

**投稿論文** (和文ノート)

**TECHNICAL  
NOTE**

# 面外せん断荷重下での円形・楕円形トンネルを有する粘弾性岩盤の変位解析

平島健一\*・熊坂博夫\*\*・三谷泰浩\*\*\*・柴田善夫\*\*\*\*

本ノートは面外せん断荷重下での円形・楕円形トンネルを有する線形粘弾性岩盤を対象とし、StandardおよびBurgersタイプの粘弾性モデルに対する閉じた型の解析解と数値例を示した。ここでの理論は、トンネル周縁の応力、変位のみならず、楕円形トンネルの周辺の内部位置の応力、変位挙動も完全に求められるように構成されている。また、巻立てのない場合および剛体の巻立てがある場合の両方が考慮できる理論となっている。

**Key Words**: elliptic tunnel, no lining or rigid lining, viscoelastic medium, out-of-plane shear, Standard and Burgers models

## 1. 緒言

著者らは弾性厳密解を利用して面内荷重のみならず面外せん断荷重が作用する場合の等方性・異方性弾性体内の円形・楕円形トンネル問題の応力、変位を求める解析理論を発表した<sup>1),2)</sup>。そこではいわゆる、順解析法と共に高精度の逆解析手法も提示した。さらに、その成果を2次元面内荷重 (i.e.  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  および内圧等) 下での等方性粘弾性体内の円形・楕円形トンネル問題の変位解析に適用した理論を発表した<sup>3)</sup>。その手法は弾性体と線形粘弾性体の間に成立する周知の対応原理に基づくもので、その論文では各種の粘弾性モデルに対する基本的な解析解と幾つかの数値例を与えている。

本論文では、そこで触れられなかった面外せん断荷重 (i.e.  $\tau_{xz}^0, \tau_{yz}^0$  および孔境界に作用する内部せん断応力等) 下での同種の問題の変位解析のための理論と幾つかの数値例を提示する。ここでの成果と先の論文のそれとを重ね合わせて用いれば、十分長いトンネルに対して任意傾斜の3次元的主応力荷重下でのトンネル周辺の時間的変形挙動の進展を定量的に解明できることになる。

なお、対応原理に基づいて取り上げる粘弾性モデルとしてはMaxwell, Kelvin (Voigt), StandardおよびBurgersなどの各モデルである。

## 2. 内部に楕円形境界を有する弾性問題の基礎式と基本解

### (1) 応力、変位を求める公式

対象となる応力、変位はFig.1のように、 $xy$ -平面に垂直な(奥行き)方向の座標を $z$ として、面外せん断応

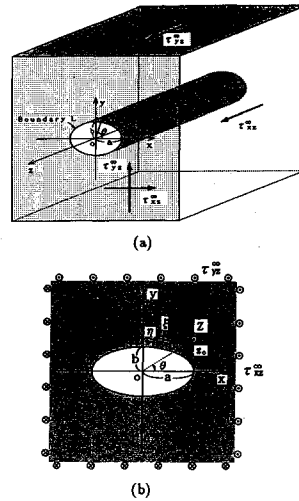


Fig.1 Geometry of infinite medium with elliptic tunnel under (a) applied uniform stresses  $\tau_{xz}^0, \tau_{yz}^0$  at infinity and (b) concentrated force  $Z$  at point  $z_0$ .

力  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  および変位  $u_z$  であり、それらはいずれも面内座標  $(x, y)$  のみの関数とする。このとき、物体力を無視した釣合式、構成式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\tau_{xz} = G \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial u_z}{\partial y} \dots\dots\dots (2)$$

写像関数  $\omega(\zeta)$  を前論文<sup>3)</sup>の式(1), (2)と同様に次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} z &= x + iy = \omega(\zeta) = R_0 \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \\ \zeta &= \xi + i\eta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$R_0 = \frac{1}{2}(a+b), \quad m = \frac{a-b}{a+b}.$$

このとき、Fig.1の楕円形境界  $L$  に沿う面内の直交曲線座標系  $(\xi, \eta)$  での応力、変位は複素関数  $F(\zeta)$  を用いて

\* 正会員 工博 山梨大学教授 工学部土木環境工学科 (〒400 甲府市武田 4-3-11)  
 \*\* 正会員 工修 清水建設(株) 技術開発本部  
 \*\*\* 正会員 工修 清水建設(株) 原子力本部  
 \*\*\*\* 学生員 山梨大学大学院学生

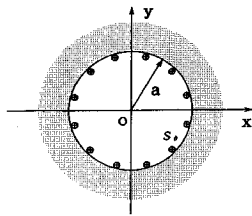


Fig.2 Uniformly distributed shear stress  $s_0$  applied at the inner circular boundary of tunnel.

次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} - i\tau_{yz} &= (\tau_{xz} - i\tau_{yz})e^{i\theta} = F^I(\zeta) \cdot e^{i\theta}, \\ u_z &= \frac{1}{2G} [F(\zeta) + \bar{F}(\bar{\zeta})] = \frac{1}{G} \text{Re}[F(\zeta)]. \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

ここに,

$$e^{i\theta} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \dots\dots (5)$$

なお、上式中の上添字の  $I$  は  $z$  に関する微分を、プライム記号'は  $\zeta$  による微分を意味する。また、上付きの  $-$  は複素共役を表す。

(2) 無限遠に様な面外せん断応力  $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$  が作用する場合

Fig.1 に示したように、楕円形境界  $L$  から十分に離れた位置に様なせん断応力  $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$  が作用する場合の任意点の応力、変位を求めるための複素関数  $F(\zeta), F^I(\zeta)$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F(\zeta) &= R_0(C\zeta - k_1\bar{C}/\zeta), \\ F^I(\zeta) &= R_0(C + k_1\bar{C}/\zeta^2), \\ C &= \tau_{xz}^\infty - i\tau_{yz}^\infty. \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

上式中の係数  $k_1$  は領域内部の楕円形境界  $L$  の境界条件により、次の値をとる。

$$k_1 = \begin{cases} -1 & : \text{自由境界}, \\ 1 & : \text{固定(剛体)境界}. \end{cases} \dots\dots (7)$$

したがって、 $k_1 = -1$  としたものは巻立てのない素掘りトンネルの場合に、また、 $k_1 = 1$  としたものは地山の力学定数に比較して極めて大きな剛性の巻立てを施したトンネルの場合に相当する。

なお、ひずみ成分は次式で計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \tau_{xz}/G, & \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G, \\ \gamma_{zx} &= \tau_{zx}/G, & \gamma_{zy} &= \tau_{zy}/G. \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

(3) 境界  $L$  の周縁に一定の面外せん断応力  $s_0$  が作用する場合

領域内部の境界  $L$  が楕円形 ( $a \neq b$ ) の場合、上述の荷重状態に対して楕円積分の実行が必要となるため、円形 ( $a = b$ ) の場合についてのみ閉じた型の解析解が求められており、その結果は次式で与えられる<sup>5)</sup> (Fig.2 参照)。

$$F(\zeta) = -as_0 \ln \zeta, \quad F^I(\zeta) = -s_0/\zeta. \dots\dots (9)$$

(4) 領域内の任意位置に面外集聚力が作用する場合

Fig.1 (b) のように、 $z_0 (= x_0 + iy_0)$  の有限位置に面外集聚力  $Z$  が作用する場合の複素関数  $F(\zeta), F^I(\zeta)$  は次のように与えられる<sup>4)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} F(\zeta) &= -\frac{Z}{2\pi} \left[ \ln(\zeta - \zeta_0) \right. \\ &\quad \left. - k_1 \{ \ln(\zeta - 1/\bar{\zeta}_0) - \ln \zeta \} \right], \\ F^I(\zeta) &= -\frac{Z}{2\pi} \cdot \frac{1}{\omega'(\zeta)} \left[ 1/(\zeta - \zeta_0) \right. \\ &\quad \left. - k_1 \{ \bar{\zeta}_0/(\zeta \bar{\zeta}_0 - 1) - 1/\zeta \} \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)$$

ここに、 $\zeta_0$  は Fig.1 (b) の点  $z_0$  に対する  $\zeta$ -平面上の写像点であるから、式 (3) で  $z = z_0, \zeta = \zeta_0$  を代入して解けばよく、その結果は次のようになる。

$$\zeta_0 = \frac{1}{2R_0} \left[ z_0 + \sqrt{z_0^2 - 4mR_0} \right]. \dots\dots (11)$$

なお、式 (10) の  $k_1$  は境界  $L$  の自由・固定の各境界条件に応じて、式 (7) の値をとる。

ここで得られた解で、作用点  $z_0$  を境界  $L$  上に設定し、さらに  $k_1 = -1$  とすれば、巻立てのない素掘りの楕円形トンネルの周縁上の一点に面外集聚力が作用する問題の解析解に帰着する。

(5) 荷重下での楕円形境界周辺の二点間の距離変化

この項はトンネルの NATM 工法による A, B 計測に関連して必要となるもので、変形前の任意点  $P$  の座標を  $(x_p, y_p, 0)$  とすると、式 (1) より

$$\left. \begin{aligned} x_p &= R_0(\rho_p + m/\rho_p) \cos \theta_p, \\ y_p &= R_0(\rho_p + m/\rho_p) \sin \theta_p. \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

となる。特別な場合として、点  $P$  が楕円形境界  $L$  上の場合、 $\rho_p = 1$  であるから次式となる。

$$x_p = a \cos \theta_p, \quad y_p = b \sin \theta_p. \dots\dots (13)$$

同様に、任意点  $Q$  の座標  $(x_q, y_q, 0)$  は式 (12), (13) において添字  $p$  を  $q$  に置き換えればよい。

次に、(2)~(4) で示したような面外荷重を受けて変形が生じた場合に、点  $P$  の位置が  $P'$  に移動したものとすれば、その座標  $(x'_p, y'_p, z'_p)$  は次式で与えられる。

$$x'_p = x_p, \quad y'_p = y_p, \quad z'_p = u_p^z. \dots\dots (14)$$

ここに、 $u_p^z$  は式 (4) で与えられる変位の  $P$  点での値である。

同様に、 $Q$  点について変形後の位置  $Q'$  の座標  $(x'_q, y'_q, z'_q)$  は式 (11)~(14) で添字  $p$  を  $q$  に代えればよい。

上記の結果から、 $xy$ -平面内の変形前の  $PQ$  間の距離  $PQ$  に対する変形後の奥行き ( $z$  軸) 方向の距離変化 ( $u_p^z - u_q^z$ ) の基準量 (見掛け上のせん断ひずみ)  $\gamma_{PQ}$  は次式で求められる。

$$\gamma_{PQ} = \frac{u_1^2 - u_2^2}{PQ} = \frac{u_1^2 - u_2^2}{\sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}} \dots\dots\dots (15)$$

したがって、点P, Qのトンネル軸(z軸)方向変位の差( $u_1^2 - u_2^2$ )が計測されれば、上式を使ってトンネルの逆解析が可能となる。

### 3. 内部に楕円形境界を有する粘弾性問題の解

前節に示した弾性問題の基本解をもとに、粘弾性問題に対する対応原理と著者らの論文<sup>3)</sup>の第3節の項を利用すれば、一般的な線形粘弾性モデルに対する閉じた型の解析解が得られる。ただし、本論文の問題では、弾性定数としては式(5)のせん断弾性係数Gのみしか現れないことから、時間的な荷重作用形式ならびに各々の粘弾性モデルに応じたGに置き換えればよい。そこで今、時刻t=0で瞬間的に楕円形トンネルが開削され、その状態で第2節で考えたような各種の一定荷重が作用するものとすれば、代表的な粘弾性モデルに対するGは次のように置き換えればよい。

○Maxwellモデルの場合：

$$\frac{1}{G} \rightarrow \frac{1}{G_2} + \frac{1}{\eta_2} t \dots\dots\dots (16)$$

○Kelvin (Voigt)モデルの場合：

$$\frac{1}{G} \rightarrow \frac{1}{G_1} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{G_1}{\eta_1} t\right) \right\} \dots\dots\dots (17)$$

○Standardモデルの場合：

$$\frac{1}{G} \rightarrow \frac{1}{G_1} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{G_1}{\eta_1} t\right) \right\} + \frac{1}{G_2} \dots\dots\dots (18)$$

○Burgersモデルの場合：

$$\frac{1}{G} \rightarrow \frac{1}{G_1} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{G_1}{\eta_1} t\right) \right\} + \frac{1}{G_2} + \frac{t}{\eta_2} \dots\dots\dots (19)$$

上記の結果を式(4)の1/Gの項に代入したのち、式(6)、(9)または式(10)を用いれば、それぞれの荷重下での粘弾性解が閉じた型の解析解として求められる。したがって、第2節で取り扱った問題に対し、MaxwellモデルからBurgersモデルまでの粘弾性解が得られたことになる。

### 4. 数値計算例

紙面の都合上、無限遠荷重 $\tau_{zz}^\infty$ のみが作用し、楕円形境界Lが応力自由の境界の場合および固定境界の場合の2つの例を取り上げる。また、粘弾性モデルとしてはStandardおよびBurgersの2つのモデルを考え、その材料定数はGoodmanの著書<sup>6)</sup>で採用されている岩塩を対象とする。すなわち、Burgersモデルに対し、

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= 2.07 \text{ GPa}, \quad \eta_1 = 4.83 \times 10^3 \text{ GPa} \cdot \text{min}, \\ G_2 &= 6.90 \text{ GPa}, \quad \eta_2 = 5.73 \times 10^5 \text{ GPa} \cdot \text{min}. \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

とする。また、Standardモデルの場合には、上式のデータで、 $\eta_2 \rightarrow \infty$ としたものを採用する。

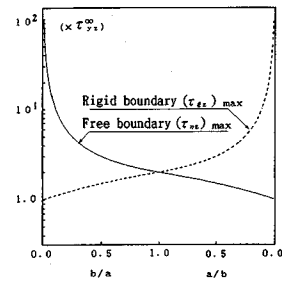


Fig.3 Stress  $\tau_{zz}$  at  $\theta=0^\circ$  of free boundary and stress  $\tau_{zz}$  at  $\theta=90^\circ$  of fixed boundary of elliptic tunnel under applied stress  $\tau_{zz}^\infty$ .

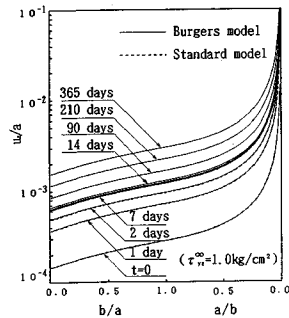


Fig.4 Time variations of displacement  $u_z$  at  $\theta=90^\circ$  ( $i, e, x=0, y=b$ ) of free boundary of elliptic tunnel for the cases of Burgers model and Standard model.

#### (1) 境界Lが自由境界の場合

これは巻立てのない素掘りトンネルが掘削されたような場合に相当するもので、まず、無限遠荷重 $\tau_{zz}^\infty$ の作用下でのトンネル空洞の周縁に生じる応力 $\tau_{zz}$ の最大値 $(\tau_{zz})_{\max}$ を、横軸に楕円形トンネルの形状比a/b(またはb/a)をとりプロットしたものがFig.3である。このとき、自由境界であるから境界Lで $\tau_{zz}$ は零となる。これらの応力値は粘弾性モデルの種類ならびに時間経過に対しても変化は生じない。

次に、境界上の位置で最大変位 $(u_z)_{\max}$ が生じる点、すなわち $x=0, y=b$ の変位 $u_z$ について、横軸に楕円形トンネルの形状比a/b(またはb/a)をとり、経過時間をパラメータとして図示したものがFig.4である。図中にはBurgersモデル、Standardモデルの両方のものが示されているが、Standardモデルでは荷重作用後の経過時間tとして、およそt=7日でほぼ変形の進行は停止し、t=∞の場合の太い実線の曲線に収束しているのに対し、Burgersモデルは当然のことながら、それ以降も変形が継続することが観察される。この図では楕円形トンネルの形状のすべての場合すなわち、円形トンネル、楕円形トンネルさらには直線状クラックの場合の結果が網羅されたものとなっている。この直線状のクラック(b→0)の場合の結果は破壊力学におけるModeⅢ型のものに相当し、その場合の粘弾性特性を把握するための

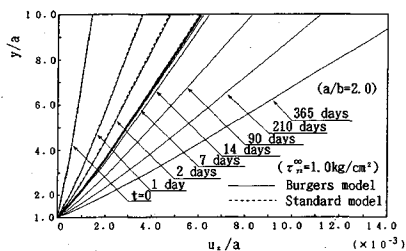


Fig.5 Time variations of displacement  $u_z$  along the  $y$ -axis of fixed boundary of elliptic tunnel ( $b/a=2.0$ ) for the cases of Burgers model and Standard model.

資料となり得るものである。

(2) 境界  $L$  が固定境界の場合

これは地山物性に比較して十分大きい剛性を有する巻立てがトンネル開削後、ただちに施されたような場合に対応するもので、楕円形境界の内部に剛体介在物が存在するとした時の  $y$  軸 (*i.e.*  $x=0$ ) 上での変位  $u_z$  の時間変化に伴う挙動を例示したものが Fig.5 である。この図には楕円形 ( $b/a=2.0$ ) の場合で、それぞれの図において Standard モデルと Burgers モデルの各場合の変位分布が示されている。前者の場合には前項 (1) の場合と同様に、およそ  $t=7$  日経過後にはほぼ変形の進行が終了し、 $t=\infty$  のものに収束しているのがわかる。後者の場合にはその後も変形は継続することになる。先に示した Fig.3 には境界  $L$  に沿う岩盤地山のせん断応力  $\tau_{xz}$  の最大値  $(\tau_{xz})_{max}$  が楕円形トンネルの形状比  $a/b$  に対しても図示されている。このとき、境界  $L$  に沿って  $\tau_{xz}$  は零となっている。これは (1) の自由境界の場合と対をなしており、ここでの  $(\tau_{xz})_{max}$  が先の場合  $(\tau_{xz})_{max}$  と  $a/b=1.0$  の円形の場合を軸にして対称な応力集中係数となっていることが観察される。なお、この場合も  $b \rightarrow 0$  としたものは直線状剛体介在物が存在するいわゆる Mode III 型の応力特異係数の粘弾性特性を把握できる資料となる。

5. 結 言

本ノートは著者らの発表した二次元面内荷重下での円形・楕円形トンネル問題に対する粘弾性解析の論文<sup>3)</sup>に継続するもので、面外せん断荷重下での同種の問題を取り上げ、Standard および Burgers タイプの粘弾性モデルに対する閉じた型の解析解と数値例を示した。ここでの数値例は紙面の都合上、トンネル周縁の応力、変位を主として記述したが、当然、楕円形トンネルの周辺の内外部位置の応力ならびに変位挙動も完全に求められるように理論構成されている。

ここでは面外集中力  $Z$  が作用する場合についての計算例を示さなかったが、これらについてのトンネル工学的な利用法やここでの理論的成果と先の論文<sup>3)</sup>を併せて準 3 次元的な逆解析が可能となるが、それらについては今後の研究課題である。

参 考 文 献

- 1) 平島健一・川上哲太郎・藤原紀夫・山下幸夫：弾性厳密解に基づく円形・楕円形トンネルを有する等方性および異方性岩盤の逆解析，土木学会論文集，No. 439/III-17, pp.1~8, 1991.
- 2) 平島健一・川上哲太郎・藤原紀夫・山下幸夫：面外せん断荷重下の等方性・異方性弾性岩盤内の素掘トンネル掘削問題に関する順解析および逆解析，土木学会論文集，No. 436/III-16, pp.37~45, 1991.
- 3) 平島健一・熊坂博夫・桜井英行・柴田善央：二次元面内荷重下での円形・楕円形トンネルを有する粘弾性岩盤の変位解析，土木学会論文集，No. 475/III-24, pp.29~37, 1993.
- 4) 平島健一・木村清和・広瀬幸雄：楕円形の空孔または剛体介在物を有する面内・面外問題の解析解とその応用 (第 5 報，等方性面外せん断問題に対する基礎理論と数値計算例)，日本機械学会論文集 (A 編) 58 巻 555 号，pp.2104~2110, 1992.
- 5) 石田誠：き裂の弾性解析と応力拡大係数，培風館，pp.34~35, 1976.
- 6) Goodman, R.E. : Introduction to Rock Mechanics, Second Ed., John Wiley and Sons, 562 p., 1989.

(1992.6.8 受付)

DISPLACEMENT ANALYSIS OF LINEAR VISCOELASTIC GROUND WITH CIRCULAR OR ELLIPTIC TUNNEL UNDER OUT-OF-PLANE SHEAR LOADINGS

Ken-ichi HIRASHIMA, Hiroo KUMASAKA, Yasuhiro MITANI and Yoshihisa SHIBATA

The stress and displacement fields resulting from the excavation of a circular or an elliptic tunnel in a viscoelastic medium under out-of-plane shear loadings are obtained by use of the theory of linear viscoelasticity and the correspondence principle. Some numerical examples for Standard- and Burgers-models are given by graphical representation.