

3次元弾性体の表面波動の性質に関する基礎的 検討

東平光生*

3次元弾性体の表面波動の性質に関して検討を行っている。まず、3次元波動場で薄層要素-離散化波数法を定式化している。そして、表面波モードで波動方程式の解を表現する薄層要素-離散化波数法の妥当性を、解析解を示すことにより検証している。次に、薄層要素-離散化波数法を用いて、負の群速度を示す表面波モードのみでインパルス応答を計算し、どのような波動が得られるかについて、調べている。

Key Words : surface waves, three dimensional wave field, negative group velocity, thin-layered element method, discrete wave number method

1. はじめに

著者は、先に薄層要素-離散化波数法を用いた成層弾性体の衝撃応答解析手法を展開してきた^{1),2)}。この薄層要素-離散化波数法の特徴は、表面波モードの重ね合わせで、衝撃応答を表現する点にあり、Rayleigh波モードの重ね合わせで、実体波であるP波やS波が表現できた²⁾。表面波モードの重ね合わせで、実体波が表現できる理由は、表面波モードが波動方程式の解の基底であることによる。特に、薄層要素法で剛基盤上の表層地盤の解を表現する場合には、マトリックスの固有値問題が設定でき、表面波モードの基底としての完全性がマトリックスの対角化可能性と密接に結びついた。そして、表面波モードの基底としての完全性の概念が明瞭に把握できたと思われる。

しかしながら、表面波モードについては、さらに解明しなければならない問題も多いと考えられる。たとえばLambの問題³⁾では、半無限弾性体の解がFourier積分で表現され、実体波とRayleigh波の発生がRayleigh関数の分岐点および極に関連付けられている。波動方程式の解をFourier積分で表現することは、言い替えれば解を連続スペクトルに分解することに他ならず、このことと前述の離散的な表面波モードの重ね合わせで表現された解とどのような対応関係にあるのかが、問題点として浮かび上がる。異なる形式で表現された解は、それぞれ異なる物理的な側面を強調すると考えられるので、これらを統一的に解釈・理解することは、単に数学上の形式の問題にとどまらず、表面波や実体波の本質を理解して行く上でも重要な問題であると思われる。

表面波モードがかかえるもう一つの問題は、剛基盤上の表層地盤のRayleigh波のモードの中には、負の群速

度を有するものがあることである⁴⁾。負の群速度の波動とは、言ってみれば、波動のエネルギーが震源へ向かって伝播するものである。しかし、こうした波動に対する物理的な理解が得られているとは言い難いようである。

本論文では、こうした表面波モードの問題点を、3次元弾性体の表面波モードの問題として考察する。ここで、3次元弾性体を扱う理由は、3次元弾性体の表面波では、Love波とRayleigh波の両方の考察が可能となり、表面波モードに関し、より一般的な議論ができるものと期待されるからである。

以上の観点より、本論文ではまず、先の論文^{1),2)}に引き続き、3次元弾性体に対する薄層要素-離散化波数法を展開する。そして、離散的な表面波モードの重ね合わせで得られる弾性波動方程式の解を示す。次に、解析的なアプローチによって、弾性波動方程式の解の無限積分表示を求め、薄層要素-離散化波数法による解表現との対応関係を考察する。さらに、薄層要素-離散化波数法を用いて、負の群速度のモードに関する考察を行う。

2. 円筒座標系での3次元弾性波動方程式

ここでは、後述の議論が必要となる3次元弾性波動方程式の円筒座標系での扱いについて述べておく。弾性波動方程式は、次式で与えられる。

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho \partial_t^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 λ , μ は Lamé の定数、 ∇ は勾配演算子、 \mathbf{u} は変位ベクトル、 ρ は質量密度、 \mathbf{f} は物体力のベクトルを示す。また、 ∂ は偏微分の演算子で、下付きの添字で偏微分を行うことを示す。また、 t は時間である。

z 座標を鉛直上向きにとり、円筒座標 (r, θ, z) を考える。また、ベクトル量を成分表示する場合は、下付きの添字を用いる。たとえば、変位ベクトルの成分表示は次のように行う。

* 正会員 工博 東京理科大学講師 理工学部土木工学科
(〒278 千葉県野田市山崎 2641)

$$\mathbf{u} = \{u_r, u_\theta, u_z\}^T \dots \dots \dots (2)$$

また、変位や物体力は θ 方向に Fourier 変換して考える場合もある。この場合には、上付きの添字を用いて Fourier 変換された量であると認識する。たとえば、 r 方向の変位ベクトル成分の θ に関する Fourier 変換は次のように表示する。

$$u_r^m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_r \exp(im\theta) d\theta \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 m は整数で、左辺の上付きの添字はべき乗を表すものでなく、Fourier 変換された量であることを示す。

Olson らの研究に従えば、式 (1) の解は次のように表現できる⁶⁾。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, \theta, z, t) = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [U_{zkn}^m(z, t) \mathbf{R}_{kn}^m(r, \theta) \\ & + U_{rkn}^m(z, t) \mathbf{S}_{kn}^m(r, \theta) + U_{\theta kn}^m(z, t) \mathbf{T}_{kn}^m(r, \theta)] \end{aligned} \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 k_n は r 方向の離散化波数を表し、 $J_m(k_n R) = 0$ を満足する。ただし、 R は鏡像ソース点^{1), 2)}からの波動が解を乱さないように選択された正の数で、 J_m は m 次の第 1 種 Bessel 関数である。

また、 \mathbf{R}_{kn}^m 、 \mathbf{S}_{kn}^m および \mathbf{T}_{kn}^m は horizontal wave function⁵⁾ であり、次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_{kn}^m(r, \theta) &= Y_k^m(r, \theta) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{S}_{kn}^m(r, \theta) &= \frac{1}{k} \partial_k Y_k^m(r, \theta) \mathbf{e}_r \\ &+ \frac{1}{kr} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{T}_{kn}^m(r, \theta) &= \frac{1}{kr} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) \mathbf{e}_r \\ &- \frac{1}{k} \partial_k Y_k^m(r, \theta) \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 \mathbf{e} は単位ベクトルで、その添字はベクトルの方向を示す。また、 Y_k^m は次式で示される。

$$Y_k^m(r, \theta) = J_m(kr) \exp(im\theta) \dots \dots \dots (6)$$

式 (5) と式 (6) で定義された関数に限り、上付きの添字は Fourier 変換された量を示すわけではなく、あくまで定義に従うものとする。

式 (4) は、弾性波動方程式の解の θ 方向の変動を Fourier 級数で、 r 方向の変動を Fourier-Bessel 級数で表したものである。そして、 U_{zkn}^m 、 U_{rkn}^m および $U_{\theta kn}^m$ は、それぞれ変位ベクトルの成分に対し、 θ に関する Fourier 変換と r に関する Fourier-Bessel 変換を施したものである。これらは、 z と t の関数である。

式 (4) と同様、式 (1) の物体力ベクトルも次のように表すことができる。

$$\mathbf{f}(r, \theta, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [F_{zkn}^m(z, t) \mathbf{R}_{kn}^m(r, \theta)$$

$$+ F_{rkn}^m(z, t) \mathbf{S}_{kn}^m(r, \theta) + F_{\theta kn}^m(z, t) \mathbf{T}_{kn}^m(r, \theta)] \dots \dots \dots (7)$$

式 (4) および式 (7) を式 (1) に代入することで、次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & [[D_1] \partial_z^2 + k_n [D_2] \partial_z - k_n^2 [D_3]] \{U_{kn}^m\} + \{F_{kn}^m\} \\ & = \rho \partial_t^2 \{U_{kn}^m\} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

ここに、 $[D_1]$ 、 $[D_2]$ および $[D_3]$ はマトリックスであり、その成分は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} [D_1] &= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \\ [D_2] &= \begin{bmatrix} 0 & -(\lambda + \mu) & 0 \\ (\lambda + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [D_3] &= \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

また、 $\{U_{kn}^m\}$ および $\{F_{kn}^m\}$ は、次の成分を有するベクトルである。

$$\left. \begin{aligned} \{U_{kn}^m\} &= \{U_{zkn}^m, U_{rkn}^m, U_{\theta kn}^m\}^T \\ \{F_{kn}^m\} &= \{F_{zkn}^m, F_{rkn}^m, F_{\theta kn}^m\}^T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

式 (8) は、 z と t に関する偏微分方程式である。式 (8) を解く上で、 z 平面上の表面力ベクトルの境界条件が必要になる場合がある。 z 平面上の表面力ベクトルと変位の関係式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_{zkn}^m(z, t) &= (\lambda + 2\mu) \partial_z U_{zkn}^m(z, t) \\ &- \lambda k_n U_{rkn}^m(z, t) \\ P_{rkn}^m(z, t) &= \mu \partial_z U_{rkn}^m(z, t) + \mu k_n U_{zkn}^m(z, t) \\ P_{\theta kn}^m(z, t) &= \mu \partial_z U_{\theta kn}^m(z, t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 P は波数領域の表面力ベクトルの成分であることを示している。

ところで、Olson らは、離散化波数-有限要素法 (DW-FE 法) の展開を式 (8) を出発点として行っている⁶⁾。DW-FE 法の特徴は、時刻歴応答を求めるために、差分法のスキームを導入している点にある。そして、モーダル解析法を用いた著者の方法との違いがこの点にある。Olson らは、式 (8) の解を用いて、式 (1) の解を効率的に求めるために、次の Fourier-Bessel 変換の関係式を用いており、本論文でもこれらを用いることにする。

$$\begin{aligned} F_{zkn}^m(z, t) &= \frac{2}{(R J_{m+1}(k_n R))^2} \\ &\times \int_0^R f_{zr}^m(r, z, t) J_m(k_n r) r dr \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

$$F_{rk_n}^m(z, t) + iF_{\theta k_n}^m(z, t) = \frac{2}{(RJ_{m-1}(k_n R))^2} \times \int_0^R (f_r^m(r, z, t) - if_\theta^m(r, z, t)) J_{m-1}(k_n r) r dr \dots\dots\dots (13)$$

$$F_{\theta k_n}^m(z, t) + iF_{rk_n}^m(z, t) = \frac{2}{(RJ_{m+1}(k_n R))^2} \times \int_0^R (f_\theta^m(r, z, t) - if_r^m(r, z, t)) J_{m+1}(k_n r) r dr \dots\dots\dots (14)$$

3. 薄層要素-離散化波数法の3次元弾性波動方程式への適用

ここでは、前述の関係式を用い3次元弾性波動方程式に対して、薄層要素-離散化波数法を展開する。出発点は、式(8)に対する、次の仮想仕事式である。

$$\int_\Omega \delta \{U_{kn}^m\}^T \{ [D_1] \partial_z^2 + k_n [D_2] \partial_z - k_n^2 [D_3] - \rho [I] \partial_t^2 \} \{ U_{kn}^m \} + \{ F_{kn}^m \} dz = 0 \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 Ω は薄層要素法が定義される領域、 $\delta \{U_{kn}^m\}$ は仮想変位、 $[I]$ は単位マトリックスである。薄層要素法では、波動方程式の離散化をz方向にのみ行うので、式(15)の積分はzに関して行うことに注意する。

これまでにしてきた手法^{1),2)}と同様、式(15)に適当な部分積分を施し、補間関数を用いて離散化することで、次の方程式を得る。

$$[[M] \frac{d^2}{dt^2} + k_n^2 [A] + k_n [B] + [G]] \{ W_{kn}^m \} = \{ Q_{kn}^m \} \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 $[M]$ 、 $[A]$ 、 $[B]$ および $[G]$ はマトリックスで、線形補間関数を用いた場合、次の薄層要素マトリックスの重ね合わせで表現される。

$$[M]^e = \frac{\rho h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[A]^e = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda+2\mu) & 0 & 0 & (\lambda+2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 & \mu \\ \mu & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 2(\lambda+2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

$$[B]^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \lambda-\mu & 0 & 0 & \lambda+\mu & 0 \\ \lambda-\mu & 0 & 0 & -\lambda-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda-\mu & 0 & 0 & -\lambda+\mu & 0 \\ \lambda+\mu & 0 & 0 & -\lambda+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[G]^e = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & 0 & 0 & -\lambda-2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & -\mu \\ -\lambda-2\mu & 0 & 0 & \lambda+2\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

ただし、マトリックスの添字のeは、要素マトリックスであることを示す。また、hは薄層要素の層厚である。

式(16)の $\{W_{kn}^m\}$ は薄層要素の境界面位置の変位をベクトル化したものである。一つの薄層要素を取り出した場合、その成分は次のように表される。

$$\{W_{kn}^m\}^e = \{ U_{zkn}^{m(+)} \ U_{rk_n}^{m(+)} \ U_{\theta k_n}^{m(+)} \ U_{zkn}^{m(-)} \ U_{rk_n}^{m(-)} \ U_{\theta k_n}^{m(-)} \}^T \dots\dots\dots (18)$$

ここに、添字の(+)と(-)は薄層要素の上と下の境界面に関する量であることを示す。

同様に、 $\{Q_{kn}^m\}$ は、薄層要素の境界面に作用する表面力に関連して現れるベクトルであり、一つの薄層要素を取り出した場合、その成分は次のように表される。

$$\{Q_{kn}^m\}^e = \{ P_{zkn}^{m(+)} \ P_{rk_n}^{m(+)} \ P_{\theta k_n}^{m(+)} \ P_{zkn}^{m(-)} \ P_{rk_n}^{m(-)} \ P_{\theta k_n}^{m(-)} \}^T \dots\dots\dots (19)$$

モーダル解析を用いて式(16)に対するGreen関数を作成し^{1),2)}、式(16)の解を表現すれば次式を得る。

$$\{W_{kn}^m(t)\} = \int_{-\infty}^t [V_{kn}^m] [A_{kn}^m(t-\tau)] [V_{kn}^m]^T \{Q_{kn}^m(\tau)\} d\tau \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 $[V_{kn}^m]$ は次の固有値問題から得られるモーダルマトリックスである。

$$\omega^2 [M] \{v\} = [k_n^2 [A] + k_n [B] + [G]] \{v\} \dots\dots (21)$$

同様に、式(20)の $[A_{kn}^m(t-\tau)]$ も式(21)の固有値解析から得られる対角マトリックスで、その成分は次のように表される。

$$[A_{kn}^m(t)] = \text{diag.} [\phi_1(t), \dots, \phi_M(t)] \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 ϕ は次に示される関数で、その添字は固有値の次数を表す。

$$\phi_i(t) = \frac{1}{\omega_j} \sin \omega_j t \dots\dots\dots (23)$$

式(20)で得られた解をmとkに関して重ね合わせることで、弾性波動方程式が解かれることになる。この重ね合わせの方法に関しては、式(12)~式(14)を用いたOlsonらの離散化波数法⁶⁾にならうことにする。す

なわち、波動方程式の非同次項の空間変動は、Diracのデルタ関数で記述されるものとする。このとき、式(4)に現れている m に関する総和は、式(12)~式(14)の関係式により、 $m=-1$ から $m=+1$ までの和で表すことができるようになる。このことの詳細な議論は文献⁶⁾に譲ることとして、結局薄層要素の境界面位置での波動方程式の解をベクトル化したもの、すなわち $\{u(r, \theta, t)\}$ は次のように表される。

$$\{u(r, \theta, t)\} = \sum_{m=-1}^{+1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^t [C_{kn}^m(r, \theta)] [V_{kn}^m] [A_{kn}^m(t-\tau)] [V_{kn}^m]^T (Q_{kn}^m(\tau)) d\tau \dots\dots\dots (24)$$

マトリックス $[C_{kn}^m(r, \theta)]$ は次式で表される。

$$[C_{kn}^m(r, \theta)] = [C_{s_{kn}^m}(r, \theta)] \oplus \dots \oplus [C_{s_{kn}^m}(r, \theta)] \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 $[C_{s_{kn}^m}(r, \theta)]$ は 3×3 のマトリックスで、 \oplus は直和を示す。また、 $[C_{s_{kn}^m}(r, \theta)]$ の成分は、horizontal wave function を用いて次のように表される。

$$[C_{s_{kn}^m}(r, \theta)] = [R_{kn}^m(r, \theta)] S_{kn}^m(r, \theta) T_{kn}^m(r, \theta) \dots\dots\dots (26)$$

なお、式(21) およびこれらのマトリックスの成分より明らかなように、ここでは先の論文で見られたような Hermite マトリックスでなく、実対称マトリックスの固有値問題が得られている。これは、弾性波動方程式の解を horizontal wave function で展開することで、Rayleigh 波の上下振幅および水平振幅の位相差を考慮したためである。

ここまでの議論では式(22)に見られるように、マトリックスが対角化可能であることを用いている。マトリックスが対角化されることは、解を定義したベクトル空間は、表面波モードで直交分解されることを示し、表面波モードの重ね合わせであらゆる波動が表現できることにもつながっている。

4. 3次元弾性体の表面波動の性質の検討

(1) 剛基礎上の表層地盤の表面波モード

モーダル解析に基づき表現された弾性波動方程式の解、すなわち、式(24)は離散的な表面波モードの重ね合わせで表現されている。式(24)は、これまでに示してきたように、剛基礎上の表層地盤の解として有効である^{1),2)}。

ここでは、剛基礎上の表層地盤の一点に衝撃力を加えた場合の解を Fourier 積分で表現し、衝撃応答と表面波の関係について検討する。そして、解析的な観点から式(24)の妥当性について論じることとする。

Fig.1 に示すように剛基礎上の表層地盤の表面の一点に水平方向の衝撃力を加えてみる。この場合、地表面上の表面力の境界条件は次のように与えられる。

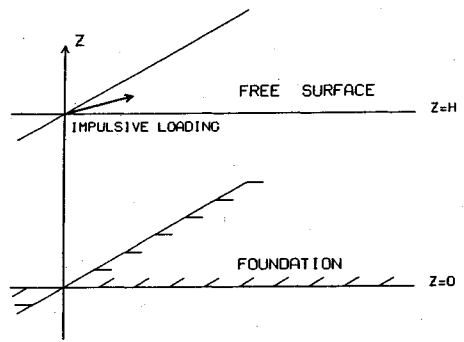


Fig.1 Analyzed model.

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \frac{1}{r} \delta(r) \delta(\theta) \delta(t) \\ p_\theta &= 0 \\ p_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 p は表面力、 δ は Dirac のデルタ関数を示す。式(3)の θ に関する Fourier 変換を式(27)に施すと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} p_r^m &= \frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(t) \\ p_\theta^m &= 0 \\ p_z^m &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

表面力 p の Fourier-Bessel 変換を P で表し、式(12)から式(14)を用いて p に Fourier-Bessel 変換を施すと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} P_{rk_n}^1 &= \frac{\delta(t)}{2\pi [Rf_0(k_n R)]^2} \\ P_{\theta k_n}^1 &= \frac{-i\delta(t)}{2\pi [Rf_0(k_n R)]^2} \\ P_{rk_n}^{-1} &= \frac{-\delta(t)}{2\pi [Rf_0(k_n R)]^2} \\ P_{\theta k_n}^{-1} &= \frac{-i\delta(t)}{2\pi [Rf_0(k_n R)]^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

式(29)に示された以外の $P_{zk_n}^m$ 、 $P_{rk_n}^m$ ならびに $P_{\theta k_n}^m$ はすべてゼロであることに注意する。

Fig.1 の剛基礎上の表層の応答を求める場合は、式(29)の境界条件に加えて、基礎上 $z=0$ で次の境界条件を与える。

$$\left. \begin{aligned} U_{zk}^m &= 0 \\ U_r^m &= 0 \\ U_{\theta k}^m &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

式(29)と式(30)の境界条件のもとで、式(8)の解を求めることができる。解の形は非常に複雑になるので、簡単のため θ 成分についてのみ示せば、以下のようになる。

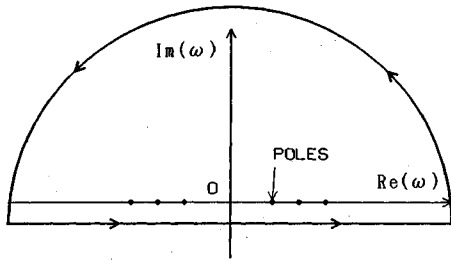


Fig.2 Path of integration in the complex ω plane.

$$U_{0kn}^m = \frac{-i}{4\pi^2\mu [Rf_0(k_n R)]^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(\nu z)}{F_L(k_n, \omega)} \exp(i\omega t) d\omega \dots \dots \dots (31)$$

ここに、 F_L は次式で示され、これをゼロと置いたものは剛基盤上の表層地盤の Love 波の特性方程式に他ならない。

$$F_L(k_n, \omega) = \nu \cosh(\nu h) \dots \dots \dots (32)$$

ただし、 h は表層地盤の層厚であり、式(31)および式(32)における ν は次式で示される。

$$\nu = \sqrt{k_n^2 - \frac{\omega^2}{C_T^2}} \dots \dots \dots (33)$$

ここに、 C_T はS波の伝播速度である。

式(31)と式(20)との関連を調べるため、式(31)において、 ω を複素数に拡張し、複素 ω 平面でどのような積分経路をとるべきかを考える。式(31)は多価関数 ν を含むので、複素積分を考えるに当たって Riemann 面を導入しなければならないように見える。しかし、式(31)は、 ν に対して偶関数であるため ν の符号が変化しても被積分関数の形は不変である。したがって、式(31)に対する複素積分を考える上で Riemann 面やそのための cut を導入することは不要である。同様のことは、 θ 成分の解だけでなく、 r 成分や z 成分の解についても言えることである。付録にも示したように、これらの成分の解の被積分関数は、現れる多価関数に対してすべて偶関数となっている。

なお、式(32)は、与えられた k_n に対して実数の ω のみがゼロ点となることは容易に理解できる。一方、付録に示した Rayleigh 波の特性関数は、複雑な形であり、実数の ω のみがゼロ点であるかどうか、必ずしも自明でない。しかし、薄層要素-離散化波数法で得られた固有値問題の式(21)で得られる固有値は、すべて実数である。薄層要素分割をいくら細かくしても、実数以外の固有値は現れないことを考えれば、Fourier 積分として得られた解に寄与するのは、すべて実数の極であると考えられる。こうした観点から積分経路を示すと、Fig.2 のようになる。

Fig.2では実軸の下側に積分経路をとり、積分経路の

上側に極が来るように配慮している。これは、得られる結果が因果性を満足するようにするためである⁷⁾。すなわち、式(31)における Fourier 逆変換は、 $\exp(i\omega t)$ の因子を掛けて行っている。したがって、Fig.2に示す積分経路は $t > 0$ で有効となり、 $t < 0$ では積分の結果はゼロとなる。すなわち、因果性の関数を得ることができる($t < 0$ の場合は下半面に積分経路を付加する。このとき、積分経路内に特異点が含まれず、積分の結果がゼロとなる)。Fig.2より、式(31)の解は留数定理からのみ評価される。すなわち、解析的な観点からも、剛基盤上の表層地盤の衝撃応答は表面波モードに分解されることが理解できる。

式(31)を留数定理で評価すれば次式が得られる。

$$U_{0kn}^m(z, t) = \frac{H(t)}{\pi\mu [Rf_0(k_n R)]^2} \times \sum_{j=1}^{\infty} \text{Res} \left(\frac{i \sinh(\nu z)}{F_L(k_n, \omega)} \right) \sin \omega_j t \dots \dots \dots (34)$$

ここに、 H は単位段階関数、 j は表面波モード次数を示す。

以上より、薄層要素-離散化波数法による弾性波動方程式の解表現と Fourier 積分による解表現が、等価になることを示すことができた。Fourier 積分に寄与する極が実軸上にあるものだけであるという情報は、薄層要素-離散化波数法による弾性波動方程式の解表現から得ることができた。また、Fourier 積分で表現された解が留数定理だけで評価できることは、薄層要素-離散化波数法の解表現の妥当性を裏付けるものと言える。これらの二つの解表現は、弾性波動方程式の解の性質を理解して行く上で互いに補い合うものと考えられる。

(2) 剛基盤上の表層地盤の負の群速度の表面波モードについて

剛基盤上の Rayleigh 波のモードの中には、負の群速度を有するものがあることが指摘されている。まず、この問題を薄層要素-離散化波数法の計算に付随する固有値解析により確かめることにする。

もちろん、Rayleigh 波の群速度を調べるためには、付録に示した特性関数のゼロ点を求めることでも可能である。また、後述の衝撃応答解析も、式(34)に示されるような解析的な式の利用が可能である。しかし、特性方程式を解くことは必ずしも容易でなく、しかも、式(34)の利用においては、高次の表面波モードまでを特性方程式から誘導しなければならない。

一方、薄層要素-離散化波数法では表面波モードが高次までマトリックス演算で比較的簡単に誘導できる。この点で薄層要素-離散化波数法は数値計算の上では有利である。以上より、これからの計算では、薄層要素-離散化波数法を用いることにする。

解析モデルを Fig.3 に示す。ここでは、剛基盤上の表

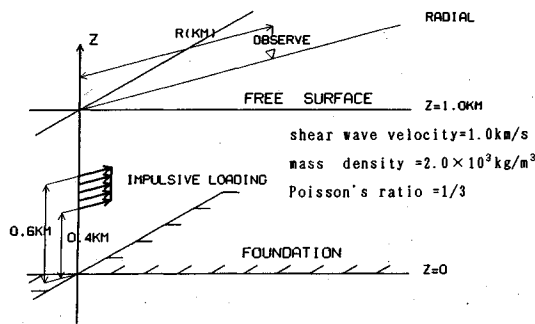


Fig.3 Analyzed model.

層地盤の厚さを 1.0 km, せん断波速度を 1.0 km/s, 質量密度 $2.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, ポアソン比を $1/3$ とする。また, 表層地盤を 10 層に均等に薄層要素分割し, 固有値解析を行う。

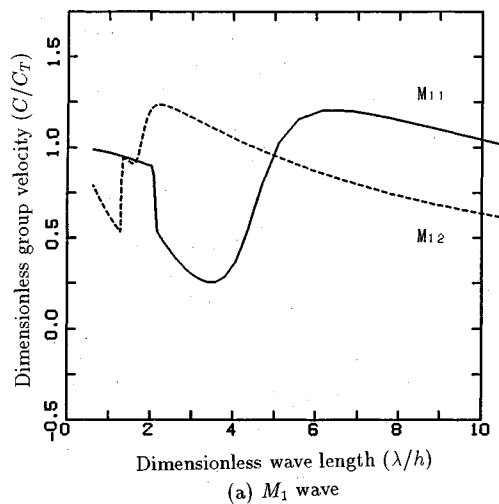
得られた表面波のモードの中から, Rayleigh 波モードである M_{11} 波から M_{12} 波までの分散曲線を Fig.4 に示す。図中, λ は Rayleigh 波の波長を, h は表層地盤の層厚を示している。この分散曲線では, Rayleigh 波の波長と群速度の関係を示す。この分散曲線によれば, 負の群速度は, M_{21} 波と M_{22} 波の波長の長い領域で現れており, このことは, 既往の研究結果¹⁾とも一致している。

この負の群速度の波動が, どのようなものであるのか具体的なイメージをつかむことにする。Fig.3 に示すように地中に水平方向の衝撃力を加えることにする。そして, 式 (24) を用いて衝撃応答を計算する。ただし, 式 (24) の適用に当たっては, 負の群速度を有する M_{22} 波のみを考慮する。すなわち, 衝撃応答のなかから M_{22} 波を取り出し, その波動の性質を調べることにする。

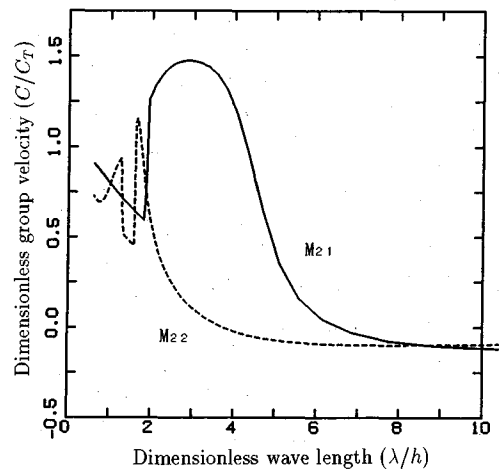
衝撃応答解析で重ね合わせる最大の離散化波数は, これまでの研究結果^{1),2)}を参考にして, $14/\text{km}$ とする。また, 衝撃力の大きさは 0.2 kN/m とし, 0.4 km から 0.6 km の深さに等分布に水平方向に分布させることにする。衝撃力を集中荷重としてでなく, 分布荷重として扱う理由は, 集中荷重を与えることで生じる波動が, ウェーブフロントで無限大となり, 数値計算上取扱いが困難になるためである。

地表面での変位応答を Fig.5~Fig.7 に示す。これらの変位の方向は, 加振力と同じ方向をとる。また, 観測点は, 振源からの水平距離として, $4.0 \text{ km} \sim 7.0 \text{ km}$ までの点を 1.0 km おきにとる。図中の R は振源からの水平距離を示す。

Fig.5 は, 振源からの水平距離 $R=4.0 \text{ km}$ と $R=5.0 \text{ km}$ の点の時刻歴を比較したものである。時刻歴のうち, $R=4.0 \text{ km}$ のものについては実線で, $R=5.0 \text{ km}$ のものについては破線で示している。この時刻歴の初期の部



(a) M_{11} wave



(b) M_{22} wave

Fig.4 Dispersion property of Rayleigh waves.

分では, 二つの振動の位相はほぼ一致している。しかし, 時刻 2 秒前後から, $R=4.0 \text{ km}$ の振動は, $R=5.0 \text{ km}$ の振動に比べ位相が遅れてくる。振幅が最大となる付近では, 二つの振動の位相は一致するものの, 振幅が減少しはじめると, 再び $R=4.0 \text{ km}$ の振動の位相は遅れてくる。このことは, 振源から離れた場所での振動の位相は, 振源に近い場所での振動に比べ進んでいることを示す。すなわち, 波動は振源に向かって伝播しているという状況が起きていると考えられる。Fig.6 は, $R=5.0 \text{ km}$ と $R=6.0 \text{ km}$ の点の時刻歴を比較したものである。時刻歴のうち, $R=5.0 \text{ km}$ のものについては実線で, $R=6.0 \text{ km}$ のものについては, 破線で示している。Fig.6 で示された時刻歴の状況は, Fig.5 の状況とほとんど同じと言える。すなわち, ある程度時間が経過すると, $R=5.0 \text{ km}$ の振動は, $R=6.0 \text{ km}$ の振動に比べ位相が遅れてくる。振幅が最大となる付近では, 二つの振動の位

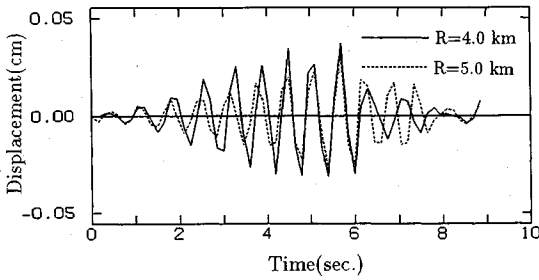


Fig.5 Component of M_{22} mode in the impulsive response.

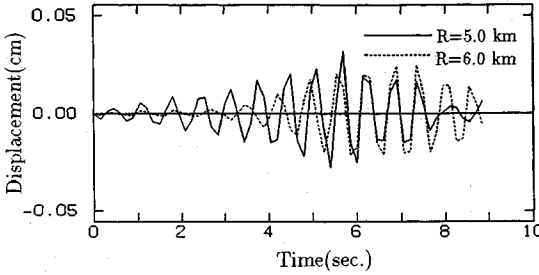


Fig.6 Component of M_{22} mode in the impulsive response.

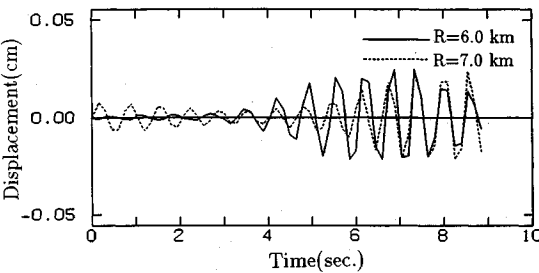


Fig.7 Component of M_{22} mode in the impulsive response.

相は一致するものの、振幅が減少しはじめると、再び $R=5.0$ km の振動の位相は遅れてくるのが分かる。

Fig.7 は、 $R=6.0$ km と $R=7.0$ km の点の時刻歴を比較したものである。時刻歴のうち、 $R=6.0$ km のものについては実線で、 $R=7.0$ km のものについては破線で示している。この時刻歴に関しても、ある程度時間が経過すると、 $R=6.0$ km の振動は、 $R=7.0$ km の振動に比べ位相が遅れ、振幅が最大となる付近では二つの振動の位相は一致することが分かる。以上のように、これらの結果は衝撃応答を構成する M_{22} 波の成分は、わずかであるが波動が振源に向かって伝播するという状況を示している。

なお、Fig.5 から Fig.7 の波形は、衝撃力を与えた時刻 $t=0$ で始まっており、波動が観測点に到達するまでの遅延時間が現れていない。しかし、Fig.2 の積分経路での議論から明らかなように、因果性を考慮して、モードを重ね合わせて得られた波形である。すなわち、これらの波形は、 $t < 0$ の領域では値はゼロとなる性質を持つ

ていることに注意する。

(3) 剛基盤上の表層地盤の振動特性について

Fig.5~Fig.7 で示した波形は、 M_{22} 波のモードによる衝撃応答であった。この波形が衝撃応答全体でどのような割合を占めているかを次に検討してみる。

Fig.8~Fig.11 は、薄層要素-離散化波数法に付随する固有値解析で得られたすべのモードを、重ね合わせたものである。離散化波数の重ね合わせは、前述の計算と同様に 14/km まで行っている。また、変位振幅の方向は加振力と同じ方向にとり、地表面上の観測点の位置は、負の群速度モードの検討で用いたものと同じとする。これらの図中では、P 波と S 波の振動と考えられるものに P と S の記号を付けている。

これによると、Fig.8~Fig.11 の変位波形は P 波到着の遅延時間をよく評価していると言える。すなわち、これらの結果は多数の表面波モードの重ね合わせによって実体波が合成され、遅延条件を満足する波動が得られることを示す。そして、表面波モード単独では、その分散性のため、遅延時間が明確に現れないことを Fig.5~Fig.7 は示していると言える。

また、 M_{22} 波のモードから得られた変位波形の値と、Fig.8~Fig.11 の変位波形の値を比較すれば、 M_{22} 波の占める割合は衝撃応答全体の中では、非常に小さいものと言える。このことは、実際の観測においても、負の群速度の波動を検出することは不可能に近いことを示唆している。そして、工学的には表面波モードが負の群速度を示す領域は、あまり問題にならないと考えられる。

なお、Fig.10, Fig.11 の波形では、S 波の到着よりも前に振幅の大きなパルス状の波動が到着している。この大きなパルス状の波動は Fig.8 および Fig.9 の段階では S 波が到着する前の比較的振幅の小さなパルス状の波動であったと考えられる。そして、波動の進行と共に成長し、再び Fig.11 で振幅が少し小さくなったものであろう。この S 波到着前の波動の性質を考察するために、Fig.12 に示すような波線を考えてみる。図中の SP 波とは振源を S 波で出発し、地表面で全反射し、P 波として観測点に到着するものである。また、SSP 波とは振源を S 波で出発し、基盤で反射し地表面で P 波に変換され、観測点に到着するものである。同様に SSSP 波とは、地表面と基盤の間を S 波で往復してから、P 波として観測点に到着するものである。これらの波動の到着時刻をそれぞれの R の値について計算すれば Table 1 のようにまとめることができる。

S 波の伝播速度が 1 km/s であることから、Table 1 で示されたこれらの波動の大部分は、直達 S 波よりも早く到達することが可能である。また、Fig.10, Fig.11 の直達 S 波到着前の振幅の大きなパルス状の波動は、Table 1 で示された波動の到着時刻にほぼ一致している

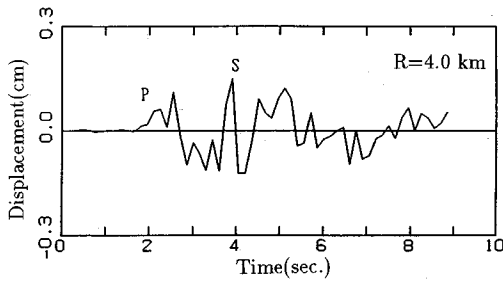


Fig.8 Impulsive response at the surface.

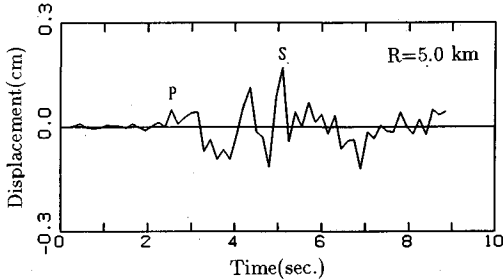


Fig.9 Impulsive response at the surface.

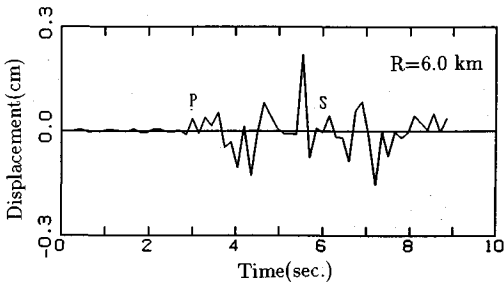


Fig.10 Impulsive response at the surface.

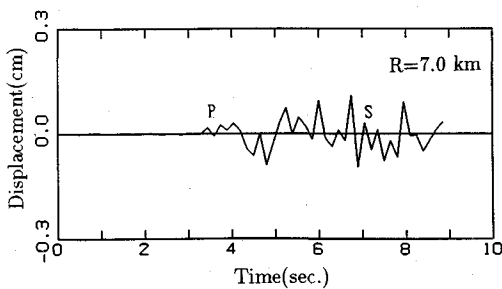


Fig.11 Impulsive response at the surface.

Table 1 Arrival time of waves.

R	SP wave	SSP wave	SSSP wave
4.0 km	2.4 sec	3.3 sec	4.2 sec
5.0 km	2.9 sec	3.8 sec	4.7 sec
6.0 km	3.4 sec	4.3 sec	5.2 sec
7.0 km	3.9 sec	4.8 sec	5.7 sec

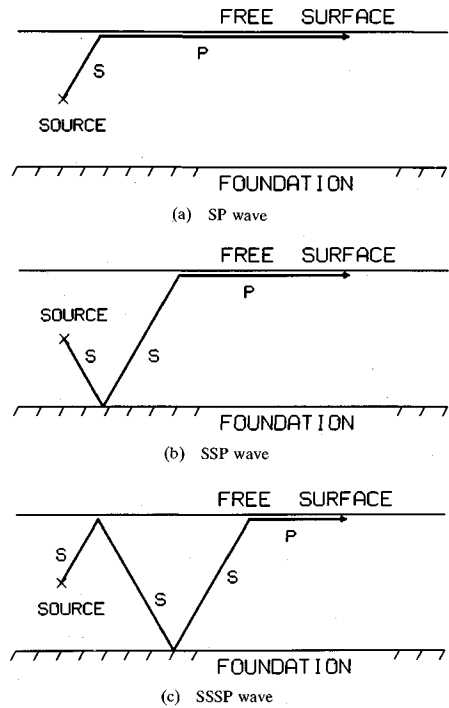


Fig.12 Waves from a point source.

ことから、Fig.12で示す波線ではほぼ説明できると考えられる。

なお、Fig.8～Fig.11でのS波の振幅に着目すると、震源からの距離が増えるにつれて、非常に小さくなって行く。このことは、2次元での解析では見られなかったことから²⁾、3次元的な波動伝播に伴う幾何学的な減衰が働いているものと思われる。

5. 結 論

本論文では、3次元弾性体の表層波動に関する考察を行った。具体的には、薄層要素-離散化波数法を3次元弾性波動場で定式化すると共に、解析的な手法を用いて弾性波動方程式の解を表現した。そして、解析的な観点から、薄層要素-離散化波数法による解表現について考察を行った。また、剛基盤上の3次元波動場についても、負の群速度モードが存在することを確かめた。そして、このモードによる衝撃応答を求め、負の群速度の影響について考察を行った。これらの検討の結果、得られた結論をまとめると次のようになる。

(1) 3次元弾性波動場に対する薄層要素-離散化波数法の定式化は、2次元弾性波動場での方法とほとんど変わらない。ただし、3次元弾性波動場をhorizontal wave functionにより展開することで、薄層要素-離散化波数法に現れる固有値問題は、実対称行列に関するものとなる。Hermiteマトリックスが現れる2次元問題との

違いが、こうした点に現れる。

(2) 薄層要素-離散化波数法による弾性波動方程式の解表現の妥当性は、解析的な観点からも裏付けることができる。これは、剛基盤上の表層地盤の Fourier 積分表示された解析解は、留数定理のみで評価でき、解析解が表面波モードで完全に分解できるためである。また、Fourier 積分に寄与する被積分関数の極は、減衰が無い場合、実軸上の存在するものだけである。このことは、薄層要素-離散化波数法で得られる固有値が実数のみで与えられることで理解される。こうした点で、両者の解表現は、弾性波動を理解する上で、互いに補い合うものであると言える。

(3) 負の群速度を示す M_{22} 波のみを合成することで、負の群速度の影響を受けた波動を再現することが可能である。負の群速度の影響は時刻歴の振幅が増加する部分と減少する部分で現れる。

(4) この M_{22} 波が全体の応答に占める割合は非常に小さい。したがって、実際の観測などで負の群速度の波動を検出することは不可能に近いと思われる。このことは、負の群速度の波動が、工学的にはそれほど問題にならないことを意味する。

(5) 剛基盤上の表層地盤の衝撃応答性状は、2次元と3次元波動場で異なる様相を示す。たとえば、観測点に直接到達する S 波は、3次元波動場では幾何減衰のために急速に減衰する一方、直達 S 波が到達する前に、振幅の大きなパルス状の波動が到達する。このパルス状の波動は、地表面と基盤を多重反射する波動で説明が可能である。

謝辞：本論文をまとめる上で、東京理科大学、森地重暉教授に、貴重なご助言を戴きました。記して感謝の意を表します。

付録 弾性波動方程式の解析解についての補足

ここでは、本文中で示さなかった弾性波動方程式の解析解の残りの成分ならびに、弾性基盤上の表層地盤の解について示しておく。これらの解は、薄層要素-離散化波数法による解表現との対応関係を調べる上で必要であるばかりでなく、留数定理の適用を通して、Ohmachi¹⁾らが展開している波動解析に対する振動学的手法を、3次元問題へ拡張してゆくための足がかりになるものである。

剛基盤上の表層地盤の解析解については、本文では θ 方向のみについて示した。残りの r と z 成分は次のように表される。

$$U_{kn}^m = \frac{\text{sgn}(m)}{4\pi^2\mu[RJ_0(k_nR)]^2}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{-\infty}^{\infty} \{(\gamma \cosh(\gamma z) - \gamma \cosh(\nu z))A(k_n, \omega) \\ & + (\gamma \sinh(\gamma z) - \frac{k_n^2}{\nu} \sinh(\nu z))B(k_n, \omega)\} \\ & \times \exp(i\omega t) d\omega \dots\dots\dots (a.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{kn}^m &= \frac{\text{sgn}(m)}{4\pi^2\mu[RJ_0(k_nR)]^2} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \{(k_n \sinh(\gamma z) - \frac{\gamma\nu}{k_n} \sinh(\nu z))A(k_n, \omega) \\ & + (k_n \cosh(\gamma z) - k_n \cosh(\nu z))B(k_n, \omega)\} \\ & \times \exp(i\omega t) d\omega \dots\dots\dots (a.2) \end{aligned}$$

ここに、sgn は符号関数である。式 (a.1) および式 (a.2) に現れる γ は、次式で示される関数である。

$$\gamma = \sqrt{k_n^2 - \frac{\omega^2}{C_L^2}} \dots\dots\dots (a.3)$$

ここに、 C_L は P 波の伝播速度を示す。

同様に $A(k_n, \omega)$ および $B(k_n, \omega)$ は次式で示される関数である。

$$A(k_n, \omega) = \frac{2k_n^2 \cosh(\nu h) - (\nu^2 + k_n^2) \cosh(\gamma h)}{F_R(k_n, \omega)} \dots\dots\dots (a.4)$$

$$B(k_n, \omega) = \frac{(\nu^2 + k_n^2) \sinh(\gamma h) - 2\gamma\nu \sinh(\nu h)}{F_R(k_n, \omega)} \dots\dots\dots (a.5)$$

ただし、 $F_R(k_n, \omega)$ は次式で示され、これをゼロと置いたものは、剛基盤上の表層地盤上の Rayleigh 波の特性方程式に他ならない。

$$\begin{aligned} F_R(k_n, \omega) &= -4k_n\gamma(\nu^2 + k_n^2) \\ & + \sinh(\nu h) \sinh(\gamma h) \{-4k_n\nu\gamma^2 - \frac{k_n}{\nu}(\nu^2 + k_n^2)^2\} \\ & + \cosh(\nu h) \cosh(\gamma h) \{4k_n^2\gamma + \frac{\gamma}{k_n}(\nu^2 + k_n^2)^2\} \\ & \dots\dots\dots (a.6) \end{aligned}$$

以上の剛基盤上の表層地盤の解の被積分関数は、いずれも γ と ν に関して、偶関数となっている。すなわち、 γ と ν の符号の変化に対して、被積分関数は影響を受けない。したがって、これらの複素積分を考える上で、Riemann 面は不要であり、留数定理だけで積分が評価される。

次に、弾性基盤上の表層地盤の解を示す。弾性基盤上の表層地盤の解を得るためには、(i) 基盤面での変位の連続、(ii) 基盤面での応力の釣合い、(iii) 基盤を伝播する波動の放射条件、(iv) 地表面での応力の境界条件、を考慮しなければならない。この解を示すために、まず次の関数を示しておく。

$$\nu_0 = \sqrt{k_n^2 - \frac{\omega^2}{C_0^2}} \dots\dots\dots (a.7)$$

ここに、 C_{T0} は、基盤を伝播するS波の速度である。

本文の式(31)は、剛基盤上の表層地盤の解のうち、 θ 成分に関するものであった。これに対応する、弾性基盤上の表層地盤の解は次のように表される。

$$U_{\theta n}^m = \frac{-i}{4\pi^2\mu[RJ_0(k_n R)]^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mu_0\nu_0}{\mu\nu} \sinh(\nu z) + \cosh(\nu z) \right] \times \frac{1}{E_L(k_n, \omega)} \exp(i\omega t) d\omega \dots\dots\dots (a.8)$$

ここに、 μ_0 は弾性基盤のせん断弾性係数を示す。また、 $E_L(k_n, \omega)$ は次式で示される関数であり、これをゼロと置いたものは、弾性基盤上の表層地盤のLove波の特性方程式に他ならない。

$$E_L(k_n, \omega) = \mu_0\nu_0 \cosh(\nu h) + \mu\nu \sinh(\nu h) \dots\dots (a.9)$$

弾性基盤上の表層地盤の解、式(a.8)の被積分関数は ν に対しては、偶関数となっている。すなわち、この式を複素積分で考える場合、表層を伝播する波動関数に対してはRiemann面は不要である。しかし、これらは ν_0 に対しては偶関数でなく、 ν_0 の符号の変化で関数の値が変わってくる。すなわち、基盤を伝播する波動に対しては、Riemann面を用いて複素積分を考える必要が生じる。これによって、弾性基盤上の表層地盤の解に

は、関数 ν_0 の分岐点まわりの積分が寄与する。この積分経路の設定法に関しては文献⁵⁾に譲るが、弾性基盤上の表層地盤の解は表面波モードの和だけでは、完全に表すことができないことになる。この事情は、 θ 成分以外についても、全く同様である。

参 考 文 献

- 1) 東平光生：離散化波数法と薄層要素法を組み合わせた成層弾性体の面外波動場での衝撃応答解析手法，土木学会論文集，No.459/I-22，pp.119-128，1993.1.
- 2) 東平光生：薄層要素-離散化波数法による成層弾性体の面内波動場での衝撃応答解析手法，土木学会論文集，No.465/I-23，pp.137-144，1993.4.
- 3) 佐藤泰夫：弾性波動論，岩波書店，1978.
- 4) Ohmachi, T. and A. Hasumi : Generation of Rayleigh waves due to impulsive response of a finite elastic layer on a rigid basement, Struc. Eng./Earth. Eng., Vol.1, pp.159~167, (proc of JSCE No.416), 1990.
- 5) Aki, K. and P.G. Richards : Quantitative Seismology, W.H. Freeman and Company, 1980.
- 6) Olson, A.H., J.A. Orcutt and G.A. Frizer : The discrete wavenumber/finite element method for synthetic seismograms, Geophys. J.R. astr. soc. 77, pp.421~460, 1984.
- 7) 今村勲：物理と関数論，岩波書店，1981.

(1993.3.15 受付)

INVESTIGATION OF THE SURFACE WAVES IN THE THREE DIMENSIONAL ELASTIC MEDIUM

Terumi TOUHEI

Some investigations are applied to the surface waves in the three dimensional elastic medium. At first, after formulating a thin-layered element and discrete wave number method, the validity of the method is examined from an analytical point of view. It is found that the present method, which represent the solution for the elastic wave motion in terms of normal modes, is equivalent to the analytical solution, when the elastic medium exists on the rigid basement. The present solution and the analytical solution complement each other for the understandings of these solutions. Next, the characteristics of the surface wave modes of the negative group velocity are investigated using the present method. Impulsive responses, which only have the negative group velocity modes, are synthesized, and compared with the complete solutions. It is found that the effect of the negative group velocity modes on the complete solutions is very small.