

投稿論文 (和文ノート)

**TECHNICAL
NOTE**

条件付確率場のシミュレーション理論の検証

星谷 勝*・桑名 智英**

第1著者は先に「条件付確率場のシミュレーション理論」(土木学会論文集, No.459/ I-22, pp.113~118, 1993)を発表したが,これは測定点のサンプル場が与えられたという条件下で,未測定点のサンプル場をシミュレーションする手法とその基礎としての線形補間に関する理論であった.本論はガウス性確率場において,この理論がシミュレーションの1手法の提案にとどまらず,条件付確率場の理論として厳密解を与えることを証明するとともに,数値計算例により実証したものである.

Key Words : conditional stochastic field, gaussian process, linear interpolation

1. 条件付確率場の線形補間理論

先に発表した論文^{1)~3)}において,著者の一人は条件付確率場のシミュレーション法を提案した.この論文は,確率場 $W(X)$ がガウス性であり,平均0で共分散関数が既知のとき, N ヶ所の測定点でサンプル実現値 $W(X_i)$, $i=1\sim N$ が与えられたとした条件付きで,未測定点のサンプル値 $W^*(X_r)$ を $W(X_i)$ を用いた線形補間式で予測するものである.その基本式は次式で与えられる.

$$W^*(X_r) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(X_r) W(X_i) + \varepsilon(X_r) \dots\dots\dots (1)$$

ここで, $\lambda_i(X_r)$ は誤差の最小自乗規範により決定している.

なお,本文の記号で下線付き記号 $\underline{W}(X)$ は確率場 $W(X)$ の1サンプル場を表している.また, $W^*(X)$ は確率場 $W(X)$ の推定確率場を表す.

さて,本研究の目的はこの線形補間予測式に基づく方法が決して統計的手法による近似式ではなく,条件付確率場に関する厳密な理論を構築していることを実証することにある.ここで,先の論文を歪めることなく測定点のサンプル実現値を $W(X_i)$, $i=1, 2, \dots, n-1$ とし,未測定点のサンプル値を $W^*(X_n)$ と変更して数理論的な考察を進めることにする.

ここで,先の論文の結果を新しい記号を用い,且つ行列の形式で要約して示す次のようになる.

a) 基本線形補間式

$$W^*(X_n) = W_{n-1}^T \lambda + \varepsilon(X_n) \dots\dots\dots (2)$$

ただし, $W_i = W(X_i)$ と略記して, $W_{n-1} = [W_1, W_2, \dots, W_{n-1}]^T$. また, $\lambda_{in} = \lambda_i(X_n)$ と略記して, $\lambda = [\lambda_{1n}, \lambda_{2n},$

$\dots, \lambda_{n-1n}]^T$.

さらに,誤差 $\varepsilon(X_n)$ の自乗平均値を最小にするように λ を決定すると,

$$\lambda = C_{n-1}^{-1} C \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる.

ただし, C_{n-1} は共分散行列であり,次式で与えられる.

$$C_{n-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n-1} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1,1} & C_{n-1,2} & \dots & C_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

また,

$$C = [C_{n1}, C_{n2}, \dots, C_{nn}]^T \dots\dots\dots (5)$$

ここで, C_{ij} は空間ベクトル座標 X_i と X_j に於ける共分散値であり,先の論文の記号で示すと,

$C_{ij} = C(W(X_i), W(X_j))$ となる.

$\varepsilon(X_n)$ は誤差関数であり,平均0で分散値は,

$$\sigma^2[\varepsilon(X_n)] = C_{nn} - C^T \lambda \dots\dots\dots (6)$$

b) 条件付平均値

$$\mu_{W^*(X_n)|W_{n-1}} = E[W^*(X_n)|cond.]$$

$$= W_{n-1}^T \lambda$$

$$= W_{n-1}^T C_{n-1}^{-1} C \dots\dots\dots (7)$$

c) 条件付分散値

$$\sigma_{W^*(X_n)|W_{n-1}}^2 = \sigma^2[W^*(X_n)|cond.]$$

$$= C_{nn} - C^T \lambda$$

$$= C_{nn} - C^T C_{n-1}^{-1} C \dots\dots\dots (8)$$

2. 条件付確率密度関数による理論解を用いた検証

初めに式(2)の意味を考えてみる.式(2)は既測定点における W_{n-1} を未測定点の $W^*(X_n)$ と線形的に結び付けた式であり,一見すると,大きな近似式を導入し

* 正会員 Ph.D. 武蔵工業大学教授 工学部土木工学科 (〒158 世田谷区玉堤1-28-1)

** 学生会員 武蔵工業大学大学院 土木工学専攻

たように思える。しかしながら、この式は仮定による導入でなく、きわめて自然な理屈に基づく当然の基本式なのである。その理由は次の通りである。

いま、式(2)に代わって、 W_{n-1} の非線形補間式を一般的に次のように表してみる。

$$W^*(X_n) = g(W_{n-1}) + \varepsilon(X_n) \dots\dots\dots (9)$$

確率場はガウス性であり、 $W_{n-1} = [W_1, W_2, \dots, W_{n-1}]^T$ と $W_n = W^*(X_n)$ は互いに相関を有する n 次元の結合ガウス確率密度関数によって結ばれている。もし、ここで式(9)のように非線形関数で結ばれるならば、その出力である $W^*(X_n)$ は非ガウス性確率密度関数を有することになり、前提条件のガウス性確率場であることに反する。故に、 $g(W_{n-1})$ は線形関数でなければ大きな矛盾を持ち込んだことになる。したがって、式(2)の線形補間式は仮定による近似式ではなく、きわめて自然に設定された式と理解できる。

以上の考察で十分だと思われるが、さらに式(2)の意味を明らかにするために、ここでは W_{n-1} が与えられたとした条件付の W_n に関する確率密度関数を誘導し、 W_n の平均値と分散値がそれぞれ式(7)と式(8)に一致することを証明する。

n 次元結合ガウス確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(W_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |C_n|}} \exp\left[-\frac{1}{2} W_n^T C_n^{-1} W_n\right] \dots\dots\dots (10)$$

故に W_n の条件付確率密度関数は

$$f(W_n | W_{n-1}) = \frac{f(W_n)}{f(W_{n-1})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{|C_n|}{|C_{n-1}|}} \exp\left[-\frac{1}{2} (W_n^T C_n^{-1} W_n - W_{n-1}^T C_{n-1}^{-1} W_{n-1})\right] \dots\dots\dots (11)$$

最初に式(11)の分母における $\frac{|C_n|}{|C_{n-1}|}$ を検討する。

ここで、 $C_n = \begin{bmatrix} C_{n-1} & C \\ C^T & C_{nn} \end{bmatrix}$ と分割すると

逆行列は次のように求めることができる⁴⁾。

$$C_n^{-1} = \begin{bmatrix} C_{n-1}^{-1} + PR^{-1}P^T & -PR^{-1} \\ -P^T R^{-1} & R^{-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、

$$P = C_{n-1}^{-1} C \dots\dots\dots (13)$$

$$R = C_{nn} - P^T C$$

$$= C_{nn} - C^T C_{n-1}^{-1} C \text{ (スカラー量)} \dots\dots\dots (14)$$

ところで、 $C_n^{-1} = \frac{1}{|C_n|} adj C_n$ であるから、この逆行列の

第 n 行 n 列要素は $(adj C_n)_{nn} = |C_{n-1}|$ より

$$(C_n^{-1})_{nn} = R^{-1} = \frac{(adj C_n)_{nn}}{|C_n|} = \frac{|C_{n-1}|}{|C_n|} \dots\dots\dots (15)$$

式(14)、(15)より

$$\frac{|C_n|}{|C_{n-1}|} = C_{nn} - C^T C_{n-1}^{-1} C \dots\dots\dots (16)$$

を得る。式(16)は式(8)に示した $W^*(X_n)$ の条件付分散値と一致する。

次に、(11)式の指数関数を検討する。

式(12)を用いると、

$$W_n^T C_n^{-1} W_n = [W_{n-1}^T, W_n] \cdot \begin{bmatrix} C_{n-1}^{-1} + PR^{-1}P^T & -PR^{-1} \\ -P^T R^{-1} & R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{n-1} \\ W_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

$$W_n^T C_n^{-1} W_n = W_{n-1}^T C_{n-1}^{-1} W_{n-1} \dots\dots\dots (18)$$

ここで与えられるサンプル場は W_{n-1} として表現している。式(17)、(18)より整理すると

$$W_n^T C_n^{-1} W_n - W_{n-1}^T C_{n-1}^{-1} W_{n-1} = \frac{(W_n - W_{n-1}^T C_{n-1}^{-1} C)^2}{R} = \frac{(W_n - W_{n-1}^T C_{n-1}^{-1} C)^2}{C_{nn} - C^T C_{n-1}^{-1} C} \dots\dots\dots (19)$$

式(19)における分子に含まれる $W_{n-1}^T C_{n-1}^{-1} C$ は式(7)の条件付平均値に一致する。

式(16)、(19)を(11)式に代入すれば、 $f(W_n | W_{n-1})$ はガウス確率密度関数の標準形になっており、これが厳密解である。ところが、分散値(16)式および式(19)中の平均値 $W_{n-1}^T C_{n-1}^{-1} C$ がそれぞれ線形補間式に基づく条件付分散値(8)式と条件付平均値(7)式と一致したことになる。以上より、先の論文における基本式に基づいて得られる諸式は近似解ではなく、厳密に条件付確率場の理論を構築していることがわかる。

なお、サンプル場をシミュレートする場合に、先の論文では漸次拡張方式の手法を提案している。そこでは、シミュレートされた予測値を次々に測定サンプル値に組み込む方式を示したが、既観測値の $W(X_i)$ 、 $i=1, 2, \dots, n-1$ とコンピュータ上でシミュレートされた予測値 $W^*(X_n)$ は確率場の特性を共通に満足したものであるから、両者間に何ら差異は認められない。したがって、順次シミュレートされた予測値を既観測値に組み込んで、Krigingによる補間を行うことが可能である。

最後に、式(2)を時空間場に拡張しても、本論の厳密解を与えるという議論はそのまま適用できることは明らかであろう。たとえば、式(2)における空間ベクトル座標 X_n は $X_n = \{x, y, z, t\}$ と解釈し、 x, y, z を3次元空間座標、 t を時間変数とする4要素からなる空間ベクトルと考えればよいからである。

なお、時空間場における線形補間理論に関しては次回に発表する予定であり、その際、参考文献^{5),6)}で示された条件付確率密度関数を用いた解と線形補間式に基づく

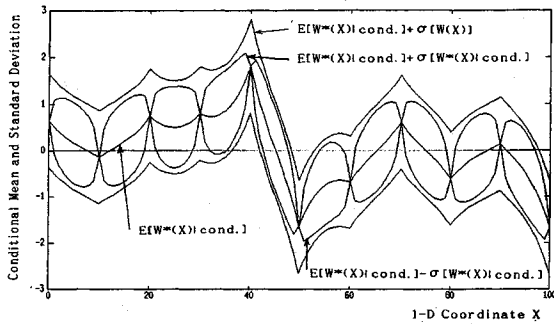


Fig.1 Analytical Solutions

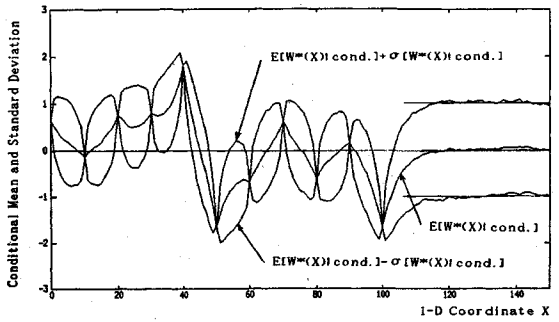


Fig.3 Inter and Extra-polation

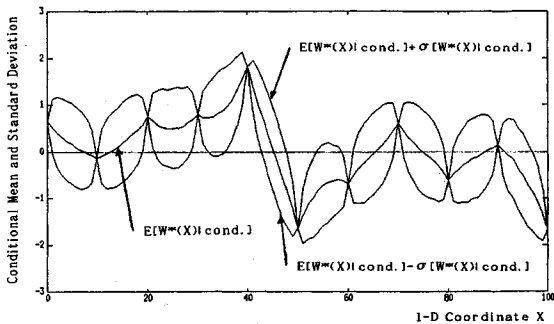
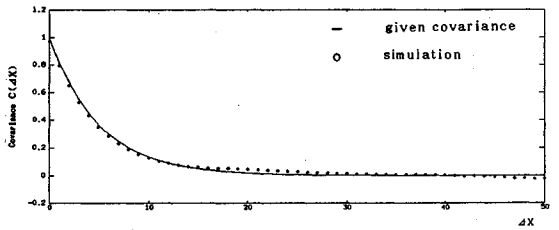
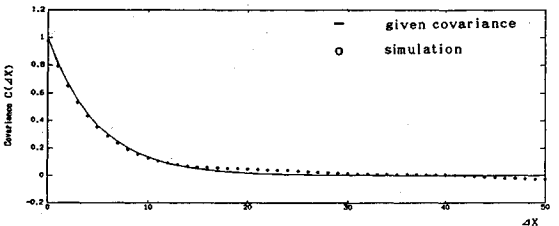


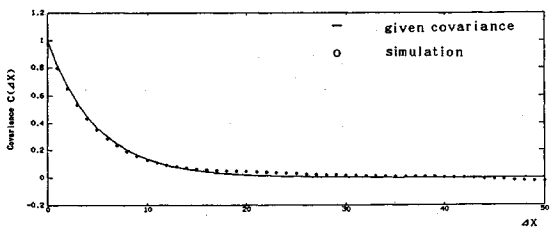
Fig.2 Solutions by Simulation by Step by a Step Expansion Method (1000 sample fields)



(a) Left to Right Expansion



(b) Right to Left Expansion



(c) Alternative Expansion

Fig.4 Covariance of Stochastic Field

解との一致性を示すことにする。

3. 数値解析例を用いた検証

さらに、数値的に本論の線形補間理論の厳密性を実証する。ここでは、簡単にするため均一場 (homogeneous field) として、次式の共分散関数を有する確率場を考える。

$$C(W(X_i), W(X_m)) = \exp\left[-\frac{|X_i - X_m|}{5.0}\right] \dots\dots\dots (20)$$

観測されたサンプル実現値を等間隔に 11 点与える ($W(X_i), i=1\sim 11$)。ただし、ここではコレスキー分解を用いた相関同時シミュレーションによりシミュレートされた 1 サンプルセットを用いた。

Fig.1 は、式 (7) で与えられる条件付平均値 $E[W^*(X)|cond.]$ 、式 (8) で与えられる条件付標準偏差 $\sigma[W^*(X)|cond.]$ である。 $\sigma[W(X)]$ は無条件場における標準偏差である。

Fig.1 における条件付標準偏差は無条件場の標準偏差を越えることはない。これは、条件が加わることにより不確実性が減少していることを表している。

Fig.2 は漸次拡張方式によるシミュレート結果であり、各点において 1000 サンプルを抽出し、その統計量 (条件付平均, 条件付標準偏差) を図示してものである。以上の結果である Fig. 1 と Fig. 2 はほとんど一致して

いる。

Fig.3 において推定点が観測点より離れた場合に条件付平均及び分散 (標準偏差) がそれぞれ 0 及び 1 に近づく。つまり、離れた点を外挿すると、観測点における値の影響を受けなくなり、無条件場の特性に近づくことを表している。

Fig.4 は漸次拡張方式において、シミュレートする順序に依存しないことを示すために拡張する順序を次の 3 パターン、すなわち左から右への拡張、右から左への拡張、中心に向かって交互の拡張、と変えた場合の結果である。この共分散値は次のようにして求めている。先ず、

11ヶ所の観測点上の実現値を無条件シミュレーションで求め、次にそれらの間を条件付シミュレーションで補間した。次に再び11ヶ所の観測点上の実現値を無条件シミュレーションで作成しなおし、同様にその間を補間している。このような作業で合計1000サンプル場を作成し、それらの統計処理により共分散値を計算している。言い換えれば無条件場を作成していることと同じである。結果を見ると漸次拡張方式において、その拡張の順序には関係ないことが与えた共分散と一致することによりわかる。

4. 結 論

(1) 先に発表した論文¹⁾⁻³⁾および本論の議論により、最小自乗法規範による線形補間式を用いた理論は条件付ガウス性確率場の厳密解を与えることが証明された。

(2) この理論を時空間の条件付確率場に拡張しても、(1)の理論は不変であることは容易に予見できる。

最後に、本研究は第一著者が理論による実証を、第二著者が計算による実証を行った。

参 考 文 献

- 1) 星谷勝：確率場の条件付シミュレーションに関する考察，土木学会第47回年次学術講演会，pp.858～859，1992.
- 2) Hoshiya, M.: Conditional Simulation of a Stochastic Field, ICOSAR '93, Innsbruck, Aug., 1993.
- 3) 星谷勝：条件付確率場のシミュレーション理論，土木学会論文集 No. 459/ I -22, 1993.
- 4) 栖原二郎：マトリックス算法概説，日本鋼構造協会，1971.
- 5) 盛川仁・亀田弘行：既知波形を含む条件付確率場のシミュレーション理論，京大防災研究所，都市施設耐震システム研究センター，研究報告別冊第8号，1991.
- 6) 盛川仁・亀田弘行：条件付確率場の理論構築とモンテカルロ・シミュレーションおよび初期通過問題への応用，土木学会第47回年次学術講演会，I-343，pp.862～863，1992.

(1992.11.30 受付)

COMPLEMENTARY DISCUSSIONS ON THEORY OF CONDITIONAL STOCHASTIC FIELD

Masaru HOSHIYA and Tomohide KUWANA

Complementary discussions on the linear interpolation method on a conditional Gaussian stochastic field are made which has been previously proposed by one of the writers. It is proved that the linear interpolation gives solid solutions which coincide precisely with solutions by a conditional probability density function approach. Discussion is also extended to applicability of conclusions herein obtained to a space-time Gaussian field.