

帯状載荷に対する全無限弾性体の遷移 グリーン関数評価と半無限／層状地盤の 表面載荷による波動伝播性状

竹宮宏和*・祐保芳樹**

本論文では、一様な全無限媒質の帯状急激載荷に対する遷移応答（変位、応力）を2次元平面歪状態を仮定して評価している。評価法には、時間に関するラプラス変換と空間に関するフーリエ変換を採用している。本グリーン関数の初期境界値問題への時間領域境界要素法（間接法）による適用として、半無限地盤への表面載荷（Lamb）問題を対象にしてレイリー波の影響を調べると共に、剛基盤上の表層地盤の場合の固有振動モードの影響について言及している。

Key Words : uniform strip loading, transient green function, Lamb problem, Rayleigh wave, soil stratum, eigenmodes

1. はじめに

半無限体の衝撃載荷に対する問題を Lamb (1904)¹⁾が最初に研究して以来、多くの研究者が2次元、3次元モデル化の下に、この基礎的で重要な課題（Lambの問題）に関わってきた。それは同解が地震学、弾性力学の分野で一様半無限体のグリーン関数を評価していることにはかならないからである。波動場として、特定の振動数を持つ調和波と衝撃力による遷移波動場があるが、特に後者の応答は時間領域グリーン関数を定義し、任意の加振時間関数に対しても合積分表現によって波動伝播の時間領域解析が可能となる。

Lambの問題は、2次元平面問題で面内波動を対象とした場合、P波とSV波それにレイリー波の伝播の場である²⁾。応答評価を自由表面に限定した解が積分変換法を通して解析的に求められているが、そのときの逆変換を周回積分によるものと、変数変換によって自動的に求まる Cagniard-de Hoop 法³⁾がとられて来た⁴⁾。しかし、媒体内部の応答を必要とする場合、これらの手法の適用は非常にむづかしいことから、最近の傾向として境界要素法の適用が見られる^{5)~8)}。筆者らは、半無限体の内部応答を評価するに当たって、まず、最初に逆ラプラス変換を周回積分で行い、その後逆フーリエ変換を解析的に求め、前者の効率的な数値積分する手法を開発した^{9),10)}。

対象とする問題によっては、例えば剛基盤上の成層地盤の場合、無限体内のソースによるグリーン関数を必要とする。これに基づいて境界要素法で初期値境界値問題を解くことが容易なケースも多い。このことから本研究では全無限体への載荷解に注目し、上記の半無限体解と同様な手法で解を求めている。著者ら^{11),12)}は、以前に境

界要素法の定式化で、支配方程式の中の空間積分に関して被積分関数は内挿関数に従う分布載荷による解と解釈し、グリーン関数の特異性を解析的に処理した解は従来の数値積分（ガウス求積法）に比べて、CPUと精度において優れており有用性があることを強調した。本研究でも一様な全無限体への分布載荷の下で時間領域グリーン関数を評価している。ただし本解に基づいた初期境界値問題への時間領域境界要素法は間接法から定式化している。

以上の全無限／半無限遷移解を利用した例題解析として、(1)半無限地盤の表面載荷問題（平面ひずみ仮定）を対象に半無限解との比較でレイリー波の影響を調べている。(2)地盤のモデル化で半無限体としたときと、剛基盤上の表層地盤としたときの遷移波動場を比較して後者の場合の固有振動モード効果について言及している。

2. 波動方程式と一般解

波動ソースを持つ2次元弾性体内の波動伝播は、一般に実体波としてのS波とP波を含み、変位ポテンシャル ϕ と φ による対象場（ xz 平面）の波動方程式は

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\gamma_\alpha \dots \dots \dots (1)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\gamma_\beta \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 α 、 β はそれぞれP波およびS波の速度、 γ_α 、 γ_β はそれぞれ波動ソースを定義し、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ は2次元のラプラシアンである。

いま、対象の媒体は初期条件として静止の状態において衝撃載荷を受けると仮定する。つまり

$$\phi(x, z, 0) = \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

* 正会員 工博 岡山大学教授 工学部土木工学科 (〒000 岡山市津島中3)

** 同大学院生

$$\varphi(x, z, 0) = \frac{\partial \varphi(x, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (4)$$

この初期境界値問題を解くに際して、解法として、時間 t に関するラプラス変換へ、空間座標 x に関するフーリエ変換により、ラプラス・フーリエ領域のポテンシャル表現による Helmholtz の方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} - k_\alpha^2 \bar{\phi} + \bar{\gamma}_\alpha = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} - k_\beta^2 \bar{\varphi} + \bar{\gamma}_\beta = 0 \quad (5)$$

ここに

$$k_\alpha = \sqrt{\frac{p^2}{\alpha^2} + \xi^2}, \quad k_\beta = \sqrt{\frac{p^2}{\beta^2} + \xi^2}$$

p はラプラス変数、 ξ は x -軸方向の波動伝播に関する波数である。この微分方程式の一般解は放射波条件を満足するものとして、ソース位置を原点にとると

$$\bar{\phi} = A(\xi, p) e^{-k_\alpha z} \quad (7)$$

$$\bar{\varphi} = B(\xi, p) e^{-k_\beta z} \quad (8)$$

と表される。ただし係数 $A(\xi, p)$ 、 $B(\xi, p)$ は波数 ξ を含む未知係数である。これらは加振力と与えられた境界条件により決定される。

変位、応力解はポテンシャル ϕ 、 φ を偏微分して得られる歪みから一般化されたフックの法則を通して求められる。つまり、

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \nabla^2 + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 2\mu \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ 2\mu \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここに λ 、 μ は媒体の物性を規定するラーメ弾性定数である。

3. 全無限弾性体の荷荷状態

無限弾性体において時間依存の帯状荷荷を x 、 z 方向に受けるとする。

$$p_x(x, z, t) = h(x) T(t) \quad (11)$$

$$p_z(x, z, t) = g(x) T(t) \quad (12)$$

ただし $h(x)$ 、 $g(x)$ はそれぞれ水平、鉛直力の x 方向の分布を与え、 $T(t)$ は時間変動を定義している。応答計算においては、特解を直接に求めるのではなく、作用面において二分した半無限体に対する斉次解において表面力の作用を境界条件として解く。つまり、無限体地盤の内部で鉛直方向に分布作用力 $g(x)$ が時間 $T(t)$ に

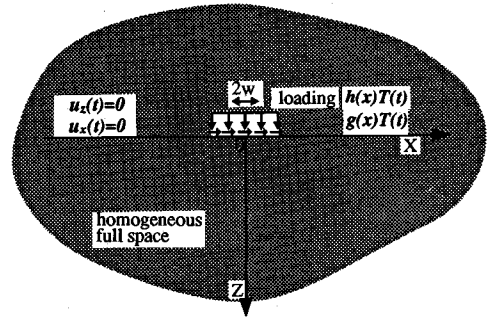


Fig.1 Boundary Condition of a Fullspace Subjected to Strip Loading.

いて作用する場合 (Fig.1 参照) は変形の z -軸についての対称性を、一方、水平方向の分布作用力 $h(x)$ が x 軸の正の方向に作用する場合は変形の逆対称性を利用することで、それぞれ下半分の媒質を解析対象にすればよい。そのとき $z=0$ 面上での変位、表面力に関する混合境界条件を得る。

水平荷荷に対して

$$\sigma_{xxx}(x, 0, t) = \frac{1}{2} h(x) T(t) \text{ and } u_z(x, 0, t) = 0 \quad (13)$$

鉛直荷荷に対して

$$\sigma_{zzz}(x, 0, t) = \frac{1}{2} g(x) T(t) \text{ and } u_x(x, 0, t) = 0 \quad (14)$$

対応するラプラス、フーリエ変換はそれぞれ

$$\bar{\sigma}_{xxx}(\xi, 0, p) = \frac{1}{2} \bar{h}(\xi) \hat{T}(p) \text{ and } \bar{u}_z(\xi, 0, p) = 0 \quad (15)$$

$$\bar{\sigma}_{zzz}(\xi, 0, p) = \frac{1}{2} \bar{g}(\xi) \hat{T}(p) \text{ and } \bar{u}_x(\xi, 0, p) = 0 \quad (16)$$

これらより決定される係数を変位式 (9) に代入してラプラス、フーリエ変換領域の解が求まる。変位に関しては

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{xx}(\xi, p) & \bar{u}_{xz}(\xi, p) \\ \bar{u}_{zx}(\xi, p) & \bar{u}_{zz}(\xi, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{xx}(\xi, p) & \bar{U}_{xz}(\xi, p) \\ \bar{U}_{zx}(\xi, p) & \bar{U}_{zz}(\xi, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}(\xi)/2 & 0 \\ 0 & \bar{g}(\xi)/2 \end{bmatrix} \hat{T}(p) \quad (17)$$

ただし

$$\bar{U}_{xx}(\xi, z, p) = \left(\frac{\beta^2}{p^2 \mu} \right) \left\{ \frac{\xi^2}{k_\alpha} e^{-k_\alpha z} - k_\beta e^{-k_\beta z} \right\} \quad (18. a)$$

$$\bar{U}_{xz}(\xi, z, p) = - \left(\frac{\beta^2}{p^2 \mu} \right) (i\xi) \left\{ e^{-k_\alpha z} - e^{-k_\beta z} \right\} \quad (18. b)$$

$$\bar{U}_{zx}(\xi, z, p) = - \left(\frac{\beta^2}{p^2 \mu} \right) (i\xi) \left\{ e^{-k_\alpha z} - e^{-k_\beta z} \right\} \quad (18. c)$$

$$\bar{U}_{zz}(\xi, z, p) = \left(\frac{\beta^2}{p^2 \mu} \right) \left\{ -k_\alpha e^{-k_\alpha z} - \frac{\xi^2}{k_\beta} e^{-k_\beta z} \right\} \quad (18. d)$$

時間、空間領域へは逆ラプラス、逆フーリエ変換演算により、式(18)に対しては

$$u_{kl}(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{u}_{kl}(\xi, z, p) \left(\frac{\bar{h}(\xi)}{2} \text{ or } \frac{\bar{g}(\xi)}{2} \right) \hat{T}(p) e^{pt} dp e^{-i\xi x} d\xi \quad (k, l=x, z) \dots (19)$$

この演算は、まず、逆ラプラス変換を p -複素平面上の周回積分で置き換え、 $P=i|\xi|\eta$ と変数変換して半無限積分を遂行する。その際、 $p=0$ における留数と P 波および S 波の波数における分岐点が存在するので数値積分には Clenshaw-Curtis 法¹³⁾ が適している。逆フーリエ変換は積分公式¹⁴⁾ を利用して解析的に求められる。

$t=0$ での衝撃载荷については $T(t)=\delta(t)$ 、急激载荷については $T(t)=H(t)$ として表現される。但し $\delta(t)$ はデルタ関数、 $H(t)$ はヘヴィサイド関数を定義する。前者のインパルス応答 $U_{kl}(x, z, t)$ が求められていると、任意の時間変動 $T(t)$ による応答は、変位に関しては初期条件の式(13)を考慮して合積の形で得られる。

$$u_{kl}(x, z, t) = \int_0^t U_{kl}(x, z, \tau) T(t-\tau) d\tau \dots (20)$$

応力に関しては変位 U_{kl} から式(10)で得られる応力を Σ_{kij} とすると、初期条件の式(13)、(14)で応力 $\sigma_{kij}(x, 0, 0)$ の载荷を考慮して

$$\sigma_{kij}(x, z, t) = \int_0^t \Sigma_{kij}(x, z, \tau) T(t-\tau) d\tau + \delta_{iz} \delta(z) \sigma_{kij}(x, 0, 0) \dots (21)$$

ただし δ_{iz} はクロネッカーのデルタを意味する。また急激载荷の応答は時間変動のラプラス変換を $\hat{T}(p)=1/p$ として式(19)から求められる。

特別な载荷状態として、 x -方向の空間分布 $h(t)$ 、 $g(t)$ が幅 $2w$ にわたって一様分布、時間変動 $T(t)$ がヘヴィサイドのステップ関数で与えられる場合を以下に記す。つまり

$$h(x), g(x) = \begin{cases} 1 & w \geq |x| \\ 0 & w < |x| \end{cases} \Leftrightarrow \bar{h}(\xi), \bar{g}(\xi) = \frac{2 \sin w\xi}{\xi} \dots (22)$$

$$T(t) = H(t) \Leftrightarrow \hat{T}(p) = 1/p \dots (23)$$

その結果、変位について

$$u_{xx}(x, z, t) = -\frac{4\beta^2}{\pi^2\mu} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\chi_1}{\eta^3 a} d\eta + \frac{4\beta^2}{\pi^2\mu} \int_{\beta}^{\infty} \frac{b\chi_1}{\eta^3} d\eta \dots (24. a)$$

$$u_{zz}(x, z, t) = \frac{4\beta^2}{\pi^2\mu} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\chi_2}{\eta^3} d\eta - \frac{4\beta^2}{\pi^2\mu} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\chi_2}{\eta^3} d\eta \dots (24. b)$$

$$u_{xz}(x, z, t) = -\frac{4\beta^2}{\pi^2\mu} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\chi_2}{\eta^3} d\eta + \frac{4\beta^2}{\pi^2\mu} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\chi_2}{\eta^3} d\eta \dots (24. c)$$

$$u_{zz}(x, z, t) = \frac{4\beta^2}{\pi^2\mu} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{a\chi_1}{\eta^3} d\eta - \frac{4\beta^2}{\pi^2\mu} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\chi_1}{b\eta^3} d\eta \dots (24. d)$$

応力成分は式(10)から

$$\sigma_{zzz} = -\frac{4}{\pi^2} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{(2\beta^2 - \eta^2)\chi_1}{\eta^3 a} d\eta - \frac{8\beta^2}{\pi^2} \int_{\beta}^{\infty} \frac{b\chi_1}{\eta^3} d\eta \dots (25. a)$$

$$\sigma_{zzz} = \frac{8\beta^2}{\pi^2} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\chi_2}{\eta^3} d\eta - \frac{4}{\pi^2} \int_{\beta}^{\infty} \frac{(2\beta^2 - \eta^2)\chi_2}{\eta^3} d\eta \dots (25. b)$$

$$\sigma_{zzz} = \frac{4}{\pi^2} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{(2\beta^2 - \eta^2)\chi_2}{\eta^3} d\eta - \frac{8\beta^2}{\pi^2} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\chi_2}{\eta^3} d\eta \dots (25. c)$$

$$\sigma_{zzz} = -\frac{8\beta^2}{\pi^2} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{a\chi_1}{\eta^3} d\eta - \frac{4}{\pi^2} \int_{\beta}^{\infty} \frac{(2\beta^2 - \eta^2)\chi_1}{b\eta^3} d\eta \dots (25. d)$$

ここで第3番目の添字は载荷方向を指す。 $a = \sqrt{\eta^2/\alpha^2 - 1}$ 、 $b = \sqrt{\eta^2/\beta^2 - 1}$ 以上に含まれる関数 χ については、付録 A に記述しておく。

4. 半無限体地盤/剛基盤上の表層地盤解析への適用

地盤を半無限平面あるいは剛基盤面上の表層地盤としてモデル化して解析することがよく行われる。いま、地表に急激な载荷がある場合の波動伝播によるその周辺の応答に注目する。解析手法として、地表面および基盤面(剛な基盤を仮想する場合)を要素に分割し、各要素内では強度が一定の表面力(表面力が零も含めて)が作用しているものとする。半無限地盤解析では変位グリーン関数の計算のみで済む。一方、この状態に無限平面解を適用して、自由表面(未知強度の表面力の载荷)と表面力の载荷(既知強度)を表現することもできる。

任意の時間変動する载荷力に対して、時間刻み Δt の階段関数で近似表現ができるものとする。つまり、

$$T(t) = T^{(m)}(H(t-m\Delta t) - H(t-(m+1)\Delta t)) \quad m\Delta t \leq t \leq (m+1)\Delta t \dots (26)$$

ここに $T^{(m)}$ は m 番目の強度に相当する。このとき式(24)、(25)内の積分の関数 χ_i は

$$\chi_i(x; (m+1)\Delta t, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m T^{(m-j)} \sum_{k=j}^{j+1} (-1)^{j+k+1} \chi_i(x, t_k, \eta) \dots (27)$$

半無限体上に直接载荷あるいは剛体基礎を介しての载荷問題を考える。これらの境界条件は選点法により式(23)、(24)のグリーン関数を用いて表される。まず表面力が零の自由表面を作成するための作用力 $f^{(m)}$ を求める。そのため節点を自由地表面、剛体基礎と媒質のインターフェイスおよび剛基盤面に分け、それぞれに応じ

て下添字 s, c, r で識別すると、変位については、

$$\begin{Bmatrix} u_s \\ u_c \\ u_r \end{Bmatrix}^{(m)} = \sum_{j=0}^m \begin{bmatrix} F_{ss} & F_{sc} & F_{sr} \\ F_{cs} & F_{cc} & F_{cr} \\ F_{rs} & F_{rc} & F_{rr} \end{bmatrix}^j \begin{Bmatrix} f_s \\ f_c \\ f_r \end{Bmatrix}^{m-j} \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。また、この作用力に対応した各時間ステップにおいての表面力は

$$\begin{Bmatrix} t_s \\ t_c \\ t_r \end{Bmatrix}^{(m)} = \sum_{j=0}^m \begin{bmatrix} H_{ss} & H_{sc} & H_{sr} \\ H_{cs} & H_{cc} & H_{cr} \\ H_{rs} & H_{rc} & H_{rr} \end{bmatrix}^j \begin{Bmatrix} f_s \\ f_c \\ f_r \end{Bmatrix}^{m-j} \quad \dots\dots\dots (29)$$

式 (28) と (29) からカーレント・タイムでの作用力ベクトル $f^{(m)}$ を消去すると

$$\bar{H}^0 \bar{F}^0 \begin{Bmatrix} u_s \\ u_c \\ u_r \end{Bmatrix}^{(m)} = \begin{Bmatrix} t_s \\ t_c \\ t_r \end{Bmatrix}^{(m)} + \bar{H}^0 \left([F^0]^{-1} \sum_{j=1}^m F^j f^{m-j} - [H^0]^{-1} \sum_{j=1}^m H^j f^{m-j} \right) \quad \dots\dots\dots (30)$$

ただし、 \bar{F}, \bar{H} は式 (28), (29) の F, H において、変位 u_r と表面が t_r に対応した行を入れ換えたものを意味する。

そして自由表面の存在と剛基盤面は次の2つの境界条件を付与することになる。

$$\{t_s\}^{(m)} = 0, \{u_r\}^{(m)} = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

式 (30) において、剛体基礎を対象とする場合は、剛体インターフェイスを剛体結合条件による自由度の表現から次のように表す。

$$\begin{Bmatrix} u_s \\ u_c \\ t_r \end{Bmatrix}^{(m)} = \beta^T \begin{Bmatrix} u_s \\ \Delta \\ t_r \end{Bmatrix}^{(m)}, \begin{Bmatrix} t_s \\ P \\ u_r \end{Bmatrix}^{(m)} = \beta \begin{Bmatrix} t_s \\ t_c \\ u_r \end{Bmatrix}^{(m)} \quad \dots\dots\dots (32), (33)$$

ここに

$$\beta = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_n], \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_c \\ 0 & 1 & x_i \end{bmatrix}$$

但し Δ は、3自由度の剛体基礎の並進と回転を含む変位であり、 x_i は剛体インターフェイス節点の剛体中心 x -座標、 z_c は z -座標である。 P は、それに応じた3自由度の外力である。式 (32), (33) の変位、表面力の縮合操作を式 (30) に導入すると、

$$\beta \bar{H}^0 \bar{F}^0 \beta^T \begin{Bmatrix} u_s \\ u_c \\ t_r \end{Bmatrix}^{(m)} = \begin{Bmatrix} t_s \\ P \\ u_r \end{Bmatrix}^{(m)} + \beta \bar{H}^0 \left([F^0]^{-1} \sum_{j=1}^m F^j f^{m-j} - [H^0]^{-1} \sum_{j=1}^m H^j f^{m-j} \right) \quad \dots\dots\dots (34)$$

ただし

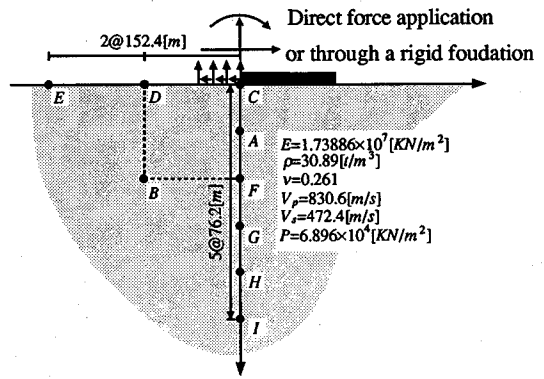


Fig.2 A Uniform Elastic Halfspace Subjected to Distributed Loads.

$$\begin{Bmatrix} f_s \\ f_c \\ f_r \end{Bmatrix}^{(m)} = [F^0]^{-1} \left(\begin{Bmatrix} u_s \\ u_c \\ u_r \end{Bmatrix}^{(m)} - \sum_{j=1}^m F^j \begin{Bmatrix} f_s \\ f_c \\ f_r \end{Bmatrix}^{m-j} \right)$$

となる。

5. 数値解析例

(i) 半無限体/全無限体への直接急激载荷による応答

全無限平面に対する本解のグリーン関数を用いて半無限平面内の波動伝播解析した場合の精度を検証するため、Antes のモデル (Antes and Trondle, 1990) において数値解析を実施した。境界要素分割は両者間で同一とした。そして本解析と同様な解法による半無限平面解 (Takemiya and Guan, 1992) とも比較した。対象媒体の物性定数は密度 $\rho = 30.89$ [t/m³]、弾性係数 $E = 1.724 \times 10^7$ [kN/m²]、ポアソン比 $\nu = 0.25$ で、P 波の伝播速度 $V_p = 830.6$ [m/s]、S 波の伝播速度 $V_s = 472.4$ [m/s] を与える。载荷状態として急激/衝撃载荷をとるが、その強度は $p = 6.89 \times 10^4$ [kN/m²]、载荷幅 $2w = 152.4$ [m] である。

一様な全無限平面が一様分布力を急激载荷された時 ($H(t)$ 型の時間変動) の変位応答を各深さにおいて計算した結果を Fig.3 に示す。同図には、半無限自由表面境界の効果を見るために、その境界条件を間接 BEM で考慮して解析した結果も比較のため併せて描いてある。波動伝播の観点から、P 波と S 波の到達に関する因果性が顕著に認められ、鉛直载荷時の鉛直方向変位には P 波が、一方、水平载荷時の水平変位には S 波が卓越してくることがわかる。地表面近くの応答にはレーリ波が存在し、鉛直、水平方向の変位成分共に貢献してくる。これは Fig.3 において全無限解と半無限解の差として評価され、水平成分よりも鉛直成分においての方が大きい。観測点 C 以深の水平変位では全無限解と半無限解の差が無くなって来ている。鉛直载荷では観測点 E

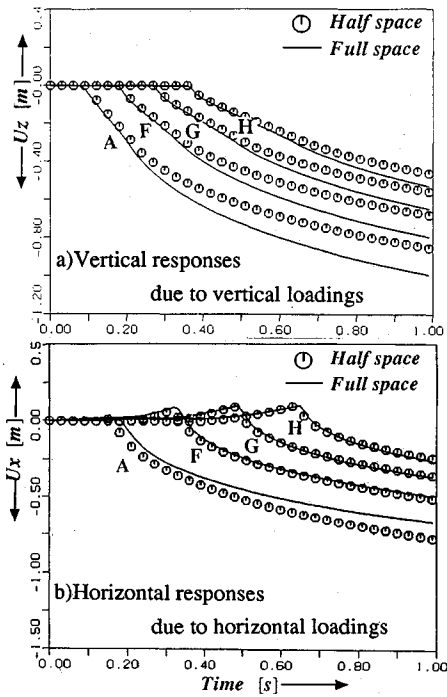


Fig.3 Displacement Green Functions of Fullspace/Halfspace for Uniform Strip Loads.

においても両者の差は僅かであるが認められる。

Fig.4 は、鉛直載荷時の鉛直成分、水平載荷時の水平成分応答（応力グリーン関数）を示したもので、波動の到達に関する因果性は完全に満足されている。全無限解と半無限解の差は地表面近くの C 点でレーリ波の到達以後で現われてくる。自由表面の境界条件の影響は変位の場合と同じ傾向にあるが、応力における方が大きい。

半無限地盤内の波動伝播の様相を調べるため、加振点の周辺の地表面の応答を計算し描いたのが Fig.5 である。これより P 波、S 波、そしてレーリ波の到達に関する因果性が $\delta(t)$ の時間関数の衝撃載荷による応答結果⁹⁾と同様に確認できる。本全無限グリーン関数の検証を Antes and trondle の解⁸⁾との比較から行ったが、両者は全く完璧なほどの一致を示している。しかし、これらを半無限グリーン関数と比較すると、鉛直載荷時の地表面鉛直応答に関して、観測点の水平距離が小さい場合は両者はよい一致を示しているが、水平距離が大きくなると前者の解では厳密にレーリ波の定式化ができていないため、半無限グリーン関数との差（この場合は載荷端からの距離を考える）がレーリ波の到達時刻以後において現われてきている。これは C 点において顕著に見られる。また載荷直下の A 点においても差が現われている。一方、水平載荷時の点 D、E の水平応答には P 波が卓越してくるので、全無限グリーン関数による BEM 解と半無限グリーン関数の差はほとんど無い。点 A から I

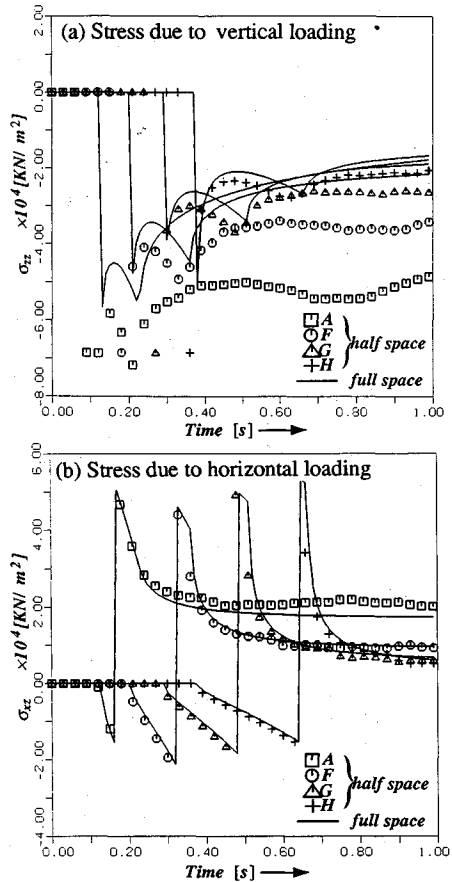


Fig.4 Stress Green Functions of Fullspace/Halfspace for Uniform Strip Loads.

の内部応答に関して、鉛直載荷時の鉛直方向応答には P 波が卓越しているの、深い点では両解の差は殆ど無い。水平載荷時の内部点の水平方向応答には S 波が支配的となるが、観測点が地表面に近いとレーリ波の影響が現われ、それは深さと共に指数的に減少し、全無限グリーン関数と一致してくることは既に述べた通りである。

本解析法による地盤内の応力解析を行った結果を Fig.6 に示す。比較対象は Antes and rondle 解⁸⁾である。いずれの解も P 波の伝播に関する因果性を満足しているが、S 波の到達の時刻ぐらいから手法による差が現われてきている。応力の基本解の特異性が変位のそれよりも高くそのための誤差と思われる。その点、本解は積分変換法からより解をより厳密に求めているため精度は高いものと判断される。しかし Fig.5 に見られるように内部点の変位解にまでは境界応力の特異性は影響して来てない。

(ii) 半無限/成層地盤上の基礎への衝撃載荷による応答

全無限グリーン関数の混合境界値問題への応用とし

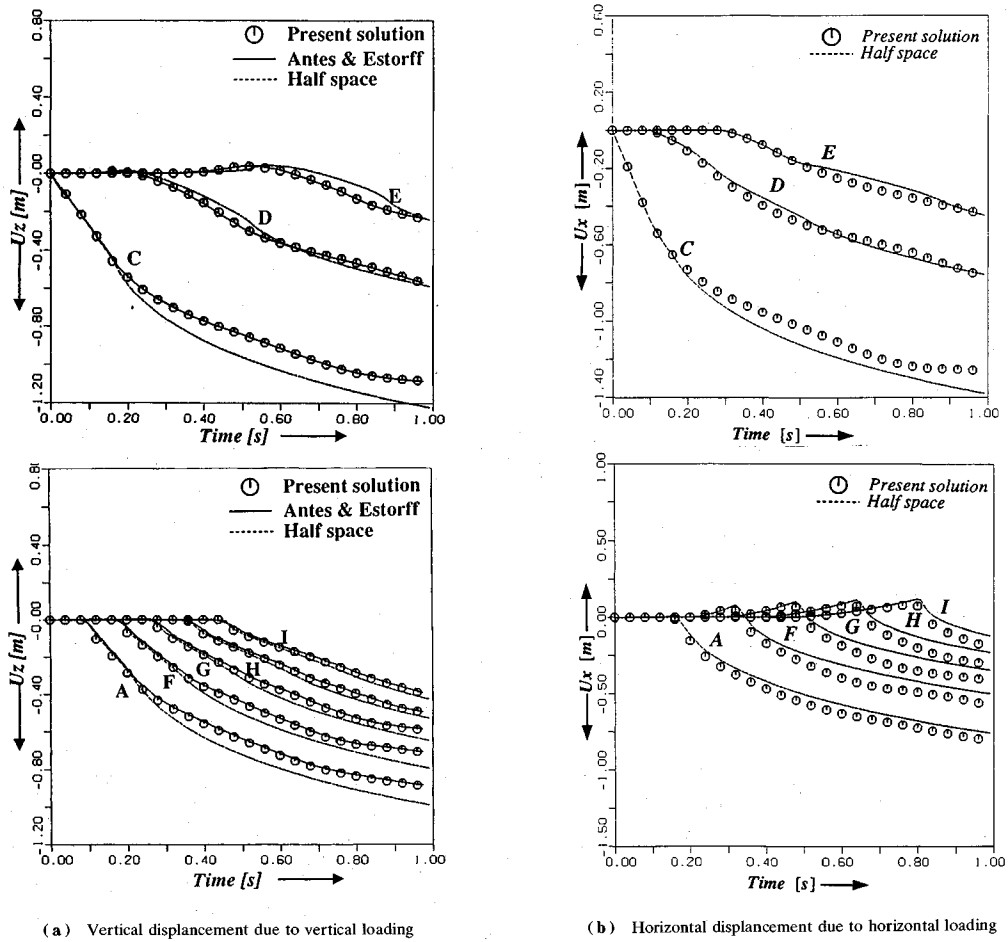


Fig.5 Surface and Interior Displacements due to Uniform Surface Loads.

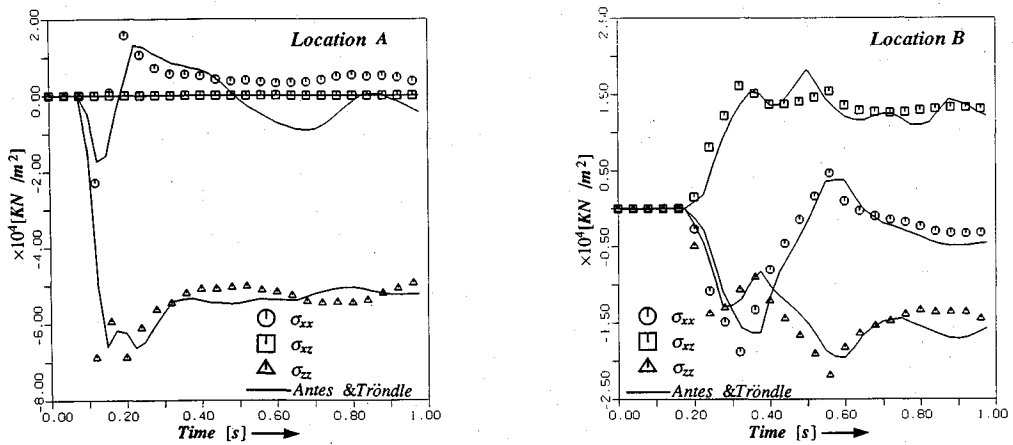


Fig.6 Interior Stress Responses at Field Points due to Uniform Vertical Loads.

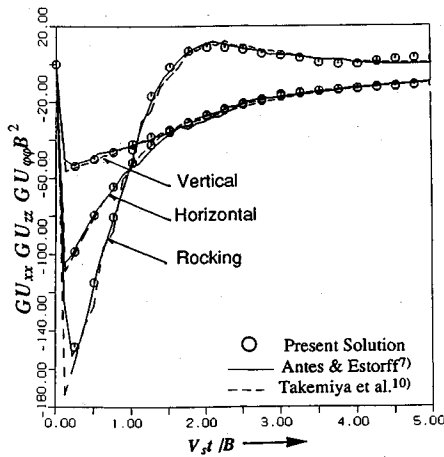
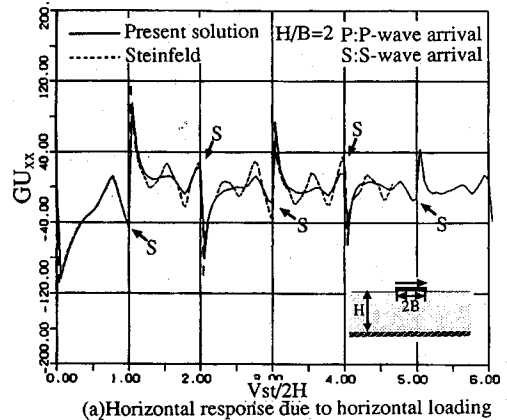


Fig.7 Displacement of a Rigid Surface strip Foundation on Halfspace due to 3 Impulse Loads.

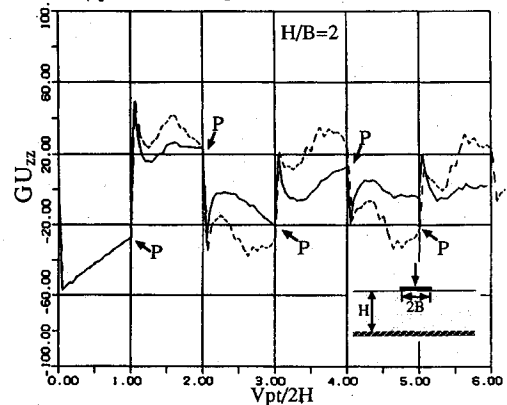
て、半無限地盤上と成層地盤（層厚 H ）上の無質量の表面基礎（基礎幅 $2B$ ）の衝撃応答を扱った。地盤の物性定数として、 S 波速度 $V_s = 223.6$ [m/s], P 波速度 $V_p = 443.9$ [m/s], ポアソン比 $\nu = 0.33$, 密度 $\rho = 2.0$ [t/m^3] と仮定した。表面基礎幅は $2w = 2$ [m], 基礎への水平/鉛直荷強度は $P_x = P_y = 1776$ [kN/m] とした。このモデルは, Antes and Estorff⁷⁾により用いられた。解析モデルの作成において, 全無限解を使用する際の自由表面境界の設置は, 基礎幅長を基礎の両サイドにとり, メッシュ長 Δl , 時間ステップ Δt は荷インパルスの時間長さにも因るが, 最適値として支配波動場(位相速度 V) において, $\Delta l/V\Delta t \approx 1$, $H/V\Delta t = \text{整数}$ となるようにした。

先ず半無限地盤の場合を対象とする。Fig.7は, 基礎の底面中央の応答の水平並進, 鉛直並進及び回転成分を無次元化して描いたものである。本解との比較として水平荷の水平成分に関して, Antes and Estorff (1990)⁷⁾ と Takemiya et al (1993)¹²⁾を示したが, これらは非常に良い一致を示している。

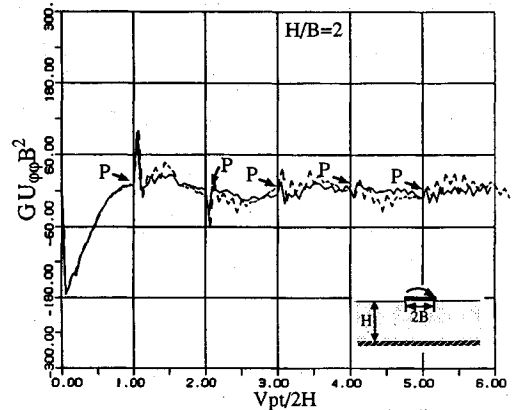
一方, 成層地盤の場合の水平力, 鉛直力および回転モーメント荷を独立に与えたときのそれぞれの応答を Fig.8 に示した。本解の検証において, まず Antes and Estorff 解と比較したが, 後者は減衰性が非常に大きい結果を与えている。しかし, その Steinfeld による修正解は本解との因果性に関して非常によい一致を示している。衝撃荷後の基礎から発する波動が成層地盤を往復伝播して再度基礎へ入射するために, S 波が卓越する水平荷の場合は $T = 2H/V_s$ で, P 波が卓越する鉛直, 回転モーメント荷の場合は $T = 2H/V_p$ で与えられる周期の後続応答が繰り返し現われる。但し, 側方無限遠への波動の逸散のため減衰性が見られる。基礎面での反射波動の減衰性は鉛直, 水平, 回転の順に大きくなる。



(a)Horizontal response due to horizontal loading



(b)Vertical response due to vertical loading



(c)Rocking response due to rocking loading

Fig.8 Influence of Stratum Depth to Displacement of a Rigid Surface Strip Foundation.

鉛直震動の場合は減衰性が非常に小さい。

次に, 半無限地盤モデルと成層地盤モデルの差異を, 層厚との関係において言及する。Fig.9は, 各荷パターンに対して層厚を $H/2B = 5, 10, 15, 20$ と変化した時の基礎の遷移応答の様相を描いたもので, 剛基礎による反射波動の減衰の推移を見ることができる。Fig.9(a)の鉛直荷において卓越反射波動場は P 波であり, 層厚の増大に従った減衰性が現われている。 $H/2B > 10$

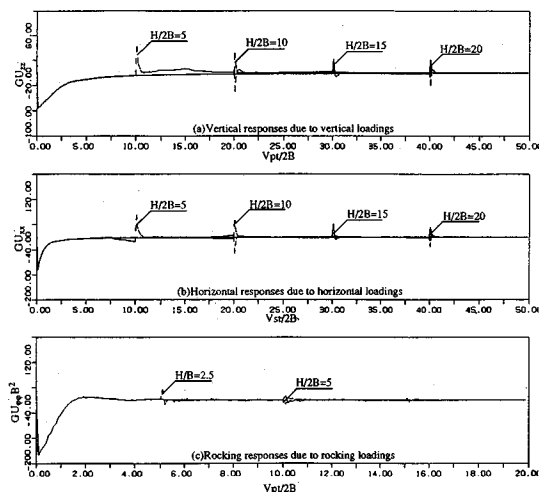


Fig.9 Displacement of a Rigid Surface Strip Foundation on Stratum due to 3 Impulse Loads.

では、散乱波による増幅は、ほぼ消失する。 $H/2B > 20$ では、反射波の効果も荷荷時の応答の 20% 程度に低下している。 Fig.9 (b) の水平荷荷においては、S 波の伝播が卓越し、その反射波の減衰性は、鉛直荷荷と比較して若干弱い。 Fig.9 (c) は、回転荷荷における遷移応答である。他の荷荷パターンと比較して非常に早く減衰性があらわれる。

6. むすび

本論文は、一様な全無限地盤の一様分布急激荷荷に対する遷移応答(変位, 応力のグリーン関数)を 2 次元平面モデル(平面歪状態)を仮定して、評価したものである。評価法は、時間に関するラプラス変換法と空間に関するフーリエ変換法を適用している。そして逆ラプラス変換を複素平面上の周回積分により行い、波数に関する逆フーリエ変換を解析的に求めて時間・空間領域の解としている。本グリーン関数を初期境界値問題の時間領域境界要素法(間接法)へ導入して行った例題解析から次の工学的に有用な知見を得た。

半無限地盤の表面衝撃荷荷問題の解析からは

(1) 基本解に基づく時間領域 BEM 解との比較で本解の妥当性は検証できたが、厳密な半無限解との比較では本解はレーリ波の伝播を厳密に定式化していないため、地表面近傍の領域によっては僅かな誤差が生じる。しかし、その誤差はレーリ波の到達以降で動的荷荷状態には問題とはならない。

(2) 観測点がある深さより以深になれば、自由地表面の境界条件を受けなくなる深さを確認できた。

衝撃に対する地盤と剛体基礎の動的相互作用解析から

(3) 半無限地盤上の基礎応答は、直接法と比較して非常に良好な一致を示した。よって本解析法の精度の信

頼性が確かめられた。

(4) 成層地盤の場合、層厚と基礎幅の比において、基礎面による反射波の影響は、荷荷パターンによって異なる。その比が大きくなるに従って反射波の影響が、回転、鉛直、水平荷荷応答の順であり、その定量的評価ができた。

付録 A

$$\chi_1, \chi_2 = \pm \frac{\text{sgn}(zc+x+w)}{8} \left\{ |zc+x+w| \cdot \ln \left| \frac{(zc+x+w)^2 - \eta^2 t^2}{(zc+x+w)^2} \right| + \eta t \ln \left| \frac{\eta t + |zc+x+w|}{\eta t - |zc+x+w|} \right| \right\} \\ \mp \frac{\text{sgn}(zc+x-w)}{8} \left\{ |zc+x-w| \cdot \ln \left| \frac{(zc+x-w)^2 - \eta^2 t^2}{(zc+x-w)^2} \right| + \eta t \ln \left| \frac{\eta t + |zc+x-w|}{\eta t - |zc+x-w|} \right| \right\} \\ + \frac{\text{sgn}(zc-x+w)}{8} \left\{ |zc-x+w| \cdot \ln \left| \frac{(zc-x+w)^2 - \eta^2 t^2}{(zc-x+w)^2} \right| + \eta t \ln \left| \frac{\eta t + |zc-x+w|}{\eta t - |zc-x+w|} \right| \right\} \\ - \frac{\text{sgn}(zc-x-w)}{8} \left\{ |zc-x-w| \cdot \ln \left| \frac{(zc-x-w)^2 - \eta^2 t^2}{(zc-x-w)^2} \right| + \eta t \ln \left| \frac{\eta t + |zc-x-w|}{\eta t - |zc-x-w|} \right| \right\}$$

(符号は χ_1 が上を取り、 χ_2 が下を取る)

$$\chi_3, \chi_4 = \mp \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{\eta^2 t^2 - (w-x+zc)^2}}{|w-x+zc|} \\ + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{\eta^2 t^2 - (w-x-zc)^2}}{|w-x-zc|} \\ - \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{\eta^2 t^2 - (w+x+zc)^2}}{|w+x+zc|} \\ \pm \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{\eta^2 t^2 - (w+x-zc)^2}}{|w+x-zc|}$$

(符号は χ_3 が上を取り、 χ_4 が下を取る)

但し、積分区間 (α, ∞) においては $c = \sqrt{\eta^2/\alpha^2 - 1}$ であり、 (β, ∞) においては $c = \sqrt{\eta^2/\beta^2 - 1}$ である。

参考文献

- 1) Lamb, H. : On the propagation of tremors on the surface of an elastic solid, Philos. Trans. Royal Soc., London Ser. A 203, 1~42, 1904.
- 2) Eringen, A. C. and E. S. Suhubi, : Elastodynamics, Vol. II, Academic Press, 1975, Sec.7.16.
- 3) de Hoop, A. T. : The surface line source problem, Appl. Sci. Res. B8, pp.349~356, 1960.
- 4) Forrestal, M. J., L. E. Fugelso, G. L. Neihardt and R. A. Felder : Proc. Eng. Mech.Div. Spec. Conf. ASCE, 1966, cited from J. D. Achenbach (1980), Wave propagation in elastic media, North Holland.
- 5) Mansur, W. J. : A time stepping technique to solve wave

- propagation problems using the boundary element method, Ph. D. Thesis, University of Southampton, Southampton, 1983.
- 6) Antes, H. : A Boundary element procedure for transient wave propagations in two-dimensional isotropic elastic media, *Finite Elements in Analysis and Design* 1, pp.313~322, 1985.
 - 7) Antes, H. and O. von Estorff : Dynamic response analysis of rigid foundations and of elastic structures by boundary element procedures, *Soil and Earthquake Engineering*, Vol.8, No.2, pp.68~74, 1989.
 - 8) Antes, H. and G. Tröndle : Analysis of stress waves by indirect BEM, *Boundary Elements in Mechanical and Electrical Engineering*, Ed. by C. A. Brebbia and Chaudouet-Miranda, Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, pp.179~191, 1990.
 - 9) Takemiya, H. and F. Guan : Transient Lamb's solution for surface strip impulses, *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol.119 No. EM12, pp.2385~2403, Dec, 1992.
 - 10) Takemiya, H. and F. Guan and Y. Sukeyasu : 2-D transient soil-surface foundation interaction and wave propagation by a time domain BEM, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1993 (in print).
 - 11) Wang, C.Y. and Takemiya, H. : Analytical elements of time domain BEM for two-dimensional scalar wave problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.33, pp.1737~1754, 1992.
 - 12) Takemiya, H., C.Y. Wang and A. Fujiwara : 2-D elastodynamic fundamental solution for distributed loads and BEM transient response analysis of halfplane problems, *Structural Eng., Earthquake Eng., JSCE*, Vol.10, No.1, 23s~33s, 1992.
 - 13) Clenshaw, C. W. and A. R Curtis : A method for numerical integration on an automatic computer, *Numer. Math.*, 2, 197~205, 1960.
 - 14) Gradshteyn, I. S. and I. M. Ryzhik : *Table of integrals Series and Products*, Academic Press, New York, N. Y., 1980.
 - 15) Steinfeld, B. : Personal communication, 1993. (1993. 5. 7 受付)

TRANSIENT GREEN FUNCTION OF ELASTIC FULLSPACE FOR STRIP LOADS AND WAVE PROPAGATION IN A HALFSpace / STRATUM SOIL DUE TO SURFACE LOADINGS

Hirokazu TAKEMIYA and Yoshiki SUKEYASU

This paper is concerned with the time domain Green function of fullspace subjected to uniformly distributed loads of impulsive/sudden application. The procedure is based on the integral transform method : the Laplace transform with respect to time and the Fourier transform with respect to space variable along the direction of load distribution. The inverse transform is first carried out on the Laplace parameter numerically along the contour integration path. The inverse Fourier transform is conducted analytically by use of the related integral formulae. Based on thus obtained Green function, the indirect BEM is formulated for elastodynamic initial boundary value problems. Example computations include the response of a halfspace soil (plane strain assumption) subjected to sudden strip surface loads in order to investigate the effect of the Rayleigh wave propagation. Another example is carried out for a uniform layer on rigid base in order to clarify the effect of the eigenmode for the wave propagation.