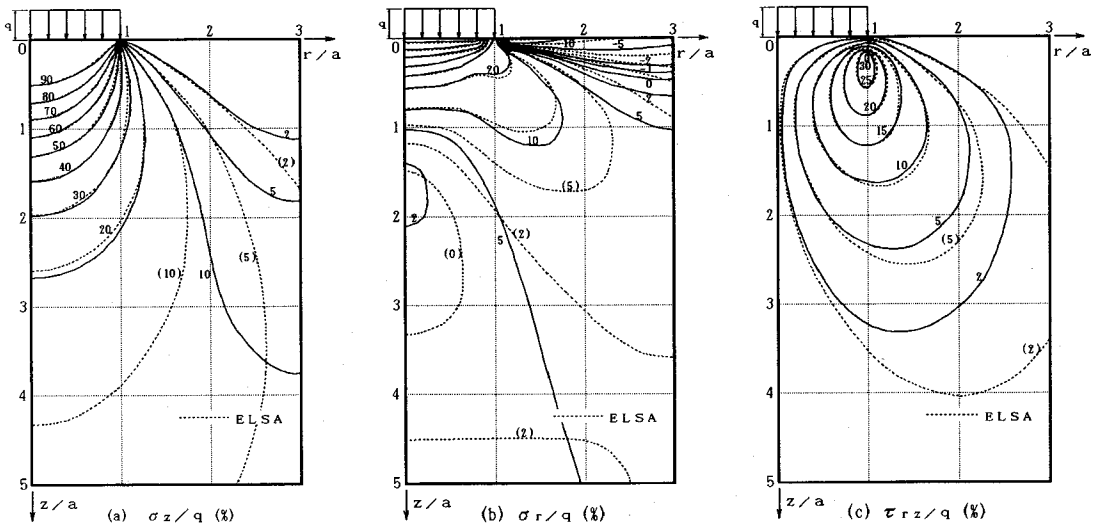


Fig.3 Contours of stresses in cylindrical elastic body (Uniform Load, $C/a=5$, $B/a=3$, $\nu=0.3$)

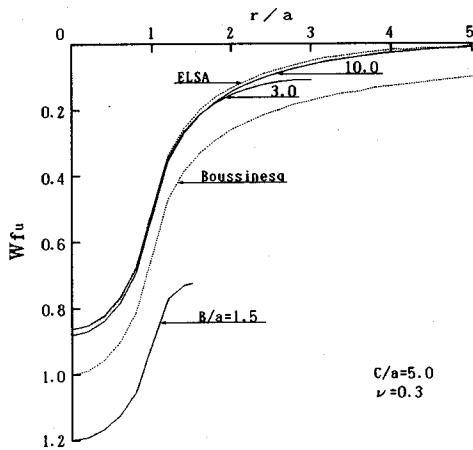


Fig.4 Coefficient of vertical displacement (Boundary condition (a))

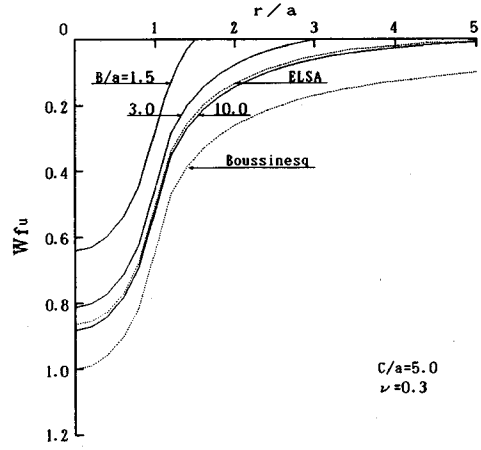


Fig.5 Coefficient of vertical displacement (Boundary condition (b))

る。コンターは416個の等間隔の格子点と境界面付近での補足点での計算値より描いたもので、図中の破線はELSAによる計算結果である。これらの結果より、相対応力の比較的大きな部分では境界での拘束面の影響を認めにくい、 σ_z は約10%以下、 σ_r は約5%以下、 τ_{rz} は約2%以下の応力が拘束面の影響を受ける。

Fig.4およびFig.5は円柱弾性体の高さを一定とし、側方境界面の位置が変化した場合の鉛直変位係数 Wf_u と r/a の関係である。なお鉛直変位係数は次式¹⁷⁾で表され、 W_u は円柱弾性体が等分布荷重を受けた場合の表面変位である。

$$Wf_u = \frac{W_u}{2(1-\nu^2)aq/E} \dots \dots \dots (25)$$

図中には $B/a = \infty$ で底面が剛体とした場合のELSAによる解析結果も示した。Fig.4は側方境界面の鉛直変位

が自由な場合で、この例から $B/a=3$ において $r=a$ までの鉛直変位係数はELSAで解析されたものにはほぼ等しい結果となっている。また同一の r/a で B/a の小さいものほど鉛直変位係数は増加し $B/a=1.5$ では半無限体のものより鉛直変位係数の大きな値を示す。Fig.5は側方境界面の鉛直変位が完全に拘束された場合で、Fig.4で示した結果とは対照的な傾向を示し、同一の r/a で B/a の大きなものほど鉛直変位係数は増加する。

側方境界面における円柱弾性体の表面変位はこの面での拘束の程度に影響されるものであり、これを境界条件(c)で解析した結果をFig.6に示す。 k は変位を拘束する係数で、これを拘束係数とすると k が0 $\text{kg/cm}^2/\text{cm}$ に近づくほど拘束面における摩擦力がなく、 k が ∞ になると側方境界面における鉛直変位が0となり拘束面において最大の摩擦力が発生する結果とな

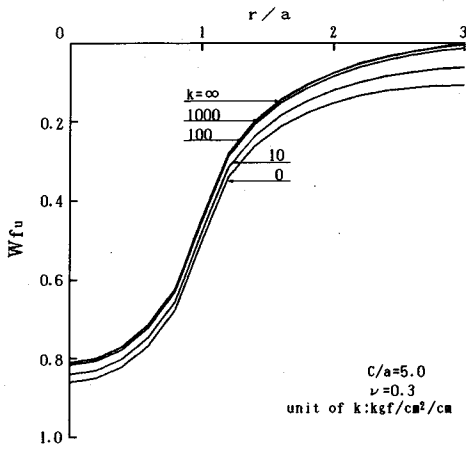


Fig.6 Coefficient of vertical displacement (Boundary condition (c))

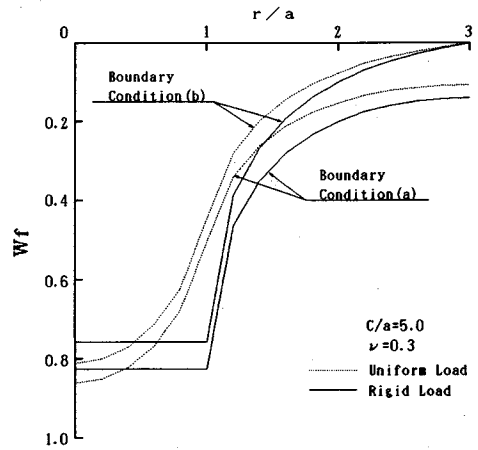


Fig.8 Coefficient of the vertical displacement (Variation of load intensity distribution)

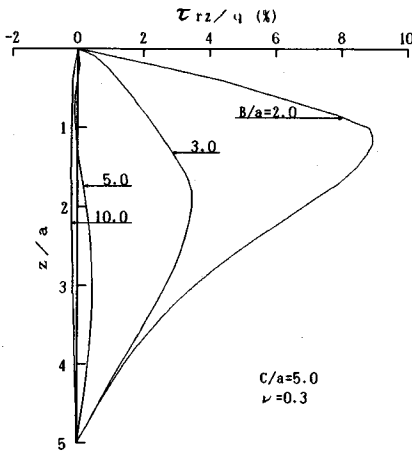


Fig.7 The shearing stress at the side wall (Uniform Load)

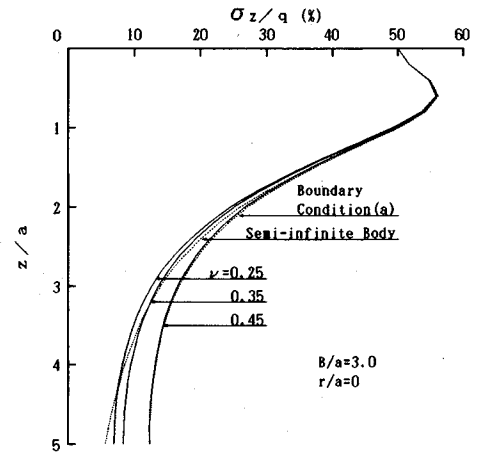


Fig.9 The vertical stress at the middle of loading face (Rigid load)

る。Fig.7は側方境界面における鉛直変位が完全に拘束された場合のこの面でのせん断応力を示したものである。側方境界面の位置が荷重載荷面位置から遠ざかるにつれて、せん断応力は減少し、 B/a が5程度になると境界面での摩擦力の影響はかなり減少する。 $B/a=10$ でせん断力が負となるが、これは側方境界面での鉛直変位が自由な場合で解析した時にこの面の鉛直変位が若干負となっていることに起因している。

なお $B=a$ の場合、 B_n 、 D_i は0で D_0 のみとなり、変位および応力は一様となる。この場合表面変位は次式で表され、これは別の方法で求められたものと一致する¹⁴⁾。

$$w = \frac{C}{2\mu + \lambda} q \dots \dots \dots (26)$$

(2) 円柱弾性体表面に剛スタンプ圧が作用する場合

Fig.8は剛スタンプ圧が作用する場合の鉛直変位係数 W/v の変化を調べたものである。なお、鉛直変位係数は次式で表され¹⁷⁾、 W_r は円柱弾性体が剛スタンプ圧を受

けた場合の表面変位である。

$$W/v_r = \frac{W_r}{\pi(1-\nu^2)aq/(2E)} \dots \dots \dots (27)$$

半無限体表面に剛スタンプ圧が作用すると、載荷面直下の表面変位は一様となるが、これが円柱弾性体表面に作用する場合の表面変位の形態は渡辺によって解析¹⁴⁾されているように、本解析結果においても B/a が極端に小さいものを除けば載荷面直下では一様で、等分布荷重が作用する場合とはその変形形態が異なる。また側方境界面の変位が拘束された場合の鉛直変位係数は変位が自由なものより低い結果となる。以上の結果より室内の載荷試験から弾性係数を推定しようとする場合には、載荷による変形形態あるいは側方境界面の摩擦の影響を十分に把握する必要があると思われる。

Fig.9は側方境界面の変位が拘束された場合の載荷面中心直下の鉛直応力の変化を示したものである。側方境界面の変位が拘束されているとポアソン比の違いによ

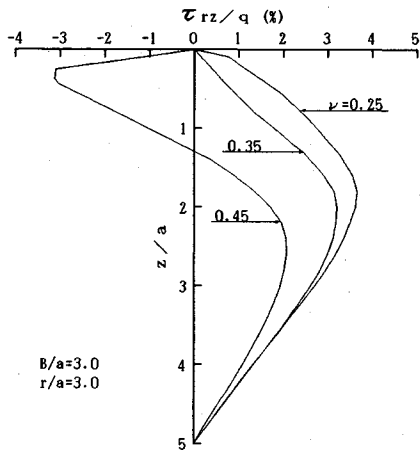


Fig.10 The shearing stress at the side wall (Rigid Load)

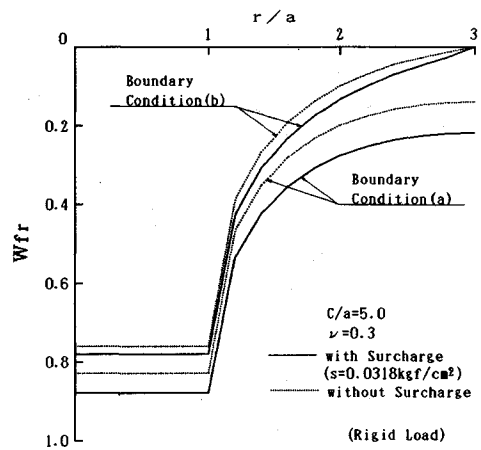


Fig.11 Coefficient of vertical displacement

り、 z 方向の鉛直応力の変化が異なる傾向を示す。なお図中には半無限体のもの⁹⁾や側方境界面の変位が自由な場合のものも示した。半無限体上に作用する剛スタンプ圧の載荷面中心直下の鉛直応力は次式で表され、これは E や ν の違いに影響されない。

$$\sigma_z/q = \frac{1+3(z/a)^3}{2(1+(z/a)^2)^2} \dots\dots\dots(28)$$

また、側方境界面の変位が自由な場合は式 (20) の第 1 式より、境界未知数 D'_i が $(2\mu+\lambda)/2\mu(\mu+\lambda)$ を含む値となり、この場合も鉛直応力は E や ν の違いに影響されない。つまり、基本的に両者の結果は弾性係数やポアソン比の違いによる変化を示さない。一方、側方境界面の変位が拘束されていると式 (18) の第 1 式および式 (20) の第 1 式による連立方程式から、 B_n および D'_i を求めようとすれば、 B_n は E に無関係で、 D'_i は $1/E$ を含む値となり、式 (23) の応力成分は弾性係数の違いには影響されない。ただし、この場合の B_n 、 D'_i はポアソン比の違いに影響される。したがって、図のような結果は側方境界面に摩擦力が働いている場合のポアソン比の違いによる円柱弾性体内部の荷重分散性の違いを示していると言える。

Fig.10 は側方境界面でのせん断応力をポアソン比を変化させて調べたものである。ポアソン比の違いにより z 方向の応力は大きく異なり、それぞれ特徴のある傾向を示す。特に $\nu=0.45$ の時深さの浅い部分で負のせん断応力が発生する。

(3) 載荷板周囲にサーチャージが作用する場合

円柱弾性体の表面の載荷板周囲にサーチャージが作用する場合の表面の荷重強度分布は、式 (13) の q_0 および q_1 に第 2 項として次式を加えることによって得られる。

$$q_0 = \frac{(a'^2 - a^2)s}{B^2} \dots\dots\dots(29)$$

$$q_1 = \frac{2s\{a'J_1(\xi_1 a') - aJ_1(\xi_1 a)\}}{B^2 \xi_1 J_0(\xi_1 B)^2} \dots\dots\dots(30)$$

ここで a' はサーチャージの外径であり、 s はサーチャージ圧である。このような載荷形態は室内 CBR 試験のような載荷形態と同様であり、その場合式 (29)、(30) は $a'=B$ となる。

室内 CBR 試験に関する研究はいくつか発表されており、CBR 値に影響を与える要因を実験的に究明し現場 CBR との関係を見出している^{19),20)}。この場合試料の種類や物理的性質を無視すると、室内 CBR 値に影響を与える要因としては、試験設備に関するもので、モールドの拘束面やサーチャージによるものが大きいとされている。以下ではこれらの要因が CBR 値に与える影響について現象分析を行う。

Fig.11 はサーチャージが作用する場合の鉛直変位係数の変化をサーチャージが作用しないものと比較したものである。なお、この場合のサーチャージ圧は、CBR 試験に用いられる荷重板 5 kgf に相当する。この結果よりサーチャージが作用した場合の鉛直変位係数は無載荷のものに比べ大きくなっている。両者の差はサーチャージのみによる表面変位を表しているものである。しかし、実際の CBR 試験ではサーチャージは貫入試験前に載荷されており、サーチャージのみによる変位は試験結果の貫入量に反映されていない。したがって、CBR 試験において与えられた荷重に対する貫入量は本解析では、サーチャージと荷重が作用したときの変位量からサーチャージのみが作用した場合の変位量を差し引いたもの、すなわち荷重のみの変位量に相当する。

CBR モールド内に締固められた供試体が弾性体と仮定すると、2.5 mm 貫入時の CBR 値 (CBR_i) と載荷面直下の鉛直変位係数の関係は、載荷形態が剛スタンプ圧として式 (27) を適用し、次式を得る。

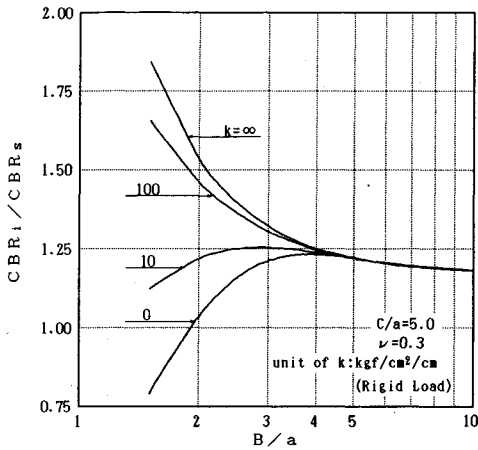


Fig.12 Relationship between the ratio of CBR_t to CBR_s , and B/a (Variation of k)

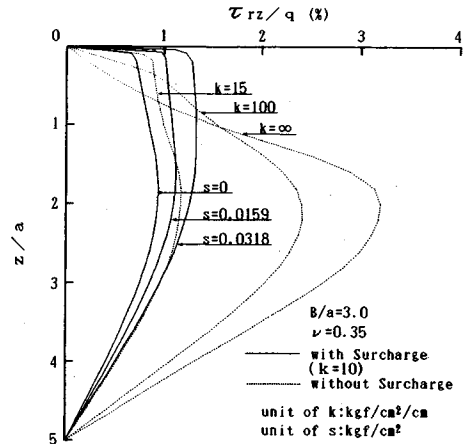


Fig.13 The shearing stress at the side wall

$$CBR_t(\%) = \frac{100}{70} \cdot \frac{0.5E}{\pi(1-\nu^2)aW_{fr}} \dots\dots\dots(31)$$

一方、上式と半無限体での CBR 値 (CBR_s) との比は、

$$\frac{CBR_t}{CBR_s} = \frac{1}{W_{fr}} \dots\dots\dots(32)$$

となる。Fig.12は上式を用い、 CBR_t/CBR_s と B/a の関係を拘束係数を変化させて調べた結果である。この結果は載荷板径を一定とした場合のモールド径の増加に対する CBR 値の変化を表している。側方境界面に摩擦力が働かない場合や拘束係数の小さい場合には B/a の増加に対し、ある B/a まで CBR の比は大きくなる傾向を示す。一方、拘束係数が増加すると B/a の増加に対し CBR の比は減少する傾向を示す。後者の傾向は過去に公表された実験結果²⁰⁾でも認められている。

Fig.13は側方境界面での拘束係数が $10 \text{ kgf/cm}^2/\text{cm}$ の場合に発生するせん断応力についてサーチャージ圧の影響を調べたものである。なお図中の破線はサーチャージ圧が無載荷の状態では拘束係数を変化させた場合のせん断応力の変化を示したものである。任意の深さにおいてサーチャージ圧が増すとせん断応力は増加する傾向を示す。一方拘束係数を増加させた場合のせん断応力も応力の増加傾向を示す。したがってサーチャージ圧の増加による側方境界面のせん断応力の増加傾向と拘束係数の増加によるせん断応力の増加傾向が近似していることから、サーチャージが作用することにより側方境界面における変位を拘束し、拘束係数を増加させるものと考えられる。

拘束係数の増加はFig.6に示されるように鉛直変位係数を減少させ、鉛直変位係数の減少は式(31)の CBR 値を増加させる結果となる。サーチャージ圧の作用による CBR 値の増加は公表された論文²⁰⁾でも示されており、このような現象は本解析結果からも説明可能である。

以上 CBR 値に影響を与えるモールドの拘束面とサーチャージについて現象分析を行ったが、過去に行われた実験結果にも示されているように室内 CBR 値と現場 CBR 値が大きく異なる試料では弾性的に同一とみなせず、本解析結果では説明が難しい。また式(31)を利用し CBR 値から材料定数を求める場合、現実問題としてサーチャージ圧も考慮に入れた側方境界面の拘束の程度を調べることが必要であり、問題も残る。この場合、Fig.12の結果にも示されるように、側方境界面の摩擦の影響の少ないモールド径を用いる等の検討を行う必要があると考えられる。

4. あとがき

本研究では円柱弾性体の3次元応力問題を取り扱う方法として、有限Fourier-Hankel変換による解法を示した。これによる一般解から円柱弾性体の表面の荷重が等分布荷重や剛スタンプ圧の場合について、側方境界面の境界条件を予想される挙動に合うように設定し解析した。以下にその結果を示す。

(1) 鉛直変位係数は側方境界面の変位が自由な場合、境界面の位置が荷重載荷面に近いものほど変位係数の大きな値を示し、側方境界面の変位が拘束されると変位が自由な場合と比較し対照的な傾向を示す。

(2) 鉛直変位係数は側方境界面の拘束の程度に影響され、本論文における拘束係数 k が ∞ になると側方境界面の変位が完全に拘束されたものと一致するようになる。

(3) 側方境界面の変位が拘束された場合、側方境界面においてせん断応力が発生するが、その大きさは拘束の程度による。また載荷面中央の鉛直応力はポアソン比の違いによりその大きさは異なり、それは円柱弾性体下面側で顕著に現れる。

(4) 本解析方法を用い、室内 CBR 値に影響を与えるモールドの拘束面とサーチャージについて現象分析を行うことができたが、現場 CBR 値と室内 CBR 値の大きく異なる試料については問題が残る。

なお、数値計算に要する計算時間は、側方境界面の変位が自由な場合には非常に短いものであったが、変位が拘束された場合にはマトリックス計算に時間を要し、その場合の所要時間は 10 分程度かかる。ただしこの場合、深さ方向に対し境界定数 B_n , D_i は一定であり、この境界定数を一度保存しておけば、深さ方向の値を算出する時間はマトリックス計算に要する時間がほとんどで、差ほど問題とはならないと考えている。

また室内の載荷試験を利用した具体的な材料定数の推定手法については紙面の都合上別の機会に公表したいと考えている。

最後に本研究を進めるに当たり、鳥取大学助教授 渡辺正平博士には多くの有益な助言を受けた。さらに北海道大学助教授 姫野賢治博士には心良く ELSA の提供をいただいた。ここに深く感謝申し上げる次第である。

参考文献

- 1) 日本道路協会：アスファルト舗装要綱，1992。
- 2) R. ハース・R. ハドソン（北海道土木技術会 舗装研究委員会 訳）：舗装マネジメントシステム，1989。
- 3) 笠原 篤・五十嵐光徳：舗装構造解析へのフォーリング・ウェイト・デフレクトメーターの利用，土木学会論文集，第 420 号/V-13，pp. 43~50，1990。
- 4) 松井邦人・井上武美・三瓶辰之：舗装各層の弾性係数を表面たわみから推定する一手法，土木学会論文集，第 420 号/V-13，pp. 107~114，1990。
- 5) 井上武美・三瓶辰之・松井邦人：舗装の逆解析において層弾性係数の推定に影響を及ぼす因子とその影響度の検討，土木学会論文集，No. 433/V-15，pp. 177~185，1991。
- 6) 笠原 篤・岡川秀幸・菅原照雄：アスファルト混合物の動的性状と舗装構造の力学解析への応用，土木学会論文報告集，第 254 号，pp. 107~117，1976。
- 7) Heukelom, W. and C.R. Foster : Dynamic Testing of Pavements, Transactions American Society of Civil Engineers, Vol.127, Part I, pp.425~457, 1967.
- 8) 植下 協：路床土の CBR 値と k 値の推定法について，土と基礎，No. 34，pp. 13~18，1959。
- 9) Sneddon, I.N. : Fourier Transforms, Chap.10, pp.455~468, McGraw-Hill, 1951.
- 10) Nomachi, S.G. : On one Method of Solving Stress Problem in Cylindrical Co-ordinates by Means of Finite Fourier Hankel Transforms (Part I), Memoris of Muroran Institute of Tech. Vol.3, No.3, pp.91~115, 1960.
- 11) Nomachi, S.G. : On one Method of Solving Stress Problem in Cylindrical Co-ordinates by Means of Finite Fourier Hankel Transforms (Part II), Memoris of Muroran Institute of Tech, Vol.3, No.4, pp.128~138. 1961.
- 12) 松岡健一・能町純雄：無限体中の円孔に部分分布荷重が作用するときの 3 次元応力解析，土木学会論文報告集，第 229 号，pp. 11~20，1974。
- 13) 松岡健一・能町純雄：層表面にせん断力を受ける多層弾性体の応力解析，土木学会論文報告集，第 241 号，pp. 1~11，1975。
- 14) 渡辺正平：有限領域に拘束された軸対象多層弾性体の解析，土木学会論文集，No. 433/Vol. 15，pp. 207~214，1991。
- 15) 姫野賢治：パソコンによる舗装の多層弾性構造解析，ASPHALT, No.161/Vol. 32, pp. 65~72, 1989.
- 16) 土木学会（舗装機能の評価技術に関する小委員会）：舗装機能の評価法，1992。
- 17) 植下 協：講座「舗装の力学」，舗装，Vol. 8, No. 1, pp. 35~37, 建設図書，1973。
- 18) S.P. ティモシェンコ・J.N. グーディア（荒川宗夫，坂口 昇，森 哲朗共訳）：弾性論（第 3 版），pp. 106~112，コロナ社，1980。
- 19) 須田 熙・佐藤勝久：砂の現場 CBR と室内 CBR の関係，土木学会論文報告集，第 208 号，pp. 53~63，1972。
- 20) 茨木龍雄：非粘性土の室内 CBR に関する実験的研究，土木学会論文報告集，第 320 号，pp. 113~122，1982。

(1993. 3. 8 受付)

THE THREE-DIMENTIONAL STRESS ANALYSIS OF CYLINDRICAL ELASTIC BODY CONFINED IN MOLD CYLINDER

Shoichi AKIBA, Sumio G. NOMACHI, Tetsukazu KIDA and Yuzou KURIYAGAWA

The paper firstly presents analytical method of the three dimensional stress problem regarding pavement material confined in such as CBR cylinder by means of the finite Fourier-Hankel transforms. Then, applying the above for the cases of the three different boundary conditions at the inner surface of mold, the stress distributions and the surface displacements were computed. The comparison of the computed values with the test results so far carried on assures that the above method is effective to determine the mechanical properties of pavement material.