

確率論に基づく逆解析手法の基礎研究

吉田郁政*・黒瀬浩公*・福井史朗*

静的な逆問題について最尤推定法により確率論的に解く逆解析手法を誘導した。その場合の目的関数をガウスニュートン法によって解く場合は、拡張カルマンフィルターを用いた逆解析に一致することを示した。確率論と確定論による逆解析の違いは目的関数の重みマトリックスの違いであることを明らかにし、逆解析の目的関数を観測データの量と質によって使い分けることを提案した。また、拡張カルマンフィルターを繰り返し適用する方法である、EK-WGI法の意味についても明らかにしている。

Key Words : probabilistic back analysis, Extended Kalman Filter, Gauss-Newton method, maximum likelihood estimation, EK-WGI

1. はじめに

近年、施工中や施工後の構造物や地盤の挙動について、様々な計測がされるようになってきており、その計測データの有効な活用法として、逆解析と呼ばれる分野が注目を浴びている。特に、地盤については事前にその特性を的確に把握することが困難であることから、施工中の地盤や構造物の挙動の計測データは有益である。その計測データから逆解析を行って地盤や構造物の特性を把握し、次ステップの施工を管理する情報化施工や、施工中や施工後の計測データから逆解析を行い設計に用いたモデルの妥当性の確認を行うなど、有益な活用法が考えられる。このような地盤工学における計測データの活用法に関しては既に成書¹⁾もあり、様々な場面での計測データの活用法が紹介されている。

逆解析(逆問題)は、地球物理学や航空工学、資源探査などさまざまな分野で議論されており、逆解析の一般的かつ厳密な定義²⁾はあまり簡単ではない。そこでここでは、あまり一般的ではないが対象を限定して「地盤や構造物の計測データから、そのモデルの物性値や外力を推定する問題」とする。Gioda³⁾は、地盤工学における静的な問題の逆解析一般について、数値計算例も含めて詳細に論じている。そのなかで、逆解析は確率論による方法と確定論による方法に分けることができ、後者はさらに逆定式化(inverse)と直接定式化(direct)に分類できるとしている。逆定式化法は、通常解析とは正反対に未知量と既知量を入れ換えて、変位などの計測データを既知量、モデルの物性値や外力などを未知量として定式化を行う方法である。一方、直接法は通常定式化のまま、共役勾配法やニュートン法などの最適化理論を用いて、計測データと解析値の差を最小にするように、取

束計算によって解を求める方法である。地盤工学における静的な逆解析について既往の研究を概観すると、逆定式化を用いた研究として、桜井ら^{4)~6)}の一連の研究が、直接法を用いた研究として、荒井ら⁷⁾、小嶋ら⁸⁾の研究が挙げられる。また、武久⁹⁾は両者を合わせた方法でトンネルの逆解析を行っている。一方、確率論による研究としては、カルマンフィルターを用いた逆解析を斉藤ら¹⁰⁾、門田ら¹¹⁾、村上ら¹²⁾、鈴木ら¹³⁾、須藤ら¹⁴⁾によって数多く行われている。このように、多くの研究者によって様々な逆解析に関する研究がされ、既に多くの成果が挙げられている。

しかし、確定論による逆解析と確率論による逆解析の本質的な違いやカルマンフィルターを用いた逆解析の意味についてはあまり議論されていない。荒井ら^{15),16)}は確率論と確定論による逆解析の比較を行っているが、安定性と収束性に関する比較であり、解の意味の違いについての議論は行われていない。当報告では、確率論に基づく逆解析は最尤推定により解釈できると考え、確定論および確率論の逆解析の違いについて明らかにし、観測量の量と質による逆解析の目的関数の使い分けを論じる。

2. 線形最小二乗法

最初は線形最小二乗法、すなわち観測量を表す式が推定したいパラメタに関して線形である場合の簡単な例題について考える。次の3つの線形の観測条件式が与えられたとする。

$$x_1 + x_2 = 3 \dots \dots \dots (1)$$

$$2x_1 + x_2 = 4 \dots \dots \dots (2)$$

$$x_1 + 2x_2 = 4 \dots \dots \dots (3)$$

これを書き直し、次のように表現する(z を観測量、 x を状態量とよぶ)。

$$z = Hx$$

*正会員 東電設計(株) 技術開発本部耐震技術部
(〒110 東京都台東区東上野3丁目3番地3号)

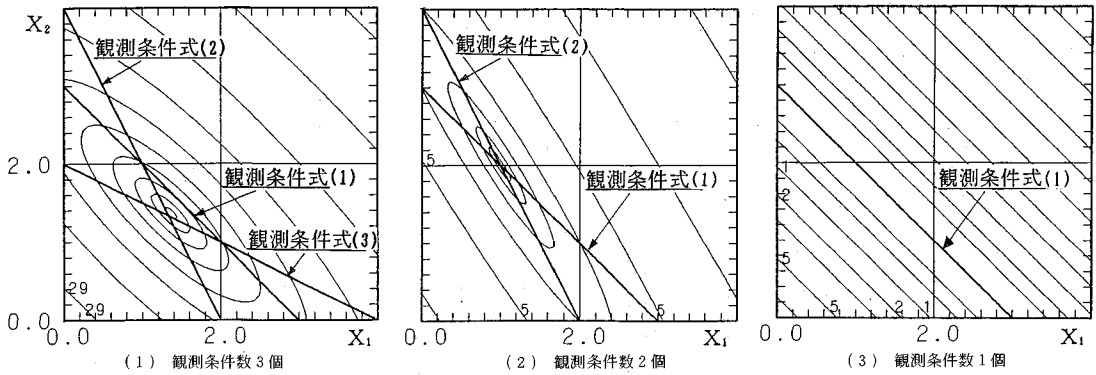


図-1 観測条件が線形の場合の目的関数 J_1 事前情報なしの場合

ここで、 $z^T = \{3, 4, 4\}$, $x^T = \{x_1, x_2\}$ (4)

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

独立な観測条件式は3つ、未知数は2つなので全ての観測条件式を満たす解は存在しない。そこで、次の目的関数(評価関数)を最小にするように x を定める。 W は重みマトリックスであり、各観測量の重要度や信頼性に従って相対的な重みを与えるために用いる。

$$J_1 = \frac{1}{2}(z - Hx)^T W (z - Hx) \dots \dots \dots (5)$$

J_1 を最小とする x を最適な推定値 \hat{x} と考えると \hat{x} は次の関係を満たす。

$$\frac{dJ_1}{dx} = -H^T W z + H^T W H \hat{x} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

したがって、 \hat{x} は次式により求まる。

$$\hat{x} = (H^T W H)^{-1} H^T W z \dots \dots \dots (7)$$

これは、重み付き最小二乗法の式として知られている。

目的関数 J_1 のコンターと観測条件式(1),(2),(3)を図-1(1)に示す。重み W は単位行列とした。式(7)はこのコンターの最小点を与えている。次に観測量が2つ、 $z^T = \{3, 4\}$ のみ与えられている場合、すなわち観測条件式が(1)と(2)だけの場合を考え、その時のコンターを図-1(2)に示す。2つの観測条件式の交点が、目的関数 J の最小点となる。すなわち、連立方程式(1),(2)を解いているにすぎない。実際、式(7)においても W が単位行列、 H が 2×2 の正則な行列であることに注意すると

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (H^T W H)^{-1} H^T W z \\ &= H^{-1} W^{-1} (H^T)^{-1} H^T W z = H^{-1} z \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

となり、連立方程式を解いていることがわかる。そして、この場合式(5),(8)より $J_1 = 0$ となる。さらに、観測条件式を(1)だけにした場合のコンターを図-1(3)に示す。当然のことながら、目的関数を最小にする点は唯一に存在しない。観測条件式を表す線上では任意の点

で目的関数が0であり、観測条件式を満たす解が無数にあることになる。式(7)についても逆行列を解くことができなくなる。

地盤の沈下量や変位量など限られた観測データから、FEM解析等に用いる地盤物性を逆解析によって求めようとする場合、未知数が独立な観測数の数を上回り唯一に定められなくなる場合がある。その場合未知数を減らす、あるいは観測条件数を増やす等の解決策が必要である。例えば図-1(3)の例では、 x_1, x_2 のどちらかが既知であるとするとか、 $x_1 = x_2$ と仮定するなどの条件を与えることにより解を唯一に定めることができる。

ここでは、上記のように観測条件数が不足している場合の解決策として観測条件式が与えられる以前の状態量 x (n 次)に対して統計的性質(事前情報あるいは先験情報)が与えられている場合の最適推定値 \hat{x} を求める方法を考える。観測量が与えられる以前の状態量 x (n 次)の統計的性質、平均 \bar{x} 、共分散マトリックス M が既知であるとする。これらが事前情報となる。

$$E[(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T] = M \dots \dots \dots (9)$$

さらに、次の観測条件式 z (m 次)が与えられたとする。

$$z = Hx + v \dots \dots \dots (10)$$

ここで、 H : ($m \times n$) の既知行列

v : 誤差ベクトル

$$E[v] = 0, E[vv^T] = R$$

ここで、 x と v は無相関で、それぞれガウス分布に従うと仮定する。

この時の最も合理的な推定値は、条件付確率 $P(x/z)$ を最大にする最尤推定値 \hat{x} と考える。すなわち、与えられた観測量 z に対し、最もありそうな (maximum likelihood) x を推定することになる¹⁷⁾。この条件付確率はベイズの公式より次のように表される。

$$P(x/z) = P(z/x) \cdot P(x) / P(z) \dots \dots \dots (11)$$

式(11)の右辺を次のように求める。まず、 $P(z/x)$ は、 x が与えられた時の z の確率分布であるから、式(10)より z の平均が Hx 、共分散が R となり、次式で与えら

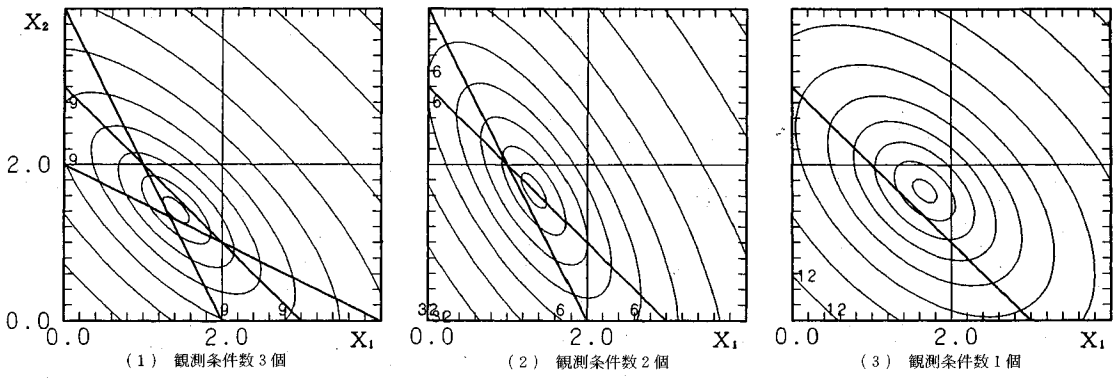


図-2 観測条件が線形の場合の目的関数 J_2 事前情報がある場合

れる。

$$P(z/x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |R|^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(z-Hx)^T R^{-1}(z-Hx)\right\} \dots (12)$$

次に、 $P(x)$ は平均 \bar{x} 、共分散 M が既知なので次式で求められる。

$$P(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |M|^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T M^{-1}(x-\bar{x})\right\} \dots (13)$$

最後に $P(z)$ については、 z の平均と共分散が以下のよう求められることから、式 (16) で与えられる。

$$E[z] = E[Hx+v] = H\bar{x} \dots (14)$$

$$\begin{aligned} E[(z-\bar{z})(z-\bar{z})^T] &= E[(Hx+v-H\bar{x})(Hx+v-H\bar{x})^T] \\ &= H \cdot E[(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T] H^T + E[vv^T] \\ &= HMH^T + R \dots (15) \end{aligned}$$

$$P(z) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |HMH^T + R|^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(z-H\bar{x})^T (HMH^T + R)^{-1}(z-H\bar{x})\right\} (16)$$

式 (12), (13), (16) を、式 (11) に代入すると $P(x/z)$ が求まる。

$$P(x/z) = \frac{|HMH^T + R|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2} |M|^{1/2} |R|^{1/2}} \times \exp(-J_2 + I) \dots (17)$$

ここで、

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2}(x-\bar{x})^T M^{-1}(x-\bar{x}) \\ &+ \frac{1}{2}(z-Hx)^T R^{-1}(z-Hx) \dots (18) \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2}(z-H\bar{x})^T (HMH^T + R)^{-1}(z-H\bar{x}) \dots (19)$$

式 (17) において、 x の関数となるのは J_2 だけなので、 $P(x/z)$ を最大にする x は J_2 を最小にすることがわか

る。したがって、推定値 \hat{x} は次の条件を満たす。

$$\frac{dJ_2}{dx} = M^{-1}(\hat{x}-\bar{x}) - H^T R^{-1}(z-H\hat{x}) = 0 \dots (20)$$

\hat{x} について整理すると、次式が得られる。

$$\hat{x} = \bar{x} + PH^T R^{-1}(z-H\bar{x}) \dots (21)$$

$$\text{ここで、} P = (M^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} \dots (22)$$

式 (21), (22) は、プロセスノイズを 0 とし、状態方程式を定常、すなわち状態推移行列を単位行列とおいたときのカルマンフィルターによる推定式に等しい。これらの式の誘導の詳細は、文献 (17) を参照されたい。

式 (18) と式 (5) で表される目的関数 J を比較すると、式 (18) の第 2 項は式 (5) と同様の形をしていることがわかる。したがって、観測条件式を与える以前の情報に信頼がおけない場合、すなわち状態量の共分散マトリックス M が R に比べ非常に大きい場合は、式 (20) の第 1 項を無視できるので、第 2 項から式 (7) に相当する式を誘導することができる。この場合、重みが R^{-1} で与えられており、最尤推定となる。すなわち、確率論に基づく逆解析を「推定値が最尤推定になっていること」と定義すると、式 (7) は重みの考え方によっては確率論による推定とも解釈できる。

式 (18) で表される目的関数 J_2 と観測条件式 (1), (2), (3) を図-2(1)(2)(3) に示す。平均は x_1, x_2 、とも 2.0、その共分散マトリックス M 、観測量誤差の共分散マトリックス R は共に単位行列とした。式 (18) の目的関数 J_2 を用いる場合は、観測条件式が 1 個であっても目的関数が唯一の最小点を持っていることがわかる。なお、式 (21), (22) は図-2(1)(2)(3) に示した目的関数の最小点を与える式である。

次に、事前の情報の信頼性が相対的に高い場合について考えるため M の対角項を小さくした場合 (具体的には 0.2 とした) について、同様に図-3 に示す。信頼性が高い程、目的関数 J_2 の最小点、すなわち推定値が事前の平均値へ近づくことがわかる。逆に信頼性を低く設定すると推定値が観測条件式に近づき、目的関数のコン

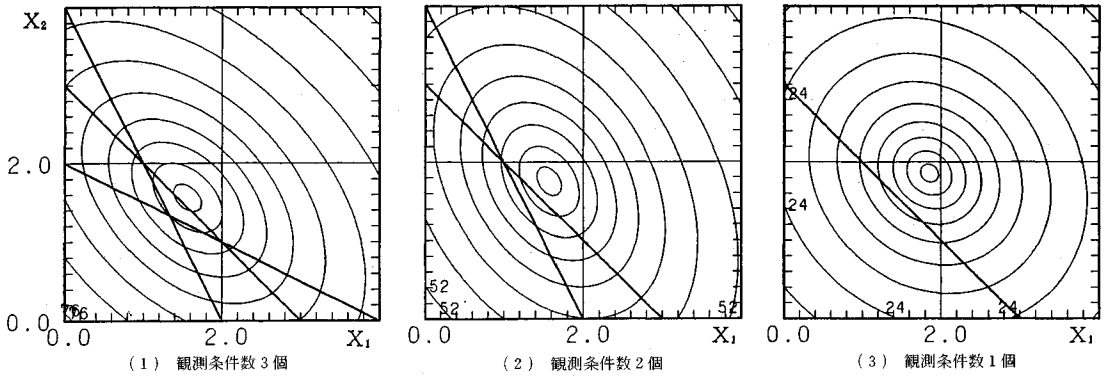


図-3 観測条件が線形の場合の目的関数 J_2 。信頼性の高い事前情報がある場合

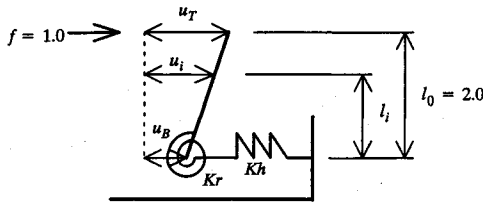


図-4 非線形問題となる逆問題の例

表-1 観測情報

観測点 i	変位 u_i	観測位置 l_i
1	3.0	2.0
2	1.5	0.5
3	1.8	1.0

ターが扁平な形状になる。

3. 非線形最小二乗法

観測量を表す式が、推定したいパラメタに関して非線形である場合について考える。一般に、地盤物性の逆解析はこの問題になる。非線形の逆解析の例として図-4に示す簡単なモデルについて、ばね値 K_h , K_r を推定する問題を考える。並進ばね K_h , 回転ばね K_r を有する剛な棒要素の上端に $f=1.0$ の力を作用させ、いくつかの点で変位が観測された時のばね値の推定を行う。上端、下端の変位を u_T , u_B とすると力及びモーメントの釣合い条件より次の関係が成り立つ。

$$f = K_h u_B \dots (23)$$

$$f \cdot l_0 = K_r (u_T - u_B) / l_0 \dots (24)$$

観測点 l_i における変位は次式で与えられる。

$$u_i = u_B + (u_T - u_B) l_i / l_0 \dots (25)$$

$f=1.0$, $l_0=2.0$ に注意して、式 (23), (24), (25) の関係から u_T , u_B を消去すると次の条件式が得られる。

$$u_i = \left(\frac{1}{K_h} + \frac{2l_i}{K_r} \right) \dots (26)$$

ここで、状態量 $\mathbf{x}^T = \{K_h, K_r\}$ 、観測量 $\mathbf{z}^T = \{u_1, u_2, u_3\}$ とおくと、式 (10) に相当する観測

条件式は次式で与えられる。

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \dots (27)$$

ここで、 $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ は式 (26) を表し、 \mathbf{x} に対して非線形性を有している。目的関数も式 (5) にならない、次のように定義する。

$$J_3 = \frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{W} (\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x})) \dots (28)$$

図-1と同様に、観測条件式が3つの場合、2つの場合、1つの場合の J_3 のコンターを図-5(1)(2)(3)に示す。この時の重み \mathbf{W} は単位行列とした。観測条件式が非線形になりコンターの形状が複雑になっていること以外は、図-1と同様である。

次に前節の議論と同様に、観測が行われる以前の状態量 \mathbf{x} に対して統計的性質が与えられている場合の最適推定値について議論する。最適な推定値として条件付確率 $P(\mathbf{x}/\mathbf{z})$ を最大にする \mathbf{x} を考えるには式 (11) の関係を踏まえ、式 (12), (13), (16), すなわち $P(\mathbf{z}/\mathbf{x})$, $P(\mathbf{x})$, $P(\mathbf{z})$ が必要となる。式 (12) については、 $\mathbf{H}\mathbf{x}$ を $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ と置き換えるだけで、また式 (13) についてはそのまま用いることができる。式 (16) についてはその非線形性のため正規分布とはならないので、 $P(\mathbf{z})$ を簡単には求められない。しかし、状態量 \mathbf{x} の関数とはなっていないので、 $P(\mathbf{x}/\mathbf{z})$ を最大にする \mathbf{x} の算定には影響を及ぼさない、すなわち、式 (11) において $P(\mathbf{z})$ は \mathbf{x} に関して定数となるので、 $P(\mathbf{z}/\mathbf{x}) \cdot P(\mathbf{x})$ を最大にする \mathbf{x} は $P(\mathbf{x}/\mathbf{z})$ を最大にすることがわかる。式 (18) の誘導の場合と同様にして、 \mathbf{x} に関連する部分を抜き出すと非線形問題の場合の目的関数 J_4 は次式を考えればよいことがわかる。

$$J_4 = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x})) \dots (29)$$

式 (29) は、事前情報の平均値からの変動分と観測値と推定値の差に対して、それぞれ重みマトリックスを介した2次形式の目的関数となっており、重みマトリックス

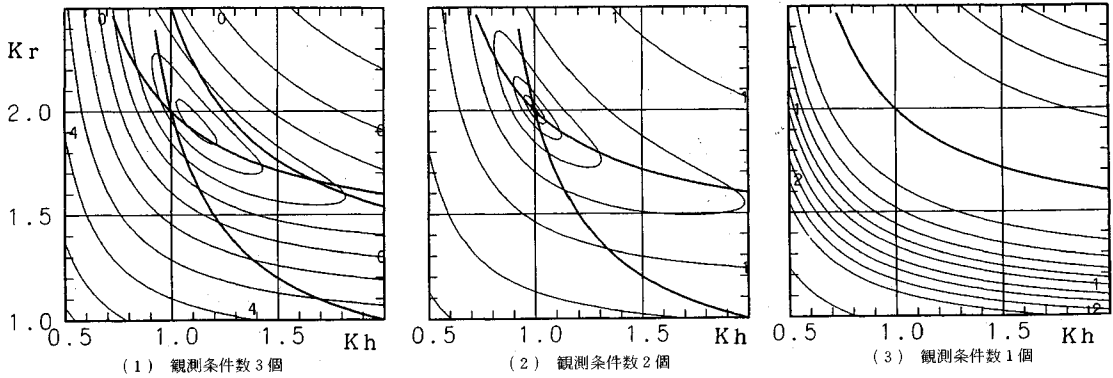


図-5 観測条件が非線形の場合の目的関数 J_3 事前情報なしの場合

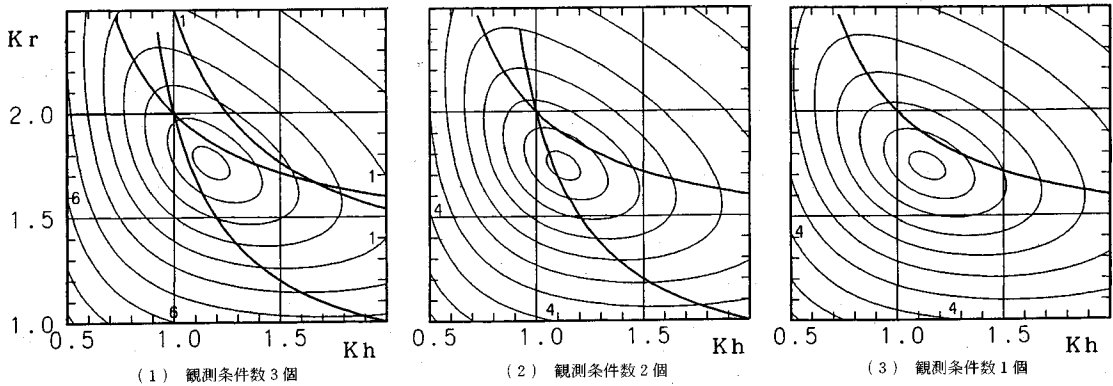


図-6 観測条件が非線形の場合の目的関数 J_4 事前情報がある場合

をそれぞれの差に対するペナルティーという意識から適当に定めている場合、すなわち、 M や R を収束性や安定性の観点から定めている場合は、式(29)を用いても確率論に基づく推定とは言い難い。逆に、通常確定論に基づく逆解析と分類されている場合でも、解釈によっては確率論に基づいていると考えることができる場合がある。たとえば、よく行われるように重みを単位行列とした式(28)を目的関数としても、観測量の誤差間に相関がなくバラツキの程度が全て同程度であり、事前情報に信頼がおけないと仮定すると、式(28)は最尤推定値を与え、確率論に基づく推定と考えることができる。

図-4、表-1に示した例について、観測条件式と目的関数 J_4 の関係を図-6(1)(2)(3)に示す。事前情報は K_h , K_r の平均値を 1.0, 1.5, M , R については単位行列とした。

非線形の目的関数 J_3 あるいは J_4 の最小値を与える x を求めるには、最急降下法、共役勾配法、ニュートン法等の最適化手法^{18), 19)}が必要である。ここではニュートン法の一つであるガウスニュートン法を用いて最小点を求める。まず、 z を x について x_i の回りでテーラー展開する。

$$H(x) \cong H(x_i) + H_{xi}(x - x_i) \dots \dots \dots (30)$$

ここで、 $H_{xi} = \frac{\partial H}{\partial x^T} |_{x=x_i}$: H を x について微分したマトリックス

式(30)はテーラー展開した式の第2項までを用いて近似した式である。これを式(28)に代入し、 J_3 とすると、 J_3 は x についての2次式になっているので、最小化の条件から次式が求められる。

$$\frac{dJ_3}{dx} = -H_{xi}^T W(z - H(x_i) - H_{xi} \cdot (x - x_i)) = 0$$

x についてまとめると次の式が得られる。

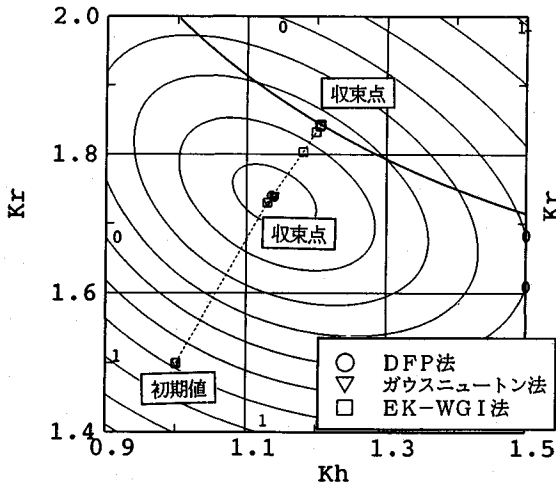
$$x = x_i + (H_{xi}^T W H_{xi})^{-1} H_{xi}^T W (z - H(x_i)) \dots \dots \dots (31)$$

x は、 J_3 を最小化しているが J_4 については最小化していない。そこで $x \rightarrow x_{i+1}$ とおいて、収束が得られるまで i についての更新を行って J_3 の最小点を求める。 J_4 についても全く同様にして最小点を求めることができる。式(29)に式(30)を代入して J_4 を求める。

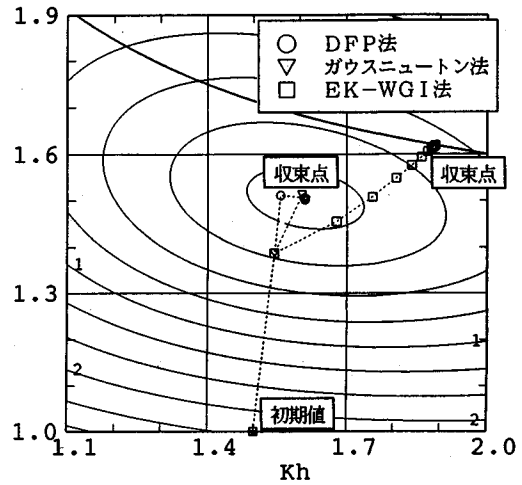
$$J_4 = \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T M^{-1} (x - \bar{x}) + J_3 \dots \dots \dots (32)$$

J_4 の最小化条件より x を求める式の形に整理し、 x を x_{i+1} と置き換えるとガウスニュートン法による次の式が求められる。これらの式に基づき、 i についての更新を行うことにより J_4 の最小点を求めることができる。

$$x_{i+1} = x_i + P_{xi} (H_{xi}^T R^{-1} (z - H(x_i)) + M^{-1} (\bar{x} - x_i)) \dots \dots \dots (33)$$



(1) 初期値 (平均値) $Kh=1.0, Kr=1.5$ の場合



(2) 初期値 (平均値) $Kh=1.5, Kr=1.0$ の場合

図-7 観測条件が1個の場合の目的関数 J_4 と収束過程

$$P_{xi} = (M^{-1} + H_{xi}^T R^{-1} H_{xi})^{-1} \dots (34)$$

さらに、式 (33), (34) において \bar{x} を x_i に、 M を αP_{xi-1} に置き換えると、次の形になる。

$$x_{i+1} = x_i + P_{xi} H_{xi}^T R^{-1} \{z - H(x_i)\} \dots (35)$$

$$P_{xi} = \left(\frac{1}{\alpha} P_{xi-1}^{-1} + H_{xi}^T R^{-1} H_{xi} \right)^{-1} \dots (36)$$

$\alpha=1.0$ とすると、これらの式は状態推移行列を単位行列、プロセスノイズを0とおいた時の拡張カルマンフィルターの式に等しい。さらに、 $\alpha > 1.0$ とおき、同じ観測情報に対して式 (35), (36) を繰り返し適用するのがEK-WGI法³⁰⁾である。

式 (33), (34) で示されるガウスニュートン法では、目的関数 (たとえば J_3, J_4) を初期値の回りで近似して (J_3, J_4) その最小点を求め、次にその点の回りで目的関数の近似を再び行い、新たな最小点を求めるという手続きを繰り返す。この過程で近似された目的関数 (J_3, J_4) は更新されて行くが、真の目的関数 (J_3, J_4) は不変である。一方、EK-WGI法では真の目的関数 J_4 自体も毎回更新されるが、その最小点探索のための収束計算は1回しか行われぬ。

図-6(3) のケース、すなわち観測情報が1組しかなく、状態量、観測量誤差の共分散マトリックスが単位行列で与えられる場合について、両者の違いを具体的に示す。まず、ガウスニュートン法による収束の過程を図-7(1) に示す。与えられた目的関数の最小点に向かって更新されていっていることがわかる。他の最適化手法でも同様にして最小点 (正確には極値) の探索を行うことができる。例として DFP 法¹⁸⁾ による収束過程も同様に示す。一方、EK-WGI法では、状態量の共分散マトリックス M や平均 \bar{x} についても更新を行っているため、毎回目的関数の形が変わり、その最小点の推定点は図に示

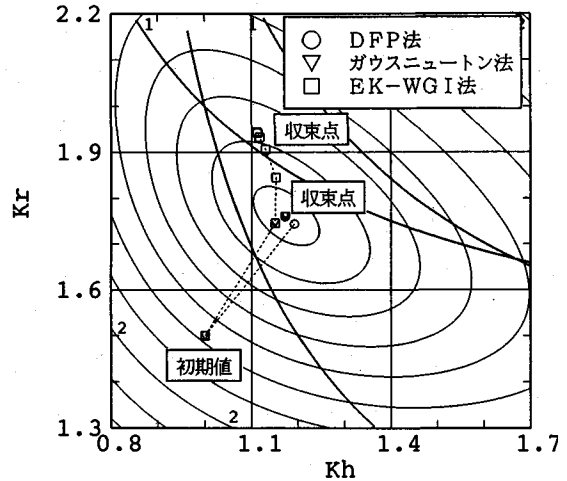


図-8 観測条件が3個の場合の目的関数 J_4 と収束過程

されているように観測条件式に近づいて行く。初期値 (事前情報の平均値) を (1.5, 1.0) として計算を行った結果を図-7(2) に示す。ガウスニュートン法や DFP 法では目的関数の最小点に収束しているが、EK-WGI法では途中から右の方へ大きく曲がり、観測条件式上の点に収束している。観測情報が3組ある図-6(1) の場合についても同様に収束計算の過程を図-8 に示す。ガウスニュートン法と DFP 法は J_4 の最小点に収束するが、EK-WGI法では J_3 の最小点 (図-5(1)) に収束してしまっている。

目的関数 J_4 の最小値は、状態量 x の事前情報に対する信頼度と観測情報に対する信頼度から最も可能性の高い状態量を最適推定値 (最尤推定値) として与えているため、残差二乗和 J_3 の最小化にはなっていない。一方、EK-WGI法では目的関数を更新しながら収束計算を繰り返すため、残差二乗和を最小にすることができるが、

表-2 観測データの量と質による目的関数の選択

	観測の量が十分多い	観測の量が十分でない
観測に対する信頼性が十分に高い場合	$J_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))$	J_4 あるいは $J_5 = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ 拘束条件 $\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0$
観測に対する信頼性が十分でなく、初期の情報も加味したい場合	$J_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))$	

事前情報 $\bar{\mathbf{x}}$, \mathbf{M} は明解な意味を持たなくなり, \mathbf{M} の大きさに関わらず観測に対する信頼度が十分に大きいと判断していることになる. すなわち, 目的関数は常に J_3 となる. また, 次のような解釈もできる. 式 (35), (36) において, $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}}$ を単位行列とすると Marquardt 法¹⁸⁾ と等しくなる. この場合目的関数は J_3 であり, $\bar{\mathbf{x}}$, \mathbf{M} は物理的な意味はなく, 収束計算の収束性や安定性改善のためのパラメータとして扱われている.

4. 逆問題における最適な目的関数

これまでの議論からもわかるように観測情報の量, 質や状態量に対する事前情報の信頼性によって目的関数を使い分けことが好ましい. そこで, 表-2 に示す目的関数の使い分けを提案する.

観測情報の信頼性が低い, すなわち観測量誤差の共分散マトリックスが大きい場合は初期の情報にも頼らざるを得ない. したがって, 初期情報を含んだ目的関数 J_4 が適当と思われる. 一方, 観測情報に対する信頼度が十分に高い場合は, 観測情報の量によって次の2つに分けられる. 観測の情報量が未知数(状態量)に対して十分多い場合は, 初期情報はもはや必要ないので目的関数は J_3 とすればよい. それに対し, 観測情報の量が十分でない場合は, 初期情報が頼りとなる. 目的関数を J_4 とすることも考えられるが, その場合 \mathbf{M}^{-1} に対して \mathbf{R}^{-1} が非常に大きくなり, 最小値の探索が困難になることもある. そのように解が不安定になる場合は, 観測情報を目的関数に含めずに拘束条件として考え, 目的関数は事前情報だけから算定される J_3 とする. 例として, 図-4 に示したモデルに対し, 観測が1組しかないがその信頼性が十分に高い場合を考える. 観測の信頼の高さを表現するため \mathbf{R} を単位行列に 10^{-2} を乗じた行列, \mathbf{M} を単位行列とした. この時の目的関数と収束の過程を図-9 に示す.

この例では良好に収束したが, このように目的関数が偏平な形となり, 場合によっては収束値が得られないこともある. その場合には観測情報を拘束条件としたペナルティー乗数法が有効である¹⁸⁾. 求められる点は, 与えられた観測条件を満たす状態量の中で最も可能性の高い(最も尤度関数を大きくする)状態量, すなわち最尤推定値となる.

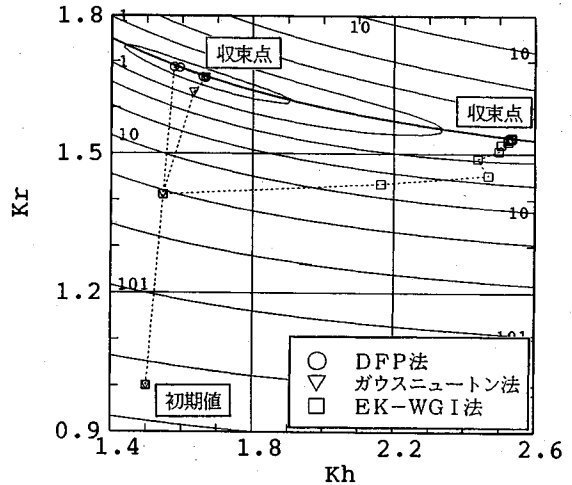


図-9 観測情報の信頼性が高い場合の目的関数 J_4 と収束過程

同図に, EK-WGI 法による収束過程も示す. 収束点は観測条件を満たしているが, 最尤推定値とはなっていない. 本来カルマンフィルターでは, \mathbf{M} と \mathbf{R} の相対的な大きさによって観測と事前情報への信頼度が表現されているはずであるが, 観測条件式の非線形性のため, \mathbf{M} に比べ \mathbf{R} を極端に小さくしても, 観測結果を十分に満たす解が得られるとは限らない. そこで, EK-WGI 法では \mathbf{R} を小さくするかわりに同じ観測結果が何回も得られたと考えることにより, 観測情報に対する高い信頼性を表現していると解釈することができる. EK-WGI 法は, 上記のような観測情報の信頼性が高い問題に対する解法と考えることができるが, 観測量が未知量の数より少ない場合には観測条件を満たすものの最尤推定となる保証はない.

5. 結 論

本研究では簡単な例題を通して, 確率論による逆解析, 特に EK-WGI などのカルマンフィルターを用いた手法の意味について考察を行った. その結果は, 次のようにまとめることができる.

1) 目的関数が表-2 に示した形で与えられる場合, 確率論に基づく逆解析と確定論に基づく逆解析の本質的な違いは, 目的関数の重みの意味の違いにある. 重みが共分散マトリックスの逆マトリックスで与えられる場合

は、最尤推定となり確率論に基づく逆解析と考えることができる。

2) 表—2に示すように、観測データの質と量に応じて目的関数を使い分けることを提案した。

3) 静的な問題に適用する拡張カルマンフィルターは、収束計算を一回しか行わないガウスニュートン法に等しいことを示した。

4) 独立な観測条件数が未知数以上の場合、EK-WGIでは、事前情報 M , \bar{x} に物理的な意味はなく、収束性や安定化改善のための数値解析上のパラメタとして扱われている。目的関数は表—2の J_4 ではなく、 J_3 で与えていることに相当する。また、変形された Marquardt 法と考えることもできる。

5) 独立な観測条件数が未知数よりも少ない場合、EK-WGI法の解は観測条件を満たすが、最尤推定値となる保証はない。

今後は、ここでの議論を基にして、より実地的な地盤モデルや構造モデルの逆解析の研究を行う予定である。

最後に、当論文をまとめるに当たり、詳細にわたって有益なご意見をいただいた武蔵工業大学星谷教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 星谷勝・斉藤悦郎：建設技術者のためのデータ解析と応用，鹿島出版会，1991。
- 2) 久保史郎：逆問題，培風館，1992。
- 3) Gioda, G. : Some Remarks on Back Analysis and Characterization Problems in Geomechanics Proc. 5th International Conference on Numerical Method in Geomechanics, Vol. 1, pp. 49~61, 1985.
- 4) 桜井春輔・竹内那文：トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析法，土木学会論文報告集，第337号，pp.137~145, 1983.
- 5) 桜井春輔・谷河正也：岩盤の不連続面の影響を考慮した大規模地下空洞の変位計測結果の逆解析，土木学会論文集，第403号，pp.75~84, 1989.

- 6) 桜井春輔・岸本修治・藤田修一・末廣匡基：斜面掘削工事における情報化施工管理について，第23回岩盤力学に関するシンポジウム，pp.207~211, 1991.
- 7) 荒井克彦・片瀬貫文：トンネル内空変位計測に基づく地盤変形・強度定数の推定，土質工学会論文報告集，Vol.24, No.2, pp.171~179, 1984.
- 8) 小嶋啓介・足立紀尚・荒井克彦：砂質地山トンネルの掘削に伴う地盤物性定数の逆解析，土木学会論文集，第406号，pp.167~174, 1989.
- 9) 久武勝保：トンネルにおける三次元逆解析法の開発，土木学会論文報告集，第376号，pp.259-265, 1986.
- 10) 斉藤悦郎・古賀重利：EK-WGI法による山留め壁の作用外力の同定，土木学会論文集，第380号，pp.459~465, 1987.
- 11) 門田俊一・斉藤悦郎・和久昭正・後藤哲雄：繰り返し拡張カルマンフィルターによる異方性岩盤物性の同定と地下空洞計測管理への適用，土木学会論文集，第406号，pp.107~116, 1989.
- 12) 村上章・長谷川高士：Kalmanフィルター有限要素法による逆解析と観測点配置，土木学会論文集，第388号，pp.227~235, 1987.
- 13) 鈴木誠・石井清：拡張カルマンフィルターによる土質定数の空間分布推定，土木学会論文集，第406号，pp.71~78, 1989.
- 14) 須藤敦史・星谷勝：EK-WLI法と有限要素法を用いた逆解析，土木学会論文集，No.466，pp.177~185, 1992.
- 15) 荒井克彦・宮田幹夫：確率論的逆解析手法の適用性，第21回土質工学研究発表会，pp.1089~1090, 1986.
- 16) K. Arai, H. Ohta, M. Miyata : Comparison of Static and Statistical Methods for Back-analysis of Elastic Consolidation Problems, Proc. of Computer Methods and Advances in Geomechanics, Balkema Rotterdam, pp. 949~954, 1991.
- 17) 加藤寛一郎：最適制御入門，東京大学出版会，1987.
- 18) 嘉納秀明：システムの最適理論と最適化，コロナ社，1987.
- 19) 中川徹・小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，1982.
- 20) 星谷勝・斉藤悦郎：拡張カルマンフィルターを用いた各種振動系への応用，土木学会論文報告集，第339号，1983.

(1993.2.5受付)

BASIC STUDY ON PROBABILISTIC BACK ANALYSIS

Ikumasa YOSHIDA, Hiroki KUROSE and Shirou FUKUI

Methodology of probabilistic back analysis is discussed based on the maximum likelihood estimation. The probabilistic back analysis solved by Gauss-Newton method is found to have the same algorithm as that of Extended Kalman Filter method, and the only difference between the probabilistic approach and the deterministic approach is due to how the weighting matrix of the objective function is determined for the back analysis. Three types of objective functions for the back analysis are proposed depending on the quality and quantity of given observed data. The mathematical interpretation of solutions by the EK-WGI method is also discussed and made clear. A back analysis with a simple model is numerically performed in order to demonstrate the proposed probabilistic back analysis method.