

投稿論文 (和文)
PAPERS

円形境界で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析

村瀬安彦*・中川建治**

本文は円形境界で接合する異質弾性体のインターフェイスクラック周辺の応力集中が滑らかで有限なものになる応力関数を導いたものである。境界面未接合領域近傍の問題は多くの研究者によって手掛けられてきたが、研究の成果は集積特異点が生じる極めて非実用的なものである。著者は集積特異点領域を緩和する手法として開口長さを表わすパラメータで重み積分を行う方式を採用し、開口部先端に process zone と称する応力も変位も生じる区間を設定した。これによって応力集中も開口変位も平滑化された。

Key Words : crack, interface, finite stress, analytical function

1. まえがき

弾性係数の異なる2種類の弾性体が接合されている境界面に存在する未接合部分はインターフェイスクラック（接合面亀裂）と名付けられている。土木工学の分野ではこのインターフェイスクラックの問題に対応する力学モデルは多く、例えば鉄筋とコンクリートの剝離の問題を始めとして、鋼管と周りに打設されたコンクリートとの接触面の問題、岩盤上に打設されたコンクリート打設面の空隙周辺の応力集中問題等である。さらに鋼板相互の溶接接合でも厚さの異なる場合の未溶接部分は、板の厚さを剛さで表現した2次元問題として扱うと典型的なインターフェイスクラックの問題となる。

接合面に沿う未接合領域近傍の問題は現実的で重要な課題であって従来多くの研究者によって手掛けられてきたが、理論的な研究の成果は非実用的な解を与えるものがほとんどで現実の問題に適用するには不都合なものである。

直線状の接合面に関する研究の主なものを挙げると次のようになろう。Williams¹⁾、Erdogan²⁾、England³⁾、Rice⁴⁾等は、剛さの異なる2つの半無限弾性平板がy軸上で接合され、クラックが接合線の $y \leq a$ において生じている場合の面内力問題（図-1¹⁾参照）を理論的に解くことを試みて一応の理論解を得ている。その他接合線上に等間隔のクラックが無限に存在する場合の解、あるいは面外曲げの問題等も研究されているが、それらの解はすべて次のような非現実的な難点を含んだものである。すなわちクラック先端から接合線に沿う距離をrとすると、 $\sin(\alpha \log r)$ という集積特異点を持つことであ

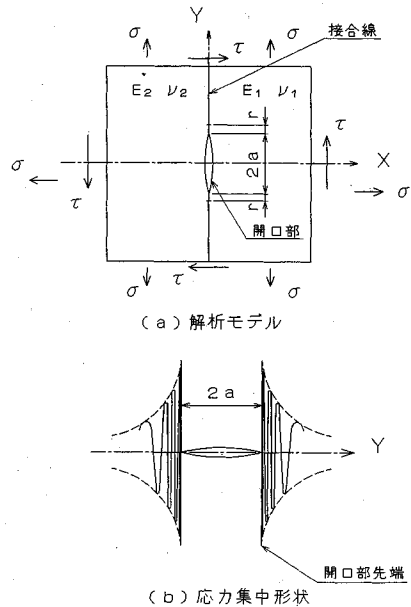


図-1 Erdogan等の解析モデル

る（図-1）。応力集中がこのような集積特異点形状（符号の変動周期が分子や原子のサイズに成る）を構成するのでは岩盤やコンクリートのような粗粒子の混成よりなる材料の応力集中問題へ活用することは望めない。

他方この集積特異点の項を緩和するためにM. Comninou⁵⁾⁻⁹⁾はクラック先端部の process zone においてせん断応力を解除する微小区間（contact zone）を設定して集積特異点を解除する事を試みて成功した。Atkinson¹⁰⁾も contact zone を設定する手法を提案しているが、これらは接合線に直角方向の一様引っ張りを受ける場合にもクラック先端部に变化の激しい負の応力が生じる解となっている。伊藤^{11),12)}は開口部の形状を有限個のフーリエ級数で表現されるものと仮定してラプラス

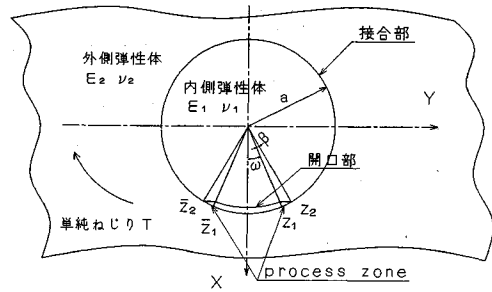
* 正会員 工修 佐藤鉄工（株）開発室電算チーフ（岐阜大学 博士後期課程在学中）
（〒930-02 富山県中新川郡立山町鈴木）
** 正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科

変換法を用いて集積特異点の形状を消滅させる手法を導いた。しかし、これによる応力集中は従来の等方性体中のクラックの無限大の応力集中形状へ近似するもので、応力拡大係数で表現されるものとなっている。さらに動的応力集中の問題にもこの解析法を適用した。著者等は¹³⁾⁻¹⁵⁾ process zone における応力は有限項のフーリエ級数で表現されるものと仮定しつつ接合面全体の応力はフーリエ積分で現されるとして応力解を導いて既に公表している。伊藤の研究との相違は応力集中が有限値であることであり、この解法は直交異方性体の接合の場合にも適用出来るものであってクラック先端部で開口変位と応力分布が同時に生じる process zone 相当の部分が実現されて応力集中は有限で滑らかなものとなる。

円形接合面に関する研究も集積特異点状の応力集中を孤立特異点に置換して等方性体中の Westergaard¹⁶⁾ の解に合わせて応力拡大係数を求める方法が主流であって、Gdoutsos¹⁷⁾ 等の研究がこの系であろう。円形接合面あるいは多角形接合の場合について、長谷部¹⁸⁾⁻²⁵⁾等は剝離の問題として多くの研究を報告している。これらは写像関数による巧妙な解析法に基づいたものであるが、視点を変えると特異点近傍で複数個の点を中心に級数展開する手法を主体としているもので、クラック先端部の応力は無限大になることを前提として応力拡大係数を与えるものである。円形接合面の場合でも直線接合の場合と同様に集積特異点状の応力を緩和する1つの手段はせん断応力を解放する contact zone を設定することである。水嶋²⁶⁾⁻²⁹⁾等は弾性係数の異なる円形充てん材を持つ無限板を接合面でせん断力の無い場合と相対滑りによる摩擦力が生じる場合とについて研究しているが、これがその例と解釈される。

本研究は弾性係数が異なる2種類の弾性体の円形接合面におけるクラック周辺の応力分布を与える解析解を導いたものである。解の特性は著者ら等の従来の研究の方向に沿うもので「process zone 相当の部分に於いて有限で滑らかな応力分布を与えて同時にこの部分に開口変位も生じさせる解」である。著者等の上記の研究¹³⁾と本研究との大きな相違点は級数展開を避けた閉じた解であって、process zone 部分がいかに微小になっても解が発散しない(級数解では発散する)ことである。これは土木工学分野で主要材料であるコンクリートの亀裂問題あるいは岩盤とコンクリートの接合面の問題を研究するには望ましいものである。

今回の報告は、円形領域の中心にねじりモーメントが作用する場合の応力関数の結果であり、クラック先端部でも有限で滑らかな応力集中を構成する解析解である。解の第2の特性は process zone と称される区間を近似的に構成していることである。この区間では応力も開口変位も存在して、応力度の連続性は完全に保たれている。



解析モデル (平面ひずみ)	$a = 10 \text{ cm}$	$E_1 = 2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$
	$\omega = 20^\circ$	$\nu_1 = 0.3$
	$\beta = 10^\circ$	$E_2 = 2.94 \times 10^4 \text{ MPa}$
	$T = 9.8 \text{ kN}$	$\nu_2 = 0.167$

図-2 円形境界で接合する異質弾性体

開口は両側の弾性体が反対側へ変位することによるものであり、大きなひずみが出現しているのではない。

2. 開口関数

対象とするインターフェイスクラックのモデルは、図一2に示すように弾性係数が異なる材料が円周方向に沿って接合され中心軸から $|\theta| \leq \omega$ の境界部分 (z_1 から \bar{z}_1) が未接合になってクラックを構成しているものとする。

このように z_1 から \bar{z}_1 に至る任意曲線に沿って開口を構成するような一つの関数は(複素関数の分岐を構成する)

$$H_0(z) = \frac{1}{2} \left[\log \left(\frac{z - \bar{z}_1}{z - z_1} \right) \right] \dots \dots \dots (2.1)$$

として表される。 z_1, \bar{z}_1 が接合線の円周上の点なら、関数(2.1)式の実数部、虚数部はそれぞれ図-3、図-4となる。図-4の虚数部曲面は開口部先端で0から π へ直立しているため、Erdogan, Rice, Atkinson, Englandの研究で明らかのように応力集中が集積特異点の形状を形成する結果となっている(上記の研究者等は式(2.1)の様な表現はしていないが間接的には同等である)。著者等の着想は「もし開口部先端における急激な飛躍(0から π へ直立)を滑らかに変換し得たならば関数の特性より応力集中は滑らかで有限なものになる」と言うものである。開口部先端を滑らかにする手法は著者等³⁰⁾が既に様な等方性弾性体あるいは異方性弾性体中のクラックの応力集中を有限で滑らかなものにする手法として活用した重み積分法が最も簡単であろう。すなわち本研究ではクラック先端近傍の集積特異点領域を緩和する対策として、関数 $H_0(z)$ の開口先端位置を表す z_1, \bar{z}_1 を積分変数にし、重み積分を行って好ましい関数 $H_2(z)$ を導いた。その手順を次に示す。

式(2.1)の z_1, \bar{z}_1 を指数で表わすと次式となる。

$$H_0(z, a, \omega) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{z - ae^{i\omega}}{z - ae^{-i\omega}} \right) = H_{0r} + iH_{0i} \dots \dots (2.2)$$

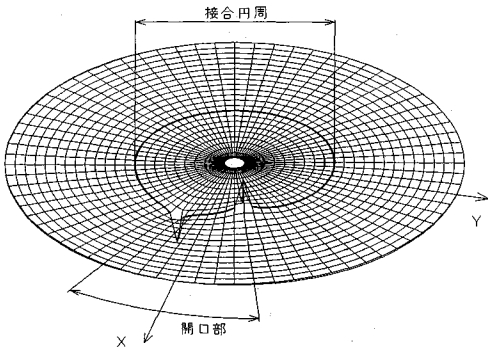


図-3 (1) Function Hor (実数曲面)

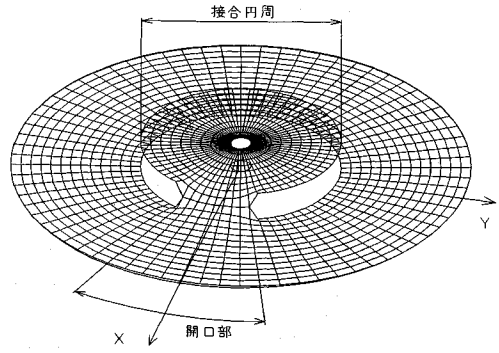


図-4 (1) Function Hoi (虚数曲面)

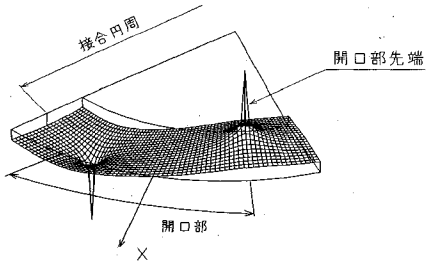


図-3 (2) Function Hor (開口部拡大)

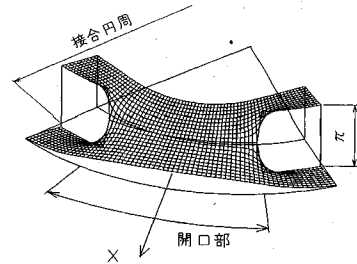


図-4 (2) Function Hoi (開口部拡大)

重み積分の手法として、開口先端部分に process zone と定義した応力と変位がともに生ずる区間を定義し、この区間で重み $\rho(t)$ によって $H_0(z, a, \omega)$ を積分する方式を採用する。

重み関数 $\rho(t)$ は図-5 に示す区間 $\omega < |t| < \omega + \beta$, すなわち $z_1 \sim z_2, \bar{z}_1 \sim \bar{z}_2$ 区間でのみ有効な 2 次式とする。

$$\rho_{11}(t) = c_{11}(t - z_1)(t - z_2) \quad (\omega < \theta < \omega + \beta) \dots (2.3)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho_{11}(t) dt = \frac{1}{6} c_{11} (z_1 - z_2)^3 = 1 \dots (2.4)$$

$$\rho_{12}(t) = c_{12}(t - \bar{z}_1)(t - \bar{z}_2) \quad (-\omega - \beta < \theta < -\omega) \dots (2.5)$$

$$\int_{\bar{z}_2}^{\bar{z}_1} \rho_{12}(t) dt = \frac{1}{6} c_{12} (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^3 = 1 \dots (2.6)$$

$$\omega 1 = \omega \quad \omega 2 = \omega + \beta$$

$$z_1 = ae^{i\omega 1} \quad z_2 = ae^{i\omega 2} \dots (2.7)$$

$$\bar{z}_1 = ae^{-i\omega 1} \quad \bar{z}_2 = ae^{-i\omega 2}$$

$$t = ae^{i\phi} \quad dt = ia e^{i\phi} d\phi \dots (2.8)$$

重みを区間 (z_1, z_2) で積分すると 1 になることが必要であり、次の照査を行う。

式 (2.7), 式 (2.8) を式 (2.3) に代入する。

$$\rho_{11} dt = c_{11} a^3 (e^{i\phi} - e^{i\omega 1}) (e^{i\phi} - e^{i\omega 2}) e^{i\phi} i d\phi$$

$$= -4 c_{11} a^3 e^{i(\omega 1 + \omega 2 + 4\phi)/2} \sin\left(\frac{\phi - \omega 1}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi - \omega 2}{2}\right) i d\phi \dots (2.9)$$

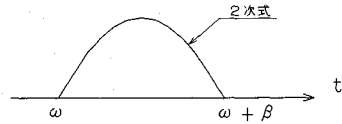


図-5 重み関数

$$\frac{1}{c_{11}} = \frac{1}{6} (z_1 - z_2)^3 = \frac{1}{6} [a(e^{i\omega 1} - e^{i\omega 2})]^3$$

$$= \frac{8}{6} (i)^3 a^3 e^{3i(\omega 1 + \omega 2)/2} \sin^3\left(\frac{\omega 1 - \omega 2}{2}\right) \dots (2.10)$$

$$\rho_{11} dt = \frac{3e^{i(2\phi - \omega 1 - \omega 2)}}{\sin^3\left(\frac{\omega 1 - \omega 2}{2}\right)} \sin\left(\frac{\phi - \omega 1}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi - \omega 2}{2}\right) d\phi \dots (2.11)$$

式 (2.11) より判るように ρ_{11} は実数部、虚数部ともに値を持つ。重みが虚数部を持つのは不都合であるから円周上で丁度虚数部の値を相殺するような第 2 の重み ρ_{21} を定義する。

$$\rho_{21} dt = c_{21} \left(\frac{a^2}{t} - \bar{z}_1\right) \left(\frac{a^2}{t} - \bar{z}_2\right) d\left(\frac{a^2}{t}\right) \quad (\omega < \theta < \omega + \beta) \dots (2.12)$$

$$\tau = \frac{a^2}{t} \quad d\tau = -\frac{a^2}{t^2} dt$$

$$\rho_{21}(\tau) = c_{21} (\tau - \bar{z}_1) (\tau - \bar{z}_2) \dots (2.13)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho_{21}(\tau) d\tau = \frac{1}{6} c_{21} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^3 = 1 \dots (2.14)$$

$$\begin{aligned} \rho_{21}dt &= -c_{21}a^3(e^{-i\phi} - e^{-i\omega 1})(e^{-i\phi} - e^{-i\omega 2})e^{-i\phi}id\phi \\ &= -4c_{21}a^3e^{-i(\omega 1 + \omega 2 + 4\phi)/2}\sin\left(\frac{\phi - \omega 1}{2}\right) \\ &\quad \sin\left(\frac{\phi - \omega 2}{2}\right)id\phi \dots \dots \dots (2.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{21}} &= \frac{1}{6}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^3 = \frac{1}{6}[a(e^{-i\omega 1} - e^{-i\omega 2})]^3 \\ &= \frac{8}{6}(i)^3 a^3 e^{-3i(\omega 1 + \omega 2)/2} \sin^3\left(\frac{\omega 1 - \omega 2}{2}\right) \dots \dots \dots (2.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{21}dt &= \frac{3e^{-i(2\phi - \omega 1 - \omega 2)}}{\sin^3\left(\frac{\omega 1 - \omega 2}{2}\right)} \sin\left(\frac{\phi - \omega 1}{2}\right) \\ &\quad \sin\left(\frac{\phi - \omega 2}{2}\right)d\phi \dots \dots \dots (2.17) \end{aligned}$$

第1の重み ρ_{11} と第2の重み ρ_{21} の和をとると式 (2.18) に示すように虚数部を相殺した重みが得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{11} + \rho_{21}}{2} dt &= \frac{3\cos(2\phi - \omega 1 - \omega 2)}{\sin^3\frac{\omega 1 - \omega 2}{2}} \sin\left(\frac{\phi - \omega 1}{2}\right) \\ &\quad \sin\left(\frac{\phi - \omega 2}{2}\right)d\phi \dots \dots \dots (2.18) \end{aligned}$$

重み ρ_{12} についても相殺する ρ_{22} を定義する。

$$\begin{aligned} \rho_{22}dt &= c_{22}\left(\frac{a^2}{t} - z_1\right)\left(\frac{a^2}{t} - z_2\right)d\left(\frac{a^2}{t}\right) \quad (-\omega - \beta < \theta < \omega) \\ &\dots \dots \dots (2.19) \end{aligned}$$

$$\int_{z_2}^{z_1} \rho_{22}(\tau) d\tau = \frac{1}{6}c_{22}(z_2 - z_1)^3 = 1 \dots \dots \dots (2.20)$$

冗長さを避けるために重み ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{21} , ρ_{22} を利用した H_0 の重み積分の結果のみを式 (2.21) に示す。 $z_U = ae^{i\omega}$, $z_L = ae^{-i\omega}$ とすると次のようになる。

$$\begin{aligned} H_2(z, a, \omega, \beta) &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{z_2}^{z_1} \frac{1}{2} \log\left(\frac{z - z_L}{z - z_U}\right) \rho_{11} \rho_{21} dz_L dz_U \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \left[-\frac{1}{4} \log(z - z_U) \rho_{11} dz_U - \frac{1}{4} \log(z - z_U) \rho_{21} dz_U \right] \\ &\quad + \int_{z_2}^{z_1} \left[\frac{1}{4} \log(z - z_L) \rho_{12} dz_L + \frac{1}{4} \log(z - z_L) \rho_{22} dz_L \right] \\ &= \frac{1}{4c_0} \left[-\{3(z_1 - z) - (z_2 - z)\}(z_2 - z)^2 \log(z_2 - z) \right. \\ &\quad + \{3(z_2 - z) - (z_1 - z)\}(z_1 - z)^2 \log(z_1 - z) \\ &\quad + \left\{3\left(z_1 - \frac{a^2}{z}\right) - \left(z_2 - \frac{a^2}{z}\right)\right\} \left(z_2 - \frac{a^2}{z}\right)^2 \log\left(z_2 - \frac{a^2}{z}\right) \\ &\quad - \left\{3\left(z_2 - \frac{a^2}{z}\right) - \left(z_1 - \frac{a^2}{z}\right)\right\} \left(z_1 - \frac{a^2}{z}\right)^2 \log\left(z_1 - \frac{a^2}{z}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4\bar{c}_0} \left[-\{3(\bar{z}_2 - z) - (\bar{z}_1 - z)\}(\bar{z}_1 - z)^2 \log(\bar{z}_1 - z) \right. \\ &\quad + \{3(\bar{z}_1 - z) - (\bar{z}_2 - z)\}(\bar{z}_2 - z)^2 \log(\bar{z}_2 - z) \\ &\quad \left. + \left\{3\left(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z}\right) - \left(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z}\right)\right\} \left(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z}\right)^2 \log\left(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z}\right) \right] \end{aligned}$$

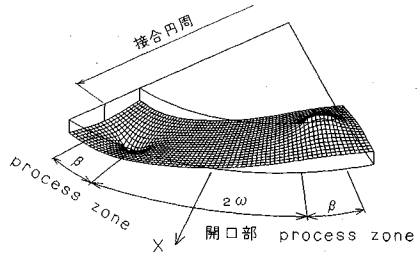


図-6 Function H_{2r} (実数曲面)

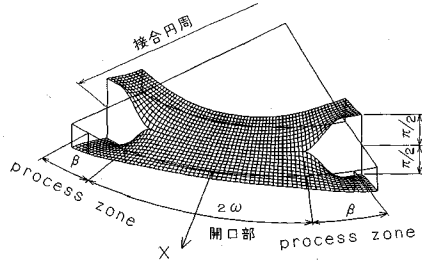


図-7 Function H_{2i} (虚数曲面)

$$\begin{aligned} &- \left[3\left(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z}\right) - \left(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z}\right) \right] \left(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z}\right)^2 \log\left(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z}\right) \\ &+ \frac{1}{4c_0} \left[2(z_1 - z_2) \left\{ -(z_1 - z)(z_2 - z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(z_1 - \frac{a^2}{z}\right)\left(z_2 - \frac{a^2}{z}\right) \right\} + \frac{1}{4\bar{c}_0} \left[2(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \left\{ +(\bar{z}_1 - z) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (\bar{z}_2 - z) - \left(\bar{z}_1 - \frac{a^2}{z}\right)\left(\bar{z}_2 - \frac{a^2}{z}\right) \right\} \right] \dots \dots \dots (2.21) \end{aligned}$$

$$c_0 = (z_1 - z_2)^3 \quad \bar{c}_0 = (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^3$$

積分演算の詳細を割愛するが $H_2(z, a, \omega, \beta)$ の実数曲面, 虚数曲面形状を図-6, 図-7に示す。図より実数曲面の無限項が有限化していること, 接合円周上で虚数曲面の0から $\pm\pi/2$ への立ち上がりが平滑化されていることが判定し得よう。

3. 解析解

記述を簡略化するために応力関数の一般形を

$$\nabla^2 \nabla^2 W = 0 \quad W = \bar{z}\psi + \phi$$

として表現して, 応力は以下のような複素応力で扱い実数部を採用することにする。

$$\sigma_x = 2\psi' - (\phi'' + \bar{z}\psi'')$$

$$\sigma_y = 2\psi' + (\phi'' + \bar{z}\psi'')$$

$$\tau_{xy} = -i(\phi'' + \bar{z}\psi'')$$

$$2G(u - iv) = k\overline{\psi(z)} - \bar{z}\psi'(z) - \phi'(z)$$

境界条件は次のようなものとする。

a) クラック部分, すなわち $r = a, |\theta| < \omega$ 区間では応力が $\sigma_r = 0, \tau_{r\theta} = 0$ である。このためには $|\theta| = \omega$ より $|\theta| = \omega + \beta$ に至る部分で応力が純虚数より複素数値になる必要がある。

b) $|\theta| > \omega + \beta$ の接合線上では応力も変位も連続，すなわち $\sigma_{r1} = \sigma_{r2}$, $\tau_{r\theta 1} = \tau_{r\theta 2}$, $U_{r1} = U_{r2}$, $U_{\theta 1} = U_{\theta 2}$ (内側：1, 外側：2) でなければならない。応力と変位に関するこの条件を満足させるためには，関数条件として以下の項目が必要である。①接合線の内側，外側それぞれ同型関数を採用する。②内側，外側の変位を一致させるために関数 H_2 に係数 $(1 + i\alpha)$ を乗じた項を持つこと。

解析解は上記の境界条件を満たす ϕ 及び ψ を求めることに帰結する。

(1) 第1の解析解

第1の解析解として，式 (3.1)~(3.4) を選定する。

$$\phi = d_1 z F_1 + d_2 z F_2 = \phi_1 + \phi_2 \dots \dots \dots (3.1)$$

$$\phi' = d_1 (-a^2 F_1) + d_2 a^2 \left(-\frac{2}{z} F_2 - F_2'\right) = \phi_1' + \phi_2' \dots \dots (3.2)$$

d_1, d_2 : 係数 α : 係数 a : 異なる材質の接合線の半径

$$F_1 = \cosh\{(1+i\alpha)H_2\} - \cosh\{(1-i\alpha)H_2\} \dots \dots (3.3)$$

$$F_2 = \sinh\{(1+i\alpha)H_2\} + \sinh\{(1-i\alpha)H_2\} \dots \dots (3.4)$$

解は前述した境界条件 a), b) を満たす係数 d_1, d_2, α を求めることである。関数 ϕ_1, ϕ_2 による接合線内側の応力と変位は

$$\sigma_{r11} = 4d_{11} \cosh(H_{2r}) \sin(\alpha H_{2r}) \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$\tau_{r\theta 11} = 4ad_{11} \{ \sinh(H_{2r}) \sin(\alpha H_{2r}) + \alpha \cosh(H_{2r}) \cos(\alpha H_{2r}) \} \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$U_{r11} = \frac{k_1 - 1}{2G_1} 2ad_{11} \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(H_{2r}) \sin(\alpha H_{2r})$$

$$U_{\theta 11} = -\frac{k_1 + 1}{2G_1} 2ad_{11} \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(H_{2r}) \cos(\alpha H_{2r})$$

H_{2r} : H_2 の実数部 H_{2i} : H_2 の虚数部

σ_r : 半径方向の応力 $\tau_{r\theta}$: せん断応力

U_r : 半径方向の変位 U_θ : 円周方向の変位

G : せん断弾性係数 ν : ポアソン比

$$k_1 = 3 - 4\nu_1$$

となり，関数 ϕ_1, ϕ_2 による接合線外側の応力と変位は次のようになる。

$$\sigma_{r12} = -4d_{12} \cosh(H_{2r}) \sin(\alpha H_{2r}) \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$\tau_{r\theta 12} = -4ad_{12} \{ \sinh(H_{2r}) \sin(\alpha H_{2r}) + \alpha \cosh(H_{2r}) \cos(\alpha H_{2r}) \} \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$U_{r12} = -\frac{k_2 - 1}{2G_2} 2ad_{12} \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(H_{2r}) \sin(\alpha H_{2r})$$

$$U_{\theta 12} = -\frac{k_2 + 1}{2G_2} 2ad_{12} \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(H_{2r}) \cos(\alpha H_{2r})$$

接合線内側と外側の応力は， $d_{11} = -d_{12}$ より連続となる。関数 ϕ_2, ϕ_2 による接合線内側の応力と変位は

$$\sigma_{r21} = 4ad_{21} \{ \sinh(H_{2r}) \cos(\alpha H_{2r}) - \alpha \cosh(H_{2r}) \sin(\alpha H_{2r}) \} \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$\tau_{r\theta 21} = -4d_{21} \cosh(H_{2r}) \cos(\alpha H_{2r}) \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$U_{r21} = \frac{k_1 + 1}{2G_1} 2ad_{21} \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(H_{2r}) \sin(\alpha H_{2r})$$

$$U_{\theta 21} = -\frac{k_1 - 1}{2G_1} 2ad_{21} \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(H_{2r}) \cos(\alpha H_{2r})$$

であり，関数 ϕ_2, ϕ_2 による接合線外側の応力と変位は

$$\sigma_{r22} = 4ad_{22} \{ -\sinh(H_{2r}) \cos(\alpha H_{2r}) + \alpha \cosh(H_{2r}) \sin(\alpha H_{2r}) \} \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$\tau_{r\theta 22} = 4d_{22} \cosh(H_{2r}) \cos(\alpha H_{2r}) \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$U_{r22} = \frac{k_2 + 1}{2G_2} 2ad_{22} \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(H_{2r}) \sin(\alpha H_{2r})$$

$$U_{\theta 22} = \frac{k_2 - 1}{2G_2} 2ad_{22} \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cosh(H_{2r}) \cos(\alpha H_{2r})$$

となる。接合線内側と外側の応力は， $d_{21} = -d_{22}$ より連続となる。

ϕ_1, ϕ_1 と ϕ_2, ϕ_2 をそれぞれ単独に解析解とする場合は円周上の変位の連続条件が満足されないので，両者を重ね合わせることににより条件を満たすようにする。

円周上の $|\theta| > \omega + \beta$ 部分の変位条件式を式 (3.5) に示し，式 (3.6) に行列式で具体的に示す。

$$\left. \begin{aligned} (U_{r11} + U_{r21}) - (U_{r12} + U_{r22}) &= 0 \\ (U_{\theta 11} + U_{\theta 21}) - (U_{\theta 12} + U_{\theta 22}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k_2 - 1}{G_2} - \frac{k_1 - 1}{G_1}\right) \cosh \frac{\alpha\pi}{2}, & -\left(\frac{k_2 + 1}{G_2} + \frac{k_1 + 1}{G_1}\right) \sinh \frac{\alpha\pi}{2} \\ \left(\frac{k_2 + 1}{G_2} + \frac{k_1 + 1}{G_1}\right) \sinh \frac{\alpha\pi}{2}, & -\left(\frac{k_2 - 1}{G_2} - \frac{k_1 - 1}{G_1}\right) \cosh \frac{\alpha\pi}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix} = 0 \dots \dots \dots (3.6)$$

左辺の行列=0より，パラメータ α を定める式

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \log \left\{ \frac{\frac{k_2 + 1}{G_2} + \frac{k_1 + 1}{G_1}}{\frac{k_1 + 1}{G_1} + \frac{k_2 + 1}{G_2}} \right\} \dots \dots \dots (3.7)$$

が得られるが， α は Bi-Elastic Constant であり， d_{11} と d_{21} の係数比は式 (3.8) となる。

$$\frac{d_{11}}{d_{21}} = -\frac{-\left(\frac{k_2 + 1}{G_2} + \frac{k_1 + 1}{G_1}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left(\frac{k_2 - 1}{G_2} - \frac{k_1 - 1}{G_1}\right) \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \dots \dots \dots (3.8)$$

(2) 第2の解析解

第2の解析解として式 (3.3), (3.4) に虚数単位 i を乗じた解を採用する。これを式 (3.9)~(3.12) に示す。

$$\phi = d_3 z F_3 + d_4 z F_4 = \psi_3 + \psi_4 \dots \dots \dots (3.9)$$

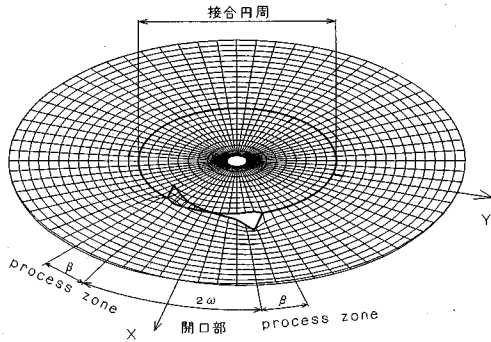


図-8 (1) 変位 U_r

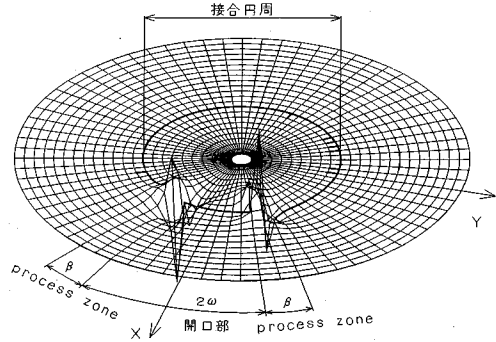


図-10 (1) 応力 σ_r

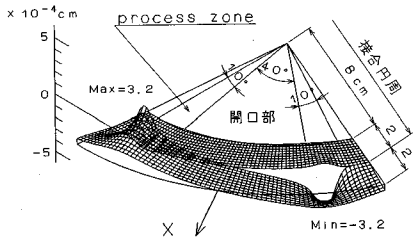


図-8 (2) 変位 U_r (開口部拡大)

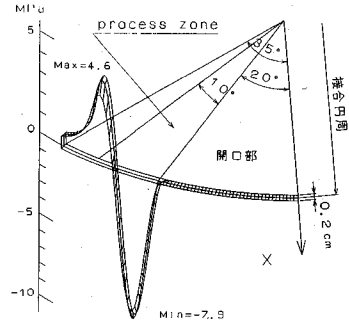


図-10 (2) 応力 σ_r (開口部拡大)

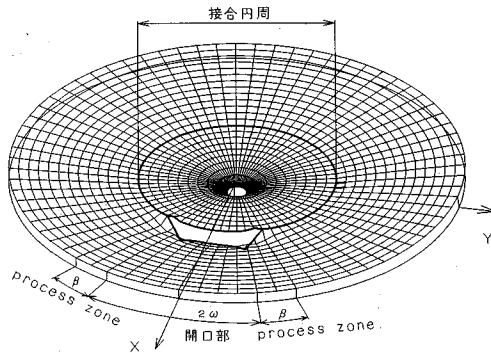


図-9 (1) 変位 $U_θ$

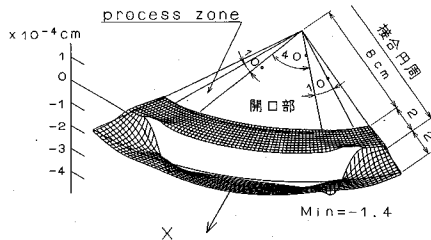


図-9 (2) 変位 $U_θ$ (開口部拡大)

$F_4 = -i \sinh(1+i\alpha)H_2 + i \sinh(1-i\alpha)H_2 \dots (3.12)$
 第1の解と同様に照査を行うと、パラメータ α は式 (3.7) を満足し d_{31} , d_{41} の係数比は次のようになる。

$$\frac{d_{31}}{d_{41}} = -\frac{\left(\frac{k_2+1}{G_2} + \frac{k_1+1}{G_1}\right) \sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left(\frac{k_2-1}{G_2} - \frac{k_1-1}{G_1}\right) \cosh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \dots (3.13)$$

4. 計算例

第1, 第2の解は境界条件を満足しているが、process zone における開口形状がクラック中心部より大きくなったり互いにめり込む状態になる。しかし、2つの解を重ね合わせるにより不都合な状況が相殺されて自然状況に近い形状が得られる。このため、計算例としてそれぞれの解の結果は割愛し重ね合わせの結果のみを示す。

計算モデル(平面ひずみ)(図-2)は鋼の周りにコンクリートが打設された構造体を想定して、内側弾性体(領域 $r \leq a$)の弾性係数を $E_1 = 2.06 \times 10^8 \text{ MPa}$, $\nu_1 = 0.3$ とし、外側弾性体(領域 $r > a$)の弾性係数を $E_2 = E_1/7$, $\nu_2 = 0.167$ とする。未接合部の区間 $|\theta| \leq \omega$, $\omega = 20^\circ$, process zone $\beta = 10^\circ$ とし、単純ねじり荷重 $T = 9.8 \text{ kN}$ を作用させる。内側, 外側の接合線半径 $a = 10 \text{ cm}$ とする。

結果を図-8~図-12(変位 U_r , $U_θ$ と応力度 σ_r , $\sigma_θ$,

$$\phi' = d_3(-a^2 F_3) + d_4 a^2 \left(-\frac{2}{z} F_4 - F_4'\right) = \phi_3' + \phi_4' \dots (3.10)$$

d_3, d_4 : 係数 a : 異なる材質の接合線の半径

$$F_3 = i \cosh\{(1+i\alpha)H_2\} + i \cosh\{(1-i\alpha)H_2\} \dots (3.11)$$

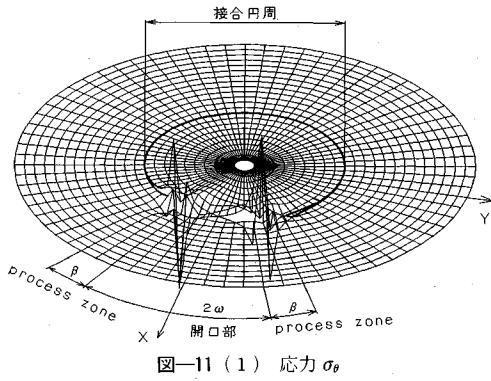


図-11 (1) 応力 σ_θ

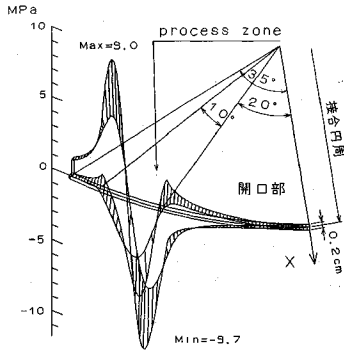


図-11 (2) 応力 σ_θ (開口部拡大)

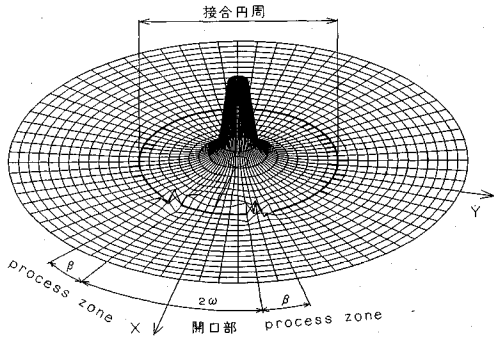


図-12 (1) 応力 $\tau_{r\theta}$

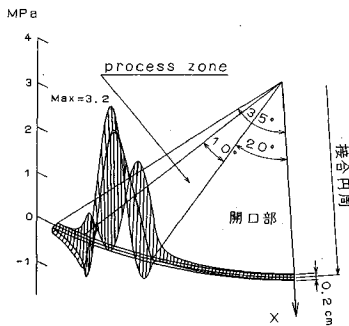


図-12 (2) 応力 $\tau_{r\theta}$ (開口部拡大)

$\tau_{r\theta}$) に示す。図は解の特性を判り易くするため全体形状図と開口部拡大図の2種類とした。開口部拡大図の応力表示範囲は角度方向に 35° 、接合線に沿う $r=10 \pm 0.1$ cm の帯状域とし、角度は 0.5° 、半径方向は $r=0.1$ cm ピッチで応力度を求め、半径・円周方向に応力分布図を描いて表示した。また、process zone 領域の応力と変位が判別し易いように $\beta (=10^\circ)$ を大きく設定した。

a) 境界上の開口部において応力度 $\sigma_r, \tau_{r\theta}=0$ は完全に成立して、process zone では集積特異点の特徴は現れずに有限で滑らかな応力集中が構成されている。

b) 変位 U_r, U_θ についても滑らかな開口部が形成されている。

c) 中心に集中ねじり力を受けているために $\tau_{r\theta}$ の分布は原点で無限大となっている。

d) 本研究で導いた解は完全な弾性解でありながらクラック周辺における応力と変位が共存する部分を表現できた。

5. むすび

本研究のインターフェイスクラック問題の解と従来の解とを対比させると次のような特性がまとめられよう。

(1) 応力集中の特性

2次元弾性問題としてのクラック先端部分の応力分布は次のような特性を備えている。

a) 一様な弾性体中ではクラックの先端部分が有限な曲率を持つ開口を形成しているならば有限な応力集中となり、曲率が無限大に成りながら応力と開口が併存する区間が存在しなければ(本研究で $\beta=0$) 応力集中は無限大になる。

b) 異質弾性体接合面では先端部で曲率が無限大でさらに応力と開口が併存する区間が無い場合、応力集中は単に無限大であるだけでなく集積特異点の形状を呈す。

c) 開口部分の先端に応力と開口が併存する区間が存在する(本研究におけるように $\beta \neq 0$ である) 場合、特異点は緩和されて有限な応力分布となる。

d) 境界面の接合部分における変位の連続条件 (Bi-Elastic Constant α を決定する条件式) は、開口変位と応力の併存区間を設けない場合も本研究のように設定する場合も併存区間を含めて同じ条件式が成立し、接合線が円形でも直線状でも変化しない。

(2) process zone

本研究の応力と開口変位が併存するという区間 β は現実には process zone あるいは stress softening zone と呼ばれている部分に相当するが、この部分について次の事柄を強調したい。

a) 鋼材の場合、現実的にこの部分は降伏応力が現れて大きな塑性伸びの生じている領域であり、開口ではないとされている。コンクリートや岩盤のような材料の場

合はマイクロクラックが発生している領域である。

b) これに対して本研究では Dugdale³¹⁾ の解も含め応力関数はすべて全領域で弾性解よりなっていて、歪とは別に大きな開口変位を伴っている。この開口変位は弾性変形によって構成されているにも拘らず、塑性伸びが大きく耐力が低下し始めている状態を近似的に現しているとみなし得よう。このような区間を設けて実験結果と数値解とを一致させる研究の報告例は Cho³²⁾ 等あるいは Wium³³⁾ 等である。これらの研究の数値解析は有限要素法によるものであるが本研究の応力関数の方がより簡単にかつ詳細な数値結果を提供し易い。

c) Dugdale では平均応力が如何なる大きさでも応力分布はクラック先端で一定の降伏応力へ直立している(無限大の応力勾配)、本研究の解によるものは緩やかな勾配で有限な応力が現れる。これはファイバコンクリートのクラックの実験的研究を行って報告している Wecharatana³⁴⁾ 等あるいは Visalvanich³⁵⁾ 等の研究結果に有効な解析手法を提供することになる。

(3) 本研究の限界

本研究では異質弾性体の未接合領域近傍の問題で、不合理な特異点は無く滑らかな応力集中を与える弾性解を導き得た。この解は未接合部の先端部分で大きな開口変位を伴うので、実際には塑性域を伴って現れる変形状態の1つを現実的な応力分布の弾性解で近似的に表現できることを示したものである。しかし、解析方法は各弾性体の物理的な材料特性(破壊機構)を考慮せずに、全領域を弾性体とみなして数学的に導き得る応力関数を導くことに主眼を置いたものである。したがって解析解として表現する可能性を示し得ても実際の現象を説明し得たものではない。関数 $H_0(z)$ の重み積分において重みを変えることに依って応力集中の形状を微妙に変更し得る自由度が存在して確定的なことは決定し難いこと、 β の大きさを如何なる値とするべきかと言う問題等が重要な問題として残されている。視点を変えると重み関数の形状を変更することによって如何なる応力分布にも対応し得ることになる。

参考文献

- 1) Williams, M.L. : The Stress around a Fault of Crack in Dissimilar Media, Bull. of Seismological Society of America, Vol.49, pp.199~204, 1959.
- 2) Erdogan, F. : Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 32, pp.403~410, 1965.
- 3) England, A.H. : A Crack between Dissimilar Media, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 32, pp.400~402, 1965.
- 4) Rice, J.R. and Sih, G.C. : Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 32, pp.418~423, 1965.
- 5) Comninou, M. : The Interface Crack, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 44, pp.631~636, 1977.
- 6) Comninou, M. : A Property of Interface Dislocations, Philosophical Magazine, 36, pp.1281~1283, 1977.
- 7) Comninou, M. : The Interface Crack in a Shear Field, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 45, pp.287~290, 1978.
- 8) Comninou, M. and Schmueser, D. : The Interface Crack in a Combined Tension Compression and Shear Field, Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech., 46, pp.345~348, 1979.
- 9) Comninou, M. and Dundurs, J. : On the Behavior of Interface Cracks, Res. Mechanics, 1, pp.249~264, 1980.
- 10) Atkinson, C. : The Interface Crack with a Contact zone (an Analytical Treatment), Inter. J. of Fracture, 19, pp.131~138, 1982.
- 11) Itou, S. : Stresses around an Interface Crack, Eng. Fract. Mech., Vol.25, No.4, pp.415~420, 1986.
- 12) Itou, S. : Transient Stresses around an Interface Crack, Eng. Fract. Mech. Vol.25, No.4, pp.475~482, 1986.
- 13) Duan, S., Yazaki, H. and Nakagawa, K. : A Crack at the Interface of an Elastic Half Plane and a Rigid Body, Eng. Fract. Mech., Vol.32, No.4, pp.573~580, 1989.
- 14) Nakagawa, K., Anma, T. and Duan, S. : A Mathematical Approach of the Interface Crack between Dissimilar Anisotropic Composite Materials, Eng. Fract. Mech. Vol.36, No.3, pp.439~449, 1990.
- 15) Duan, S., Yazaki, H., Fujii, K. and Nakagawa, K. : A Mathematical Approach of the Interface Crack with a Fracture Process Zone, Research Report of the Faculty of Eng., Gifu Univ. No.41, pp.1~10, 1991.
- 16) Westergaard, H.M. : Bearing Pressures and Cracks, J. of Appl. Mech., Tran. of the ASME, 33, A-49~53, 1939.
- 17) Gdoutos, E.E., Rattis, M.A., Argyrokosta, V.K., Koussougeras, T.J. and Papanelopourou, M.C. : Tow Circular-Arc Cracks in an Infinite Elastic Plate, Eng. Fract. Mech., Vol.39, No.4, pp.671~681, 1991.
- 18) Hasebe, N., Keer, L.M. and Nasser, S.N. : Stress Analysis of Kinked Crack Initiating from a Rigid Line Inclusion, Part 1 : Formulation, Mech. of Materials, Vol.3, pp.131~145, 1984.
- 19) Hasebe, N., Nasser, S.N. and Keer, L.M. : Stress Analysis of Kinked Crack Initiating from a Rigid Line Inclusion, Part 2 : Direction of Propagation, Mech. of Materials, Vol.3, pp.147~156, 1984.
- 20) Hasebe, N. and Miura, M. : Stress Analysis of a Crack at an End of Partly Embedded Strip, Proc. of JSCE, Struct. Eng., Vol.2, No.2, pp.345~352, 1985.
- 21) Hasebe, N. and Takeuchi, T. : Stress Analysis of a Semi-infinite Plate with a Thin Rigid Body, Int. J. Eng. Sci., Vol.23, No.5, pp.531~539, 1985.
- 22) Hasebe, N., Okumura, M. and Nakamura, T. : Stress Analysis of a Debonding and a Crack around a Circular Rigid Inclusion, Int. J. of Fracture, Vol.32, pp.169~183, 1987.
- 23) Hasebe, N., Okumura, M. and Nakamura, T. : A Debonding and a Crack on a Circular Rigid Inclusion

- subjected to Rotation, *Int. J. of Fracture*, Vol.33, pp.195~208, 1987.
- 24) 奥村幹也・長谷部宣男・中村卓次：有限部で接合された異材半平面の剝離端からのクラックや剝離の発生条件, 土木学会論文集, No. 428/I-15, pp. 77~86, 1991年4月.
- 25) 上田 稔・長谷部宣男・児島清隆・中村卓次：ひし形剛体介在物の界面はく離進展特性の破壊力学的研究, 土木学会論文集, No. 455/I-21, pp. 45~54, 1992年10月.
- 26) 水嶋 巖・浜田 実・赤土雄美：剛性円形充てん物を持つ無限平板の引張りと圧縮, 日本機械学会論文集 (A編), 44巻, 377号, pp. 15~21, 1978年1月.
- 27) 水嶋 巖・浜田 実・草野直史：円形充てん物を持つ無限平板の引張りと圧縮, 日本機械学会論文集 (A編), 45巻, 389号, pp. 27~32, 1979年1月.
- 28) 水嶋 巖・浜田 実・北川 浩：剛性円形充てん物を持つ無限平板の引張りと圧縮 (摩擦がある場合), 日本機械学会論文集 (A編), 48巻, 425号, pp. 42~47, 1982年1月.
- 29) 水嶋 巖・浜田 実：剛性円形充てん物を持つ無限平板の応力解析, 日本機械学会論文集 (A編), 48巻, 436号, pp. 1544~1550, 1982年12月.
- 30) 段樹金・児嶋弘行・中川建治：亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数, 土木学会論文集, No. 374/I-6, pp. 399~407, 1986年10月.
- 31) Dugdale, D.S. : Yielding of Steel Sheets Containing Slits, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.8, pp.100~104, 1960.
- 32) Cho, K.Z., Kobayashi, A.S., Hawkins, N.M., Barker, D.B. and Jeang, F.L. : Fracture Process Zone of Concrete Cracks, *J. of Eng. Mech.*, Vol.110, No.8, pp.1174~1184, 1984.
- 33) Wium, D.J.W., Buyukozturk, O. and Li, V.C. : Hybrid Model for Discrete Cracks in Concrete, *J. of Eng. Mech.*, Vol.110, No.8, pp.1211~1227, 1984.
- 34) Wecharatana, M. and Shah, S.P. : A Model for Predicting Fracture Resistance of Fiber Reinforced Concrete, *Cement and Concrete Research*, Vol.13, pp.819~829, 1983.
- 35) Visalvanich, K. and Naaman, A. : Fracture Model for Fiber Reinforced Concrete, *ACI J. Title No.8014*, pp.128~138, 1983.

(1993.1.18 受付)

STRESS ANALYSIS AROUND A CIRCULAR INTERFACE CRACK BETWEEN DISSIMILAR MEDIA

Yasuhiko MURASE and Kenji NAKAGAWA

The subject of this paper is to analyze the stress functions near the circular interface crack between dissimilar elastic media. These problems are researched many laboratories, but the results are to have accumurate singular point and no practical use. The proposed method is to perform weight integral calculus and to construct process zones at crack tips along the interface. It is shown that in the process zone both finite stress and opening displacement exist but no oscillation appears.