

投稿論文(和文ノート)
TECHNICAL
NOTE

舗装構造の逆解析のための改良Gauss-Newton法

松井邦人*・佐藤直俊**

舗装の非破壊試験において、表面たわみから舗装各層の弾性係数を推定する方法のひとつとして Gauss-Newton 法が用いられている。一方 Uzan 等は、パターンサーチを用い弾性係数比を決め、その結果から各層の弾性係数を求めている。弾性係数比を未知変数とする考え方を用いると、未知数の数をひとつ減らすことができ、計算効率を向上することが期待できる。この考え方に基づく Gauss-Newton 法のアルゴリズムを誘導し、従来の Gauss-Newton 法¹⁾と比べ計算の効率性と安定性が向上していることを確認している。

Key Words: pavement, backcalculation, FWD, improved Gauss-Newton method

1. はじめに

舗装の支持力を評価するため、非破壊試験を行って表面たわみを測定し、各層を構成している材料特性を推定することがしばしば行われるようになってきた。近年、非破壊試験法の開発とその評価、又非破壊試験データから層弾性係数を推定する方法に関する研究が精力的に行われてきた。筆者等の一人も、FWD 試験による表面たわみデータから層弾性係数を推定する方法を開発し、更にその時発生する誤差の影響について検討した¹⁾。

舗装構造の逆解析において、層弾性係数推定値に誤差を生じる原因是、①舗装構造のモデルに起因する系統誤差、②測定精度に依存する偶然誤差、だけではなく③逆解析に用いる数値解析法にもあると考えられる。元来、逆解析問題は、測定値と解析値の差の二乗和を評価関数として、この関数を最小とするように層弾性係数を求めているが、一般に逆解析は不安定性が強く、数値解析上十分に配慮する必要がある。すなわち、わずかに含まれる測定値の誤差が推定値を大きく左右する。評価関数は未知変数(層弾性係数)に関する非線形関数となるため、繰り返し計算を行う必要がある。このとき一般に解析たわみの未知変数に関する偏微分係数で表わした漸化式を利用しているが、数値解析上の誤差の原因是、この漸化式の部分で発生している。

Uzan 等²⁾は、上層の弾性係数を路床の弾性係数で割った弾性係数比を用いて表面たわみを表現し、この弾性係数比を離散化し、パターンサーチで弾性係数比の組み合わせを求め、更に路床の弾性係数及び上位の各層の弾性係数を求めていている。Uzan 等の方法の長所は評価関数の偏微分係数を計算する必要がなく評価関数の値のみを利

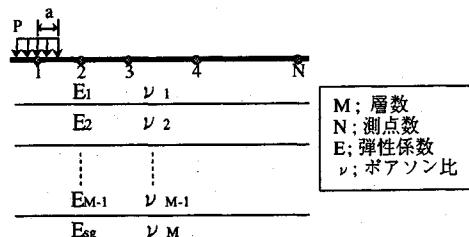


図-1 多層弾性構造モデル

用しているので、数値計算上の不安定性は存在しない。しかし、未知変数の数が多くなると、パターンサーチで評価関数の最小値を求める作業は極端に増加する。このため路床の弾性係数に対する各層の弾性係数の比を未知変数とし、この未知変数が与えられると路床の弾性係数を決定できることを示している。従来、考へてきた路床の弾性係数を含む層弾性係数を未知変数の数としてきたのに対し、未知変数の数を一つ減らす事が出来る。本研究では Uzan 等のように弾性係数比で表面たわみを表現し、弾性係数比を求める最小化問題と路床の弾性係数を求める最小化問題の2段階最適化問題として Gauss-Newton 法を適用している。そして、数値シミュレーションと実測データを用いて逆解析を行い、本アルゴリズムの有効性と効率性を確認した。

2. 改良 Gauss-Newton 法

舗装の構造評価は、舗装を図-1 のような弾性多層構造と仮定し、測定した表面たわみから各層の弾性係数を推定することにより行われている。測定表面たわみには、しばしば FWD で測定されたデータが用いられている。そして解析たわみが測定たわみと精度良く一致するまで繰り返し計算を行う。たわみの一一致度の評価関数として、最小二乗法の概念³⁾を用い、次のように示すことにする。

* 正会員 Ph.D 東京電機大学教授 建設工学科
(〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

** 正会員 鹿島道路(株) 技術研究所

$$J = \sum_{i=1}^N (u_i - z_i)^2 \quad (1)$$

ここで、 $u_i (i=1, \dots, N)$ は i 点における測定たわみ、 $z_i (i=1, \dots, N)$ は i 点での解析たわみである。ここで、Uzan 等によると解析たわみは次式のように書くことができる。

$$z_i = \frac{Pa}{E_{sg}} f_i(C), \quad C_k = \frac{E_k}{E_{sg}} (k=1, \dots, M-1) \quad (2)$$

$$C = \{C_k\}, (k=1, \dots, M-1) \quad (2)$$

ここでの f_i は C_k を与えたときの i 点における正規化した解析たわみである。式 (2) を式 (1) に代入すると

$$J = \sum_{i=1}^N \left(u_i - \frac{Pa}{E_{sg}} f_i(C) \right)^2 \quad (3)$$

(E_{sg} : 路床の弾性係数 P : 荷重 a : 載荷版の半径)

Uzan 等は、ここで C を一定と仮定し、式 (3) を最小とするように E_{sg} を決定している。

$$E_{sg} = \frac{Pa \sum_{i=1}^N f_i^2}{\sum_{i=1}^N u_i f_i} \quad (4)$$

次に、 E_{sg} を既知として、式 (3) に Gauss-Newton 法を適用する。このため、式 (2) より

$$z_i(C + \delta C) \approx \frac{Pa}{E_{sg}} f_i(C) + \frac{Pa}{E_{sg}} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\partial f_i}{\partial C_k} \delta C_k \quad (5)$$

式 (5) を式 (1) に代入すると、 δ に関する 2 次式となる。この 2 次式が最小となる必要条件より

$$\frac{Pa}{E_{sg}} \sum_{k=1}^{M-1} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial C_j} \frac{\partial f_i}{\partial C_k} \right) \delta C_k = \sum_{i=1}^N \left(u_i - \frac{Pa}{E_{sg}} f_i \right) \left(\frac{\partial f_i}{\partial C_j} \right) \quad (j=1, \dots, M-1) \quad (6)$$

上式は、 δC_k に関する $M-1$ 個の線形連立方程式となる。式 (6) の左辺の係数マトリックスが一般に特異マトリックスに近く、数値解析上問題を生じる可能性のあることが文献 3) で指摘されている。文献 3) より、式 (6) を作成するとき、式 (5) の δC_k の係数マトリックスを Housholder 変換を用いて QR 分解し、それを式 (1) に代入する形で式 (6) を誘導している。式 (6) の中の $\partial f_i / \partial C_k$ は、Chevron または BISAR 等の既存ソフトを用いることを考えると、数値微分で計算するのが便利である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial C_k} &\approx f_i(C_1, \dots, C_k + \Delta C_k, \dots, C_{M-1}) - f_i(C_1, \dots, C_k, \dots, C_{M-1}) \\ &= \left(\frac{E_{sg}}{Pa} \right) z_i(C_1, \dots, C_k + \Delta C_k, \dots, C_{M-1}) - z_i(C_1, \dots, C_k, \dots, C_{M-1}) \end{aligned} \quad (7)$$

解析たわみ $Z_i(C_1, \dots, C_k, \dots, C_{M-1})$ は E_{sg} の値を与える（例えば $E_{sg} = 1$ ）と上位の層の弾性係数は $E_j = C_j \cdot E_{sg} (j=1, \dots, M-1)$ となり、Chevron や BISAR 等を用いて表面のたわみを計算できる。同様に、 $Z_i(C_1, \dots, C_k + \Delta C_k, \dots, C_{M-1})$ は k 番目の弾性係数を $E_k +$

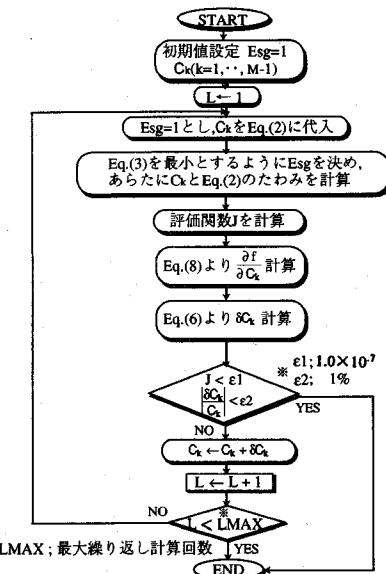


図-2 計算フロー

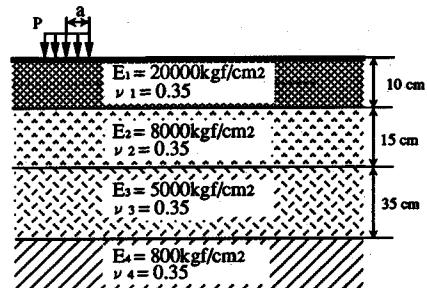


図-3 4 層構造モデル

$\Delta E_k = (C_k + \Delta C_k) E_{sg}$ 、残りは $E_j = C_j \cdot E_{sg}$ として、表面のたわみを計算できる。 ΔC_k は C_k の微小量であり、 $\Delta C_k = 0.001 C_k$ としている。計算手順のフローを図-2 に示す。

Gauss-Newton では、たわみを Taylor 展開し、1 次の項までを利用している。 δC_k の個々の要素の値が大きくなりすぎると、1 次近似の精度は悪くなる。従い、繰り返し計算を行うとき δC_k の各要素にムーブリミットを設定する必要がある。

従来の Gauss-Newton 法（以後従来法と呼ぶ）では层数が M のとき、1 回の繰り返し計算を行なうため $M+1$ 回の弾性多層解析を行なう必要があるのに対し、本方法では M 回解析することになる。解析回数は、1 回減少するだけであるが、舗装の层数が 3 層～5 層であることを考えると、1 回の繰り返し計算の中で解析の部分の計算時間が 17～25% だけ減少することになる。しかし、これだけではなく 1 組のデータの逆解析に要する時間がさらに減少する。このことは後で例題を用いて示す。

3. 逆解析の数値シミュレーション

改良 Gauss-Newton 法（以後改良法と呼ぶ）の有効性を示すため数値シミュレーションを行い、従来法の結果と比較を行う。例題として、図-3に示すような最下層（路床）が半無限となる 4 層構造を用いることにする。各層の厚さ及びポアソン比は既知とし、図に示したもの用いる。また荷重は 5 tf が半径 15 cm の円に等分布していると考える。

図-3 のモデルを解析し、得られた着目点のたわみを 1/1000 mm の位で丸めた値を表-1 に示している。この表-1 の数値を測定値と仮定し、従来法と本論文に提案する改良法を用いて逆解析を行った。従来法の初期値とその結果を表-2 に示した。一方、表-3 は改良法に用いた初期値とその結果である。改良法の初期値は、各層の弾性係数を路床の弾性係数で割った値であり、表-2 の初期値を参考に設定した。初期値の C_1, C_2, C_3 の値を用いて、式 (4) より $E_4 = (E_{sg})$ を計算している。またこの比の値を用いて E_1, E_2, E_3 を計算した結果が Itr=1 に示された弾性係数の値である。

Itr=2 以降は、まず C_1, C_2, C_3 の値を Gauss-Newton 法で更新し、式 (4) より $E_4 = (E_{sg})$ の値を計算、さらに更新された比の値を用いて残りの層の弾性係数 E_1, E_2, E_3 を求めている。両者を比較すると、繰り返し計算回数に関しては、従来法では Itr=11 回に対し、改良法は Itr=5 回目で収束していることがわかる。初期値の与え方にもよるが、ほとんどの場合、従来法に比べ改良法の方が収束するまでの繰り返し計算回数が少なくなることが確認されている。1 回当たりの繰り返し計算に要した時間は従来法で 16 秒、改良法で 12 秒であり、4 秒の差がみられる。この理由は、改良法では従来法より変数の数が 1 つ減るからである。また全計算時間では、従来法は約 3 分、改良法は約 1 分となっている。収束したときの測定データとして用いたたわみと解析たわみの不一致度を表-2、表-3 に示している。その結果から測定たわみと解析たわみは十分に精度良く一致していることが明らかである。ここで用いた計算機は PC-9801、32 BIT (i386, 25 MHz, 数値演算プロセッサ付) で、用いた言語は FORTRAN である。

4. FWD 試験データを用いた逆解析

逆解析では数値シミュレーションを行う限り一般的に良い結果が得られている。そこで、FWD 試験による実測データを用いて逆解析を行うことにする。逆解析に用いた実測データとその測定位置を表-4 に示す。試験がなされた舗装は図-4 に示すように 5 層から成っている。各層のポアソン比の値は不明であるが、その値が各層の弾性係数に及ぼす影響が比較的に小さいことが分かって

表-1 4 層構造モデルでの測定点とたわみ

測定位置	0cm	30cm	45cm	60cm	90cm	150cm	250cm
たわみ(cm)	0.0427	0.0285	0.0246	0.0218	0.0176	0.0121	0.0073

表-2 従来法の Gauss-Newton 法の初期値とその結果

4 層構造の弾性係数推定値 層数=4 測定点数=7						
初期値 (kgf/cm²) E1=40000 E2=20000 E3=10000 E4=1500						
Itr	E1	E2	E3	E4	J	
1	40000.0	20000.0	10000.0	1500.0	0.102×10 ⁻²	
2	36000.0	18000.0	9000.0	1350.0	0.794×10 ⁻³	
3						
10	19201.6	8213.6	5068.1	797.9	0.228×10 ⁻³	
11	19181.5	8232.7	5068.1	797.9	0.211×10 ⁻³	
推定値 (kgf/cm²) : 19182 8233 5068 798						
解析たわみ(cm) : 0.0427 0.0285 0.0246 0.0218 0.0176 0.0121 0.0073						
たわみ不一致度(1-z/z) : 0.000 0.000 0.001 0.000 -0.002 0.000 0.003						
評価関数 J=Σ(u-u') ² : 0.211×10 ⁻⁴						
単位: 1kgf/cm²=98kPa						

表-3 改良 Gauss-Newton 法の初期値とその結果

4 層構造の弾性係数推定値 層数=4 測定点数=7						
初期値 (弾性係数比) C1=26.6 C2=13.3 C3=6.6 Esg=1						
Itr	E1	E2	E3	E4	J	
1	20413.0	10206.5	5103.3	765.5	0.289×10 ⁻⁵	
2	18871.3	9435.6	5011.9	786.3	0.576×10 ⁻⁶	
3	19140.4	8578.3	5042.4	794.3	0.589×10 ⁻⁷	
4	19190.3	8219.1	5068.9	798.0	0.218×10 ⁻⁸	
5	19183.4	8232.1	5068.1	797.9	0.211×10 ⁻⁸	
推定値 (kgf/cm²) : 19183 8232 5068 798						
解析たわみ(cm) : 0.0427 0.0285 0.0246 0.0218 0.0176 0.0121 0.0073						
たわみ不一致度(1-z/z) : 0.000 0.000 0.001 0.000 -0.002 0.000 0.003						
評価関数 J=Σ(u-u') ² : 0.211×10 ⁻⁴						
単位: 1kgf/cm²=98kPa						

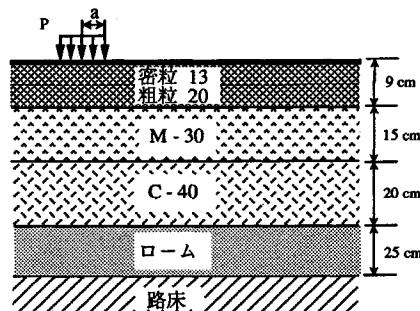


図-4 5 層構造モデル

いる。そこで、図-3 のモデルと同様ここでもすべての層のポアソン比の値を 0.35 とした。本舗装の構造解析にも弾性多層解析が適用できるとして、BISAR を用いて順解析を行っている。また逆解析は従来法と改良法で行い、その結果をそれぞれ表-5 と表-6 に示した。どちらの方法を用いても逆解析結果はほぼ同じ値になっている。しかし従来法では収束するまで 52 回の繰り返し計算を行っているのに対し、改良法では 27 回の繰り返し計算で収束している。繰り返し計算 1 回当たりに要する時間は従来法では 22 秒、改良法では 18 秒となってい

表—4 FWD による測定位置と実測データ

測定位置	0cm	20cm	45cm	60cm	90cm	150cm
たわみ(cm)	0.1022	0.0807	0.0492	0.0376	0.0240	0.0134

表—5 従来の Gauss-Newton 法の初期値とその結果

5層構造の弾性係数推定値 層数=5 測定点数=6						
初期値 (kgf/cm ²) : 40000 10000 10000 5000 5000 1000						
ltr	E1	E2	E3	E4	E5	J
1	40000.0	10000.0	10000.0	5000.0	1000.0	0.1018×10 ³
2	36000.0	11000.0	9000.0	5500.0	900.0	0.9661×10 ³
3	32400.0	12100.0	8100.0	6050.0	810.0	0.9123×10 ³
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
51	36048.4	1306.8	784.9	474.7	680.8	0.3942×10 ³
52	36071.7	1303.1	788.3	473.3	681.0	0.3940×10 ³
推定値(kgf/cm ²) : 36072 1303 788 473 681						
解析たわみ(cm) : 0.1022 0.0807 0.0492 0.0376 0.0240 0.0134						
たわみ不一致度(1-zi/zi) : 0.000 0.000 -0.001 0.001 -0.001 0.001						
評価関数J=Σ(zi-zi) ² : 0.3940×10 ³						
単位: 1kgf/cm ² =98kPa						

表—6 改良 Gauss-Newton 法の初期値とその結果

5層構造の弾性係数推定値 層数=5 測定点数=6						
初期値(弾性係数比) : C ₁ =40 C ₂ =10 C ₃ =10 C ₄ =5 E _g =1						
ltr	E1	E2	E3	E4	E5	J
1	6970.4	3485.2	3485.2	1742.6	348.5	0.362×10 ³
2	6395.5	3908.3	3197.7	1598.9	355.3	0.351×10 ³
3	5900.3	4385.8	2935.9	1468.0	362.5	0.338×10 ³
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
26	36054.6	1306.9	784.0	475.2	680.9	0.198×10 ³
27	36121.7	1296.7	793.1	471.6	681.2	0.198×10 ³
推定値(kgf/cm ²) : 36122 1297 793 472 681						
解析たわみ(cm) : 0.1022 0.0807 0.0492 0.0376 0.0240 0.0134						
たわみ不一致度(1-zi/zi) : 0.000 0.000 -0.001 0.001 -0.001 0.001						
評価関数J=Σ(zi-zi) ² : 0.1976×10 ³						
単位: 1kgf/cm ² =98kPa						

る。また収束するまでに要する全計算時間は、従来法では約19分、改良法では約8分である。

表—5、表—6 には、たわみの不一致度も併記した。たわみの不一致度とは測定たわみと解析たわみの差を測

定たわみで割った値であり、負の符号は解析たわみが測定たわみより大きいことを、正は測定たわみが解析たわみより大きいことを意味している。この結果は、たわみ不一致度が±0.1%であること、すなわち解析たわみと測定たわみの一致度は、ほぼ99.9%であることを意味している。

5. おわりに

本論文では、改良 Gauss-Newton 法を提案し、従来法に比べて計算効率において優れていることを示した。ページの都合によりここでは省略しているが、この他実測データを用いて数多くの逆解析を行った結果、同様の結果を得ている。最後に、舗装構造が弾性多層構造でモデル化できる限り、本逆解析法は、測定たわみと解析たわみが十分に精度良く一致するように各層の弾性係数を決定できていることが確認できている。

謝辞 本論文の例題の一部には、FWD 研究会の資料を使用させていただいた。会長の笠原 篤教授(北海道工業大学)並びに本研究会会員各位に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) 松井邦人・井上武美・三瓶辰之：舗装の各層の弾性係数を表面たわみから推定する一手法、土木学会論文集、第420号/V-13, pp.177~185, 1991.
- 2) Uzan, J., Lytton, R.L. and Germann, F.P. : General procedure for backcalculating layer moduli, Nondestructive Testing of Pavements and Backcalculation of Moduli (Ed. by A.I. Bush and B.Y. Baladi) ASTM STP 1026 pp.228, 1989.
- 3) 中川徹・小柳義雄：最小二乗法による実験データ解析－プログラム SALS, UP 応用数学選書7, 東京大学出版会, 1982.

(1992.12.3.受付)

IMPROVED GAUSS-NEWTON METHOD FOR STRUCTURAL EVALUATION OF PAVEMENT

Kunihito MATSUI and Naotoshi SATO

One of the most common backcalculation procedures from nondestructive testing data is called the Gauss-Newton method which evaluates the layer stiffnesses of pavement from a set of measured surface deflections. On the other hand Uzan and his coworkers have utilized the Hook-Jeev's pattern search algorithm to find the layer modulus ratios before they obtain layer moduli. The use of modulus ratios is expected to improve computational efficiency due to a reduced number of unknowns. Hence the authors developed a new Gauss-Newton algorithm based on the reduced number of unknowns and demonstrates its efficiency and stability through example problems.