

粒状体の固有変形解析

岸野佑次*

せん断を受ける粒状体の不安定な変形には、粒状体内部の固有な変形モードが関与していると考えられる。本文においては、このような固有モードに支配される変形特性を調べるために、粒状要素法の剛性行列に基づく固有変形解析法や、粒子の変位・回転場の固有モードによる評価方法について提案する。また、2次元せん断試験シミュレーション結果に対する固有変形解析例により微視的変形機構の考察を行う。

Key Words: granular materials, strain localization, Granular Element Method, stiffness matrix, eigenvalue analysis, eigenmode expansion

1. はじめに

せん断を受ける砂等の粒状体において、とくに最大せん断応力以降の変形特性を分岐問題または変形局所化の問題として捉えようとする研究が盛んに行われている。これらの研究の中には、砂供試体実験と理論的解析によりせん断帯の検証を行ったもの¹⁾、砂等の地盤材料を連続体モデルとしてとり扱い、非関連モールクーロン塑性体²⁾、非関連カムクレイ塑性体³⁾、亜弾性体⁴⁾を用いて変形局所化の有限要素解析を行ったもの、さらには、個別要素法⁵⁾を用いてせん断帯形成の解析を行ったもの⁶⁾等、種々のアプローチが試みられている。

ところで、実験やシミュレーション解析において観察される可視的な変形局所化は不安定な変形の結果であるので、局所化に至る以前に粒状体内部にどのような変化が生じるかを明かにすることが重要であると考えられる。この点に関しては、上記の有限要素法による諸解析におけるように、増分型の剛性行列に基づく方法を用い、固有値解析等により材料固有の変形モードを求めることが有効であると考えられる。とくに固有値解析における低次固有値に対応する固有モードは重要な意味をもち、最大せん断応力時の変形特性を支配するものである。

本文においては、このような連続体有限要素解析に対応する離散的立場からの解析法を示した。本解析法は、剛性行列に基づく粒状体解析法である粒状要素法⁷⁾と組み合わせ用いられるものである。また、載荷により生じる変形をその時点の固有モードに分解することにより、変形特性を定量化する方法を提案した。さらに、本方法を簡単な例題に適用し、粒状体の変形特性について考察を行なった。

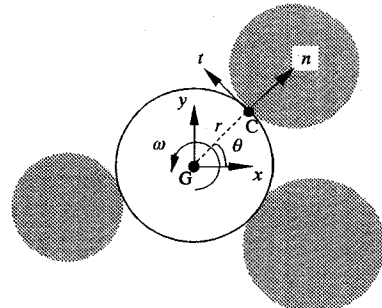


Fig.1 Local coordinate system at contact point

2. 固有変形解析の方法

解析に用いる粒状体モデルは、円形粒子群を所定の拘束圧となるように粒状要素法⁷⁾によりパッキングして得られるものである。固有変形解析は、このパッキングデータやこれを初期状態とする載荷シミュレーション試験各ステップのデータに基づいて行う。固有変形解析には粒状集合体の剛性行列を必要とするが、粒状要素法は構成要素の位置データおよび構成要素間の接触力データに基づく剛性行列を用いる方法であるので、これをもとに解析アルゴリズムを容易に組み立てることができる。

いま、周辺粒子を固定した状態で、Fig.1 に示す粒子G (半径 r) のみに並行移動と回転の増分

$$U_G = \{u_x \ u_y \ r\omega\}^T \dots \dots \dots (1)$$

を与える。このとき、この粒子の一つの接触点Cにおける隣接粒子との相対変位増分

$$U_C = \{u_n \ u_t\}^T \dots \dots \dots (2)$$

は、Fig.1 の局所座標の変換より、次式で与えられる。

$$U_C = T_C U_G \dots \dots \dots (3)$$

ここに

$$T_C = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4)$$

*正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科
(〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

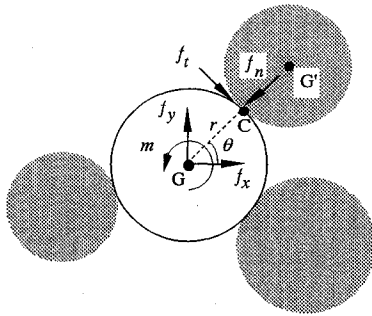


Fig.2 Increment of contact force and resultant force to be added at the center of grain

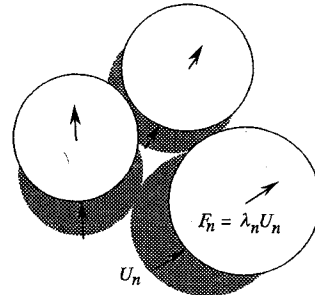


Fig.3 Deformation of n-th eigen mode

は変換行列である。粒状要素法において、粒子集合体の弾性は要素間の法線方向および接線方向のバネにより代表され、Fig.2の接触力増分

$$F_c = \{ f_n \ f_t \}^T \dots\dots\dots (5)$$

と相対変位増分 U_c の関係が次式で与えられる。

$$F_c = K U_c \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$K = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

は接触点における剛性行列で、 k_n および k_t は、それぞれ、法線方向および接線方向のバネ定数を表す。なお、接線方向のバネ定数は、接触点における滑動条件

$$F_t \geq F_n \tan \phi \dots\dots\dots (8)$$

(ϕ は粒子間摩擦角、 F_n および F_t は要素間に作用している接触力の法線および接線方向成分) を満たしている場合には0とする。従って、この場合、各载荷ステップにおいて接触力接線方向成分 F_t は一定値に留まることになる。一般に、粒状体の変形には粒子間の接続の変化やすべりにより高次の非線形性が伴うが、各载荷ステップ毎には線形とし、また、式(8)の判定は载荷ステップ初期の接触力の値によって行うこととした。従って、载荷方向を反転した直後のステップにおいて固有変形解析を行う必要がある場合等には、別途検討を要する。

ここで、粒子 G の並行移動と回転により生じる全ての接触力増分に釣り合うように Fig.2 の粒子 G の重心に付加される力とモーメントの合計

$$F_G = \{ f_x \ f_y \ \frac{m}{r} \}^T \dots\dots\dots (9)$$

は次式で与えられる。

$$F_G = S_G U_G \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$S_G = \sum_c T_c^T K T_c \dots\dots\dots (11)$$

は粒子 G の並行移動と回転に対する G 自身の要素剛性行列である。なお \sum_c は粒子 G の接触点に関する和を表す。上式(11)に示されるように、接触点 C から重心位置への力とモーメントの変換が並行移動と回転の変換 T_c

の転置により与えられることが注目される。この剛性行列はいわゆる接線剛性に対応し、変形過程において刻々変化するものである。さらに、粒子 G の並行移動と回転に対しては隣接粒子 G' の重心にも力とモーメント

$$F_G = S_{GG} U_G \dots\dots\dots (12)$$

を付加する必要がある。ここに、 S_{GG} は粒子 G の並行移動と回転に対する G' の要素剛性行列であり、 S_G と同様にして求めることができる。このように、通常の有限要素法と異なり2種類の要素剛性行列を必要とする理由は、要素間の接触点と独立変数を与える点とが異なるためである。要素剛性行列 (10), (12) を重ね合わせ、さらに境界条件を考慮すれば、粒子および境界の新たな移動に対する全体剛性関係式

$$F = S U \dots\dots\dots (13)$$

を得る。ここに、 F は各粒子の重心に付加される力とモーメントの増分および境界に付加される力の増分を並べ、さらに境界条件を考慮したベクトルである。また、 S は全体剛性行列、 U は F に対応する並行移動および回転の増分を並べたベクトルである。

なお、接触点数が1の粒子(重力作用下における载荷シミュレーションにおいて平衡条件を満たしている粒子の接触点数は通常2以上である)、および接触点の全てが滑動条件を満たしている粒子は、明らかに式(13)の S を特異にする原因となる。従って、固有変形解析を行なうに当たっては、これらの粒子に関わる変数をあらかじめ F および U から除外して解析することも可能である。これは解析上の必要事項ではないが、解析結果から自明なものをとり除くために有効であろう。

いま、考慮する粒子の数を M_G 、境界要素の制御の自由度を M_B とするとき、 S の次数は $N = 3M_G + M_B$ となる。この S に対し次式で表される固有値解析^{2),4)}を行う。

$$S U_n = \lambda_n U_n \quad (n=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 λ_n は固有値、 U_n は固有ベクトルである。いま、固有値の中の少なくとも一つが0になったとすると、応力ひずみ曲線のピーク状態におけるように、応力の変化なしに変形が進むことになる。これは、Fig.3 に示す

ように、 S の固有値解析の n 番目のモードについて、固有ベクトル U_n に対応する F_n が次式のように表されることから明かである。

$$F_n = \lambda_n U_n \dots\dots\dots(15)$$

一般に零固有値がない場合も含めて以上のような固有値解析を行えば、次に示すように、粒状体の任意の変形が固有変形モードの線形結合として表される。また、このことからパッキング状態や接触力の分布により定まる固有の変形特性を知ることができる。

固有ベクトルの直交性より、各固有ベクトルを

$$U_n^T U_m = \delta_{nm} \dots\dots\dots(16)$$

(δ_{nm} はクロネッカーのデルタ) となるように正規化しておけば、任意のベクトル U に対して次の固有モード展開式を得る。

$$U = \sum_{n=1}^N \alpha_n U_n \dots\dots\dots(17)$$

ここに、 N はベクトル U 、 F の成分数である。また、

$$\alpha_n = U_n^T U \dots\dots\dots(18)$$

であり、これを固有モード係数と呼ぶこととする。次に、式(17)右辺の m 項までの和のノルムを次式で定義する。

$$A_m = \sqrt{\sum_{n=1}^m \alpha_n^2} \dots\dots\dots(19)$$

なお、ベクトル U については、

$$A_N = 1 \dots\dots\dots(20)$$

となるように、

$$U^T U = 1 \dots\dots\dots(21)$$

と正規化しておくこととする。

3. 2軸せん断試験シミュレーション

固有変形解析に用いるデータの作成のため、粒状要素法により2軸せん断試験シミュレーション解析を行なった。解析は従来と同様の逐次計算法⁷⁾に拠った。対象とした解析モデルは Fig.4 に示すような2次元円形粒子122個よりなる集合体である。同図は初期パッキングを示すが、この状態は3種類の粒径の粒子を総面積が等しくなるように混合した入力データ(力の平衡条件は一般には満たされていない)を与え、設定した拘束圧が得られるように、粒状要素法による等方的パッキングを行ったものである。図中のバーは接触力を表し、バーの太さが接触力の大きさに比例するように描かれている。2軸せん断試験に用いたデータ諸元を Table 1 に示す。

粒子と境界(拘束板)の間のバネ定数は粒子間のバネ定数の2倍としたが、これは境界接触点を介して点対称位置に仮想粒子があると考え、この仮想粒子との間に通常のバネがあると想定したためである。これらの定数の値は、オーダー的にはアクリル材料等に相当する⁸⁾。これらの値を用いた結果は、Fig.4 に示されるように、粒子間の重なりは顕著ではなく、変形が粒子間の相対移動

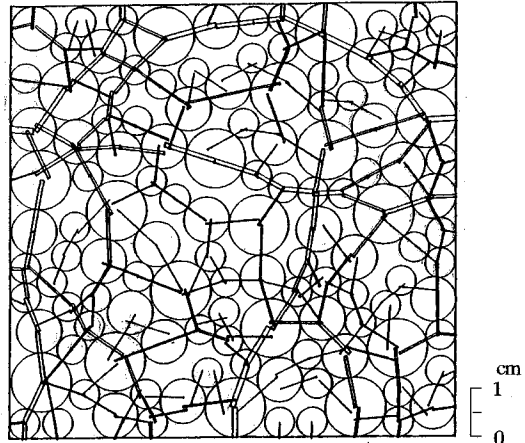


Fig.4 Initial distribution of contact forces

Table 1 Data used for bi-axial simulation test (Distributed values are for the depth of 1 cm)

Diameter of grains D		. 0.6, 0.9, 1.2 cm	
Unit weight of grains (per depth of 1 cm)		2.5g/cm ² (245 kN/m ²)	
Spring constants (per depth of 1 cm)	between grains	normal k_n	1000kg/cm (981 kN/m)
		tangential k_t	$0.7 k_n$
	between grain and boundary	normal k'_n	$2 k_n$
		tangential k'_t	$1.4 k_n$
Friction angle	between grains ϕ	25°	
	between grain and boundary ϕ'	25°	
Isotropic confining pressure p (per depth of 1 cm)		0.5kg/cm (490 N/mm)	
Increment of shearing strain $\Delta\gamma = \Delta(\epsilon_1 - \epsilon_2)$		0.005%	
Accuracy	Stress at boundary	$10^{-3} p$	
	Resultant force of grain	$10^{-3} D p$	

に支配される限りにおいては剛体粒子の場合に近い結果が得られるものと考えられる。ただし、応力ひずみ曲線の初期勾配等にはバネ定数の値の影響があることには留意すべきである。ここでは、粒状性に起因する基本的性質を調べる目的のためにこのような値とした。また、 k_n と k_t の比は Mindlin の弾性接触問題の解析⁹⁾における下界値近くに設定した。これらのバネは粒子同士または粒子と境界が離れた場合には働かないものとする。粒子間すべりの発生条件は式(8)で表される摩擦則である。

境界におかれた上下および左右の拘束板は、それぞれの方向に対称的に移動するように制御される。上下、左右方向のひずみを ϵ_1 、 ϵ_2 (いずれも圧縮正) とおく。また、端面拘束の影響を排除するために、拘束板の移動に伴う領域の巨視的なひずみ ϵ_1 、 ϵ_2 に応じて各拘束板

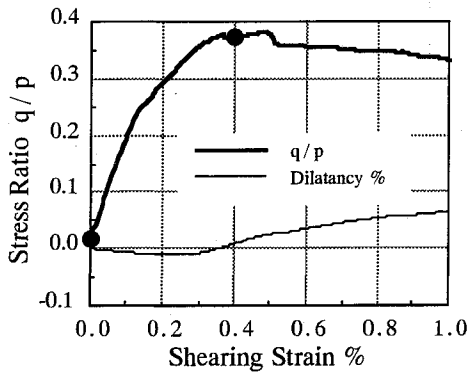


Fig.5 Stress-strain curve

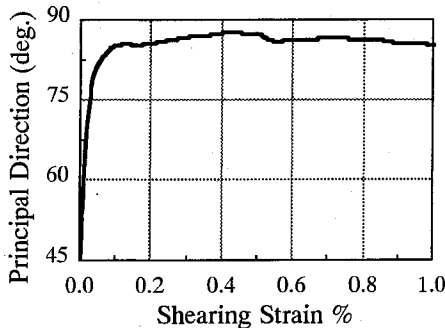


Fig.6 Change in Principal Direction of Stress

には一様な伸縮を与えることとする。このような境界条件の設定は実際の供試体の実験においては非常に困難であるが、シミュレーション解析においては容易に実現することが可能である。

2軸せん断試験の载荷制御方法は、上下方向圧縮、左右方向伸張となるようなせん断ひずみ $\epsilon_1 - \epsilon_2$ を変位制御で与えるとともに、体積ひずみ $\epsilon_1 + \epsilon_2$ については、平均拘束圧 p が常に一定に保たれるように逐次調整しながら载荷を行う。実際のシミュレーションアルゴリズムにおいては、まず、载荷ステップ毎に Table 1 に示すせん断ひずみ増分を与える。次に、平均拘束圧が所定の値となるようなせん断ひずみのない拘束板の移動、および力とモーメントの平衡条件を満たす粒子移動を収束するまで交互に繰り返し与えている。逐次解析における打ち切りの判定は、境界については拘束応力設定値との差、各粒子については不釣り合い力（接触力と重力のベクトルの和）について行う。各々の判定に用いる精度の値は Table 1 に示す通りである。

以上の解析条件の下に求めた応力比とひずみの関係を Fig.5 に示す。応力比は平均応力

$$p = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 \dots\dots\dots(22)$$

に対するせん断応力

$$q = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} / 2 \dots\dots\dots(23)$$

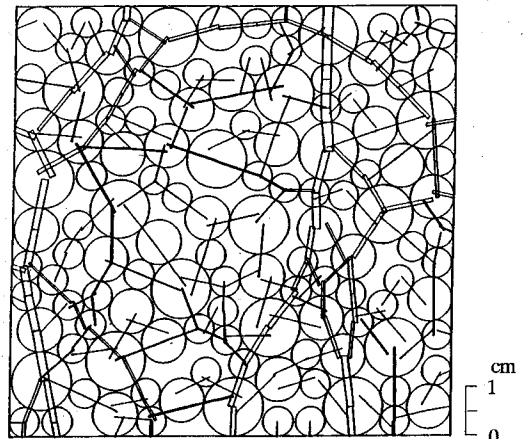


Fig.7 Distribution of contact forces at the peak state of stress-strain curve ($\gamma = 0.4\%$)

の比を表す。なお、各応力成分は、境界辺と粒子の接触点（位置ベクトル r ）に作用する接触力 f のする仕事の合計を応力テンソルとひずみテンソルの内積に等置することにより、次式のように求めることができる⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_B r_x f_x / A \\ \sigma_y &= \sum_B r_y f_y / A \\ \tau_{xy} &= \sum_B (r_x f_y + r_y f_x) / 2A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

ここに \sum_B は境界辺上の全ての接触点に関する和、 A は解析領域の面積を表す。なお、解析はひずみ制御であるので、ひずみテンソル主軸は x 方向（左右方向）および y 方向（上下方向）に一致するが、応力テンソルの主軸は一般に x 、 y 方向に一致するとは限らない。このことは、Fig.5 の初期せん断応力 q が完全には 0 となっていないことに表れている。すなわち、初期状態は相対する拘束板に平行移動のみを許した上で σ_x と σ_y が等しくなるようにパッキングされたものであるため、せん断応力成分 τ_{xy} を 0 とすることはできない。

Fig.6 は载荷に伴う最大主応力方向の変化を表す。同図の角度は水平方向を 0 とし、反時計回りを正として表示されている。初期状態はほぼ等方的であるが、最大主応力方向は約 45° と計算される。最大主応力方向は試料がせん断载荷に馴染んだせん断ひずみ 0.1% 付近までに急速に上下方向に近づいた後、応力比最大時付近において上下方向まで約 2° と最も近づくと、その後、再び上下方向から離れる傾向を示す。この主軸の変化は、粒子数が少ないこともあるが、とくに、応力比最大時以降の変化は非共軸的な変形を示唆しているように思われる。

Fig.5 の●印は固有変形解析を行なった二つのステージ（初期状態： $\gamma=0\%$ 、および応力比最大時： $\gamma=0.4\%$ ）である。応力比最大時における接触力分布を Fig.7 に示す。これを Fig.4 の初期状態と比較すると、明かに上下方向の接触力が増大していることがわかる。

4. 固有変形解析結果とその考察

(1) 解析の概要

前述のように、2軸せん断試験シミュレーション解析における初期状態および応力比最大時のステージにおいて固有変形解析を行った。解析に必要なバネ定数および摩擦角の値は Table 1 と同様のものを用いた。なお、固有値解析の性質により、バネ定数は固有値の絶対値には影響を及ぼすが、各固有値間の比や固有ベクトルの決定には法線方向と接線方向のバネ定数の比のみが影響する。境界の自由度は上下・左右方向の拘束板がそれぞれの法線方向に対称的に移動するので、各方向1自由度として解析を行った。なお、底辺にのみ接し、接触点数1の2つの粒子を固有値解析においては除外することとした。よって、解析に考慮する粒子数は120個となり、全体剛性行列 S の次数 N は362である。

(2) 固有モード

解析で得られた固有モードの例を Fig. 8, 9 に示す。同図には、応力比最大時における固有値解析の結果得られた固有モードの中、固有値の小さい3個のモードが示されている。これらの図は、後に示す実際の変形と比較するため、その変形に対して式(18)より求まる固有モード係数を乗じて描かれている。Fig. 8 の並行移動ベクトルは移動前の粒子重心を始点とする線分により表されている。また、Fig. 9 の回転は上向きの半径方向を回転角0として示した。

3つのモードの中、第2のモードは比較的大域的な変化であるが、他の2つのモードの変化は局所的である。後に示す実際の変形においても観察されることであるが、同図に示した固有モードにおいても、粒子間の相対移動にともなって回転が生じていることがわかる。これは円形粒子の場合にとくに顕著に現れることではあるが、離散的材料の変形の一つの大きな特徴であろう。

(3) 固有値分布と固有モード展開のノルム

解析の結果得られた固有値分布を Fig. 10 に示す。同図の横軸は固有値を小さい順に並べた番号である。また、縦軸の固有値は粒子間法線方向バネ定数 k_n で無次元化した量である。同図より、固有値は極めて広範囲に分布し、平均値をもたないフラクタル的の分布特性を示すことがわかる。固有値0.01以下を実質的に零固有値とみなすこととすれば、応力比最大時にはこのような固有値が多数存在することがわかる。これらの低次モードの固有値の差は小さいので、重根とみなすことができるとすれば、対応する固有モードの任意の線形結合がこの重根に対応した固有モードになり得ると考えることができる。このような任意性のために、離散的材料の力学的挙動が偶然性に支配される程度が大きいということができよう。

等粒径の粒子が規則的に配列した集合体等の特殊な場

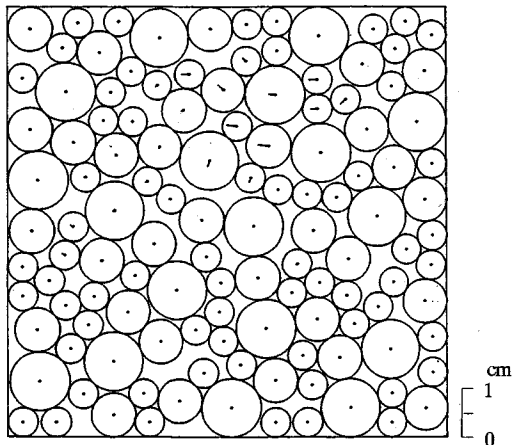
合を除いて、完全な零固有値が得られることは少ないと考えられるが、上述のような低次の固有モードは不安定な変形を生じる原因になると考えられる。このことは、次に示すように、実際に生じた変形に対して各固有モードがどのように寄与するかを式(18)の固有モード係数をもとに調べることによりわかる。

初期状態および応力比最大時(せん断ひずみ0.4%)からの載荷ステップ(せん断ひずみ増分0.05%)について、実際の変形をもとに式(19)のノルムを求めた結果を Fig. 11 に示す。同図より応力比最大時のステージにおいては低次の固有モード(とくに第2モード)に大きく依存していることがわかる。これに対して、変形が安定的に増加する初期状態においては、より高次の固有モードも実際の変形に係わっている。

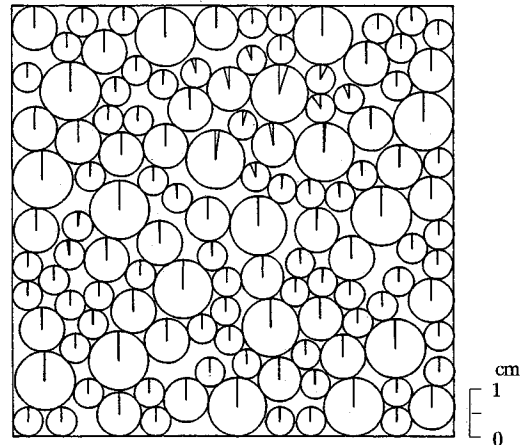
(4) 固有変形解析に及ぼすすべりの影響

Fig. 4, 7 よりわかるように、せん断を経験していない初期状態とせん断ひずみ0.4%の応力比最大時における粒子の幾何学的配置には大きな差異は認められない。しかし、Fig. 10, 11 には、両状態に対する固有変形解析結果に顕著な差異を生じていることが示されている。これは固有変形解析に用いられる剛性関係において、接触点のすべりが考慮されていることが主要な原因になっていると考えられる。そこで、粒状体内部にすべりが多数発生する応力比最大時のステージにおいて、要素間摩擦係数を無限大とすることにより、すべりを人為的に拘束した固有変形解析を行った。この解析結果を Fig. 12, 13 に示す。これらの結果をすべりを考慮した本来の解析結果 Fig. 10, 11 と比較すると、応力比最大時のステージに対するすべりを拘束した解析結果は、同じステージに対するすべりを考慮した解析結果よりも、初期のステージに対する解析結果に近い特性を示すことがわかる。これは初期状態においてすべりの発生が少ないことによる。このように、粒状体内部の幾何学的配列の変化以上に、載荷履歴に伴う粒子間すべりを含む力学的状態の変化が粒状体の変形を大きく支配することは粒状体の変形特性を定量化する上で重要であるということができよう。

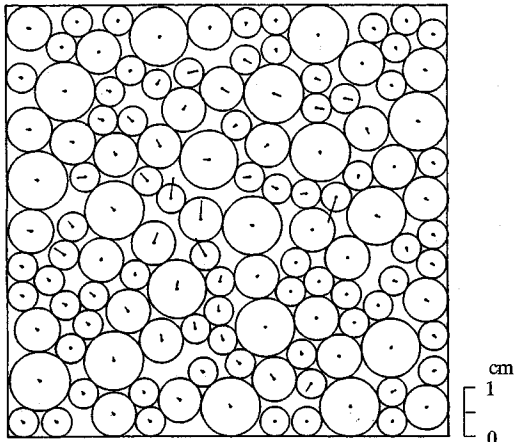
ただし、本解析において対象とした粒子集合体は初期状態においては比較的安定した構造をもっており、また、境界辺の拘束も粒状体全体の剛性を高めている可能性がある。従って実際の地盤との対応を考えると、充分圧密されていない場合等においては、より低次の固有値が多く存在し、本論文に示した結果と固有値の分布特性等が異なることが予想される。しかし、ここに示したように、せん断に伴って増加するすべりにより、相対的に低次固有値に依存した変形が生じるようになることや、この結果として応力の増加なしにせん断変形が進む最大応力状態がもたらされることは粒状体の普遍的な性質であると考えられる。



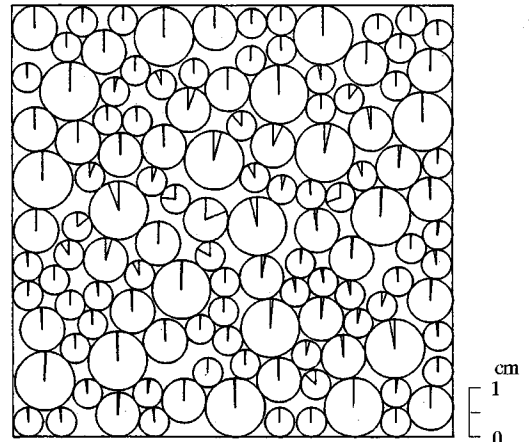
(a) First mode ($\alpha_1 = -0.292$)



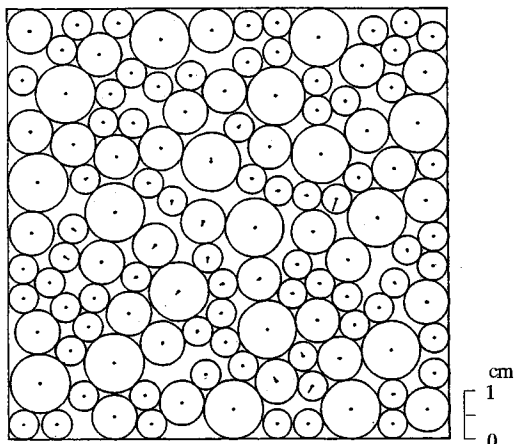
(a) First mode ($\alpha_1 = -0.292$)



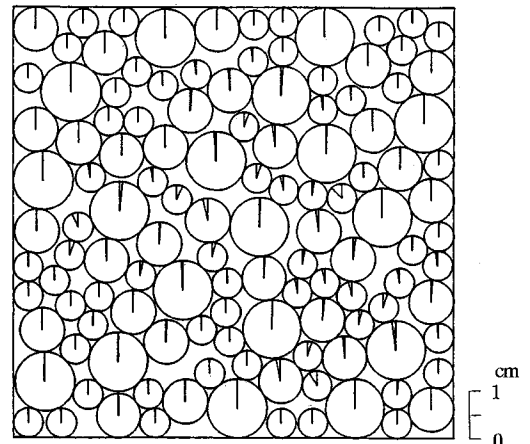
(b) Second mode ($\alpha_2 = -0.771$)



(b) Second mode ($\alpha_2 = -0.771$)



(c) Third mode ($\alpha_3 = 0.299$)



(c) Third mode ($\alpha_3 = 0.299$)

Fig.8 Translational movements corresponding to the lowest eigen values

Fig.9 Rotational movements corresponding to the lowest eigen values

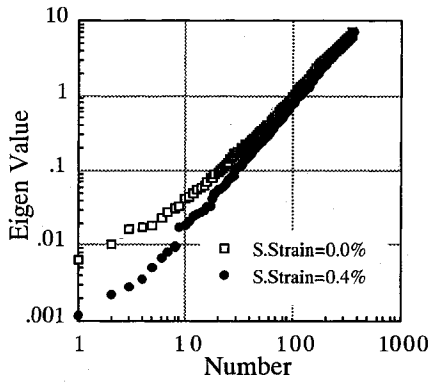


Fig. 10 Comparison between distribution characteristics of eigen values for two loading steps

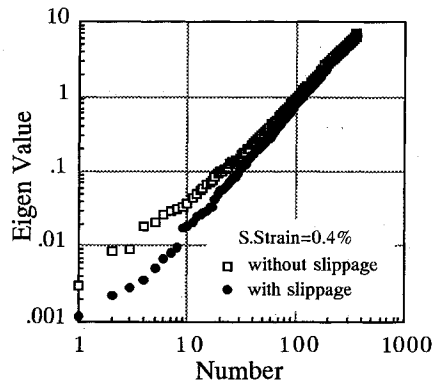


Fig. 12 Influence of slippage on the distribution characteristics of eigen values

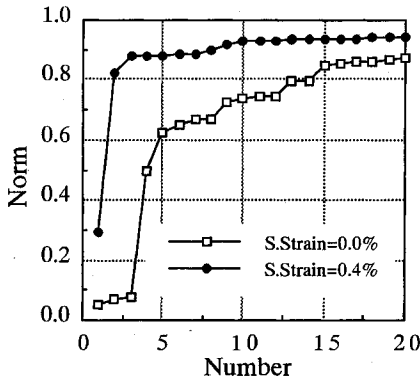


Fig. 11 Comparison between distribution characteristics of eigen mode coefficients for two loading steps

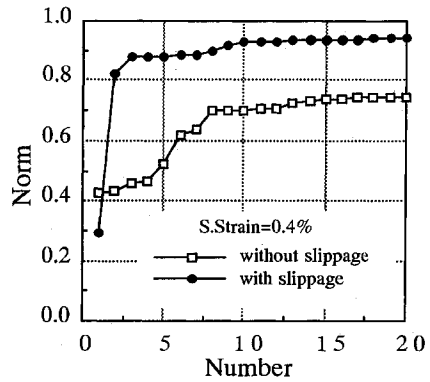


Fig. 13 Influence of slippage on the distribution characteristics of eigen mode coefficients

(5) 固有モードと実際の変形の比較

最後に、せん断ひずみ 0.4 % のステージで固有変形解析を行って得られた 3 番目までの固有モードの固有モード係数による線形結合と、実際にせん断ひずみ 0.4 % から 0.405 % の載荷ステップで生じた変形の比較を、並行移動と回転に分けて、それぞれ、Fig. 14, 15 に示す。図中の (a) は、いずれも、Fig. 8, 9 の 3 つのモードを重ね合わせたものとなっている。また (b) の実際に生じる並行移動および回転は微小であるので、750 倍に拡大して描かれている。

Fig. 11 から予想されたことであるが、これらの図を比較すると、固有モード係数による 3 番目までの固有モードの線形結合 (a) は、実際の並行移動および回転 (b) とよく一致していることがわかる。また、Fig. 8, 9 と比較して、第 2 モードが支配的であることがこの図からもわかる。一般に、何番目の固有モードが卓越し、ステップ毎の変形が主として何個の固有モードに支配されるかは解析対象により一定したことはないと考えられる。これは (3) に述べた離散的材料の力学挙動における偶然性による。しかし、載荷の進行につれて不安定な変形を惹起するような粒状体固有の内部構造が形成され、低

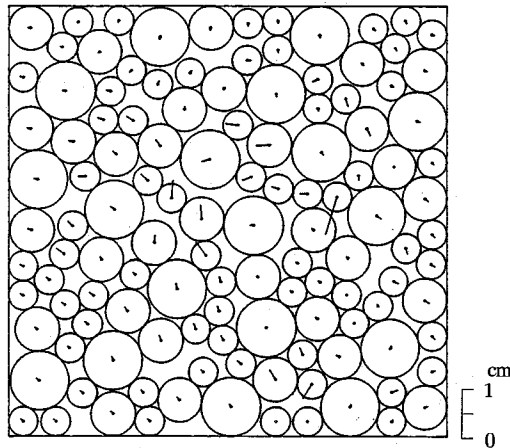
次の固有モードに依存した変形が生じるようになるという事は、以上の解析から明らかであろう。

なお、粒子の大きな並行移動には顕著な回転が伴っているが、隣接粒子の回転方向は逆向きになろうとする傾向にあることが注目される。このことから、粒子の回転は、偶応力を考慮した理論¹⁰⁾における回転の自由度に、単純には対応しないであろう。本論文において対象とした粒子モデルに含まれる粒子数は限られており、また境界の制御は要素試験を目指した剛なものであることには留意する必要があるが、粒子回転はあくまでも剛性行列に従う変形の結果生じ、粒子パッキングや載荷履歴により定まる固有モードに含まれる不均一な変形に伴うものであると考えることができよう。

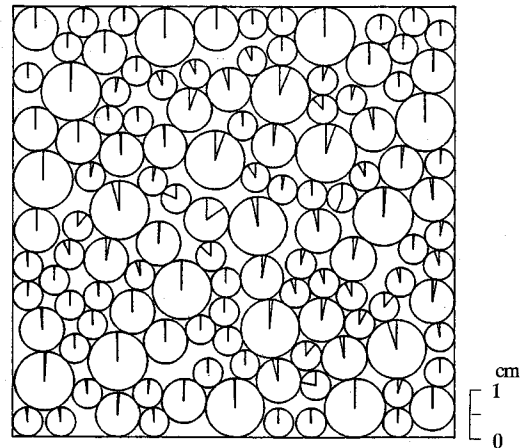
5. おわりに

本論文においては、粒状要素法と組み合わせて用いられる粒状体の固有変形解析法を提案するとともに、本解析法を 2 次元せん断試験シミュレーション解析へ応用することにより、粒状体の変形特性の考察を行った。本文で得られた主な結果を示せば、下記ようになる。

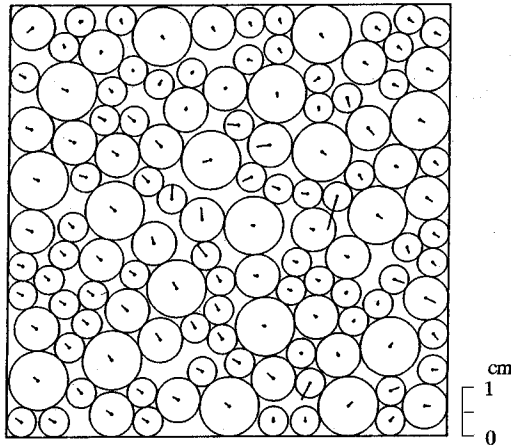
- 1) 従来、有限要素法による分岐解析に用いられてきた



(a) Linear combination of eigen modes ($m = 3$)

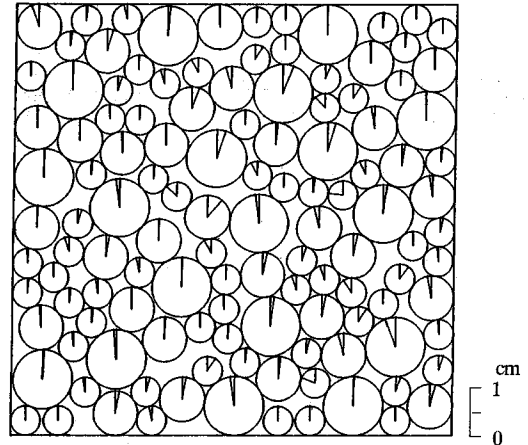


(a) Linear combination of eigen modes ($m = 3$)



Scale for displacement 0 0.01 mm

(b) Actual translational movement (shearing strain: 0.4~0.405%, magnification factor: 750)



Scale for rotation 0 0.1°

(b) Actual rotational movement (shearing strain: 0.4~0.405%, magnification factor: 750)

Fig.14 Comparison of actual translational movement with linear combination of eigen modes

Fig.15 Comparison of actual rotational movement with linear combination of eigen modes

増分型剛性行列の固有値解析は、剛性行列を導入した粒状体解析モデルである粒状要素法に対しても有効に応用できることを示した。

2) 2次元せん断試験シミュレーション解析で実際に得られる並行移動・回転場を、固有値解析における固有モードに分解する方法を提案し、この方法が変形機構を定量的に表現する一つの手段となることを示した。

3) 本文で提案する固有変形解析法を2次元せん断試験シミュレーション解析結果に応用し、最大応力状態等の変形機構には、固有値の小さな複数の低次固有モードが卓越して関与していることがわかった。

4) 同一の粒子配列に対して行ったすべりを拘束した固有変形解析との比較より、不安定な変形を生じさせる増

分型剛性関係は、粒子間のすべりを考慮して初めて実現されるものであることがわかった。

本文においては、粒状体における固有変形解析の方法とその応用を示したが、不安定な変形が生じる载荷ステップにおいては解の収束に時間を要すること等、解の収束性についての議論は省略した。現在動的な項を考慮した粒状要素法も検討中であるが、粒状要素法そのものの数値解析手法としての評価については別途議論を行いたい。

本文において提案した固有変形解析法は、側圧をメンブレン载荷としたより拘束の少ない要素試験¹¹⁾やフーチング荷重作用下の地盤のすべり解析¹²⁾にも応用を試み、有効性を確かめている。本文に示した解析例において不安定な変形を生じる時点で零固有値近辺の固有モードが複

数存在したが、このことは粒状体特有の分岐挙動を示唆していると考えられる。本文に示した例題は2次元であり、解析条件も限られたものであるため、今後はより一般的な解析を進め、粒状体の変形特性の研究に役立てたいと考えている。

なお、本研究は平成2～3年度文部省科学研究費補助金一般研究(C)(研究代表者:岸野佑次, 課題番号:03650413)の補助を受けたものであることを付記する。

参考文献

- 1) Vardoulakis, I. *et al.* : Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem, *Int. J. Numer. Anal. Methods. Geomech.* Vol. 2, pp.99-128, 1978.
- 2) De Borst, R. : Bifurcations in finite element models with a non-associate flow law, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 12, pp.99-116, 1988
- 3) Yatomi, Y. *et al.* : Shear bands formation numerically simulated by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol. 29, No.4, pp.1-13, 1989.
- 4) Bardet, J. P. : Finite element analysis of plane strain bifurcation within compressible solids, *Computers & Structures* Vol.36, pp.993-1007, 1990.
- 5) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L. : A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique* Vol.29, pp.47-65, 1979.
- 6) 中瀬 仁・案中 正・片平冬樹・興野俊也 : 平面ひずみ圧縮試験に対する個別要素法の適用, *土木学会論文集*, No.454, pp.55-64, 1992年9月.
- 7) 岸野佑次 : 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, *土木学会論文集*, No.406, pp.97-106, 1989年6月.
- 8) Mindlin, R. D. : Compliance of elastic bodies in contact, *J. Appl. Mech.* Vol. 71, pp.259-268, 1949.
- 9) Satake, M. (Editor) : *Mechanics of Granular Materials*, Report of ISSMFE Technical Committee on Mechanics of Granular Materials, p.105, 1989.
- 10) Cosserat, E. and F. : *Théorie des corps déformables*, A.Hermann, Paris, 1962.
- 11) 松井 淳・岸野佑次 : 剛性行列に基づく粒状体の変形局所化の解析, *土木学会第47回年次学術講演会講演概要集第3部*, pp.22-23, 1992.
- 12) 渡部秀貴・岸野佑次 : フーチング荷重下の粒状体のすべり解析, *土木学会第47回年次学術講演会講演概要集第3部*, pp.392-393, 1992.

(1992.12.25 受付)

CHARACTERISTIC DEFORMATION ANALYSIS OF GRANULAR MATERIALS

Yuji KISHINO

Unstable shearing deformation of granular materials is accompanied by characteristic deformation modes. As a tool to study these characteristic modes, an eigenvalue analysis based on the stiffness matrix of granular assemblies is presented. This eigenvalue analysis is performed for data obtained by Granular Element Method whose algorithm utilizes stiffness matrix concept. Definition of characteristic quantities called the eigen mode coefficient and the norm of eigen mode expansion is also presented. Application of the method to a simulation of bi-axial shearing test shows the significance of the lower eigen modes. It is also shown from an artificial test with infinite friction that slippages between grains play important roles in characteristic deformation.