

盛土内応力分布に関する研究*

正員 赤井 浩 一**

STUDY ON THE STRESS DISTRIBUTION IN THE EARTH EMBANKMENT

(Trans. JSCE, No. 47, Aug. 1957)

Kōichi Akai, C.E. Member

Synopsis : In the present paper, the author has studied on the stress distribution in the earth embankment, theoretically and experimentally. In the theoretical stress analysis, the equation of limiting equilibrium with the residual strength proposed by the author is used, in order to be free from the contradiction involved in conventional studies. Then, the reasonability of the author's analysis has been ascertained throughout the model experiment.

要旨 盛土内応力分布に関する従来の解法は、いずれも塑性釣合の極限における解を与えるものであるが、この極限釣合の式に代えて、盛土内の主応力比で表示した自然状態の釣合条件式を用いることによつて、任意の側方土圧係数に対応した応力分布を得る計算法を提案する。導入すべき土圧係数は、実験によつて決めなければならないので、砂模型を用いて係数の測定を行い、合わせてこの理論解が満足すべきものであることを確かめた。

1. 緒 言

延長がかなり大きい盛土の応力解析においては、現象を堤軸に垂直な断面内の平面変形の問題として処理することができる。従来の理論解の多くは、盛土内の応力度成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ または $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ に関する2つの釣合の式のほかに、塑性釣合の極限式を用いて解析を行つているため、得られる解は主動土圧及び受動土圧の両極限状態に対応しており、しかもこれらの極限時には、盛土全体が一挙に崩壊してしまうという結果となる。しかし現実の盛土の破壊は、決して至るところで同時に生ずるものとは考えられず、盛土の一部に塑性釣合の極限状態が生じて、他の大部分は自然状態のまま残つており、局部的な破壊が順次他の部分に波及して行くものと考えられる。

この観点から著者は、新たに余剰強度を考慮した場合の釣合条件式を用いて、自然状態における盛土内応力分布を得る計算法を提案する。この余剰強度が盛土内の側方土圧係数の函数で表わされることを示し、応力分布と土圧係数との関係について、理論的並びに実験的考察を行つた結果を述べる。

2. 極座標による解法

平面変形の問題において、盛土内の微小土要素の釣合の方程式は、引張応力を正にとると極座標を用いて次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + r_s \cos \theta = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} - r_s \sin \theta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに r_s は土の単位体積の重量である。いま適当な応力函数 F を用いて応力度成分をつぎのように表わすと、これらはいずれも上の釣合の式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{2}{3} r r_s \cos \theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{3} r r_s \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

つぎに自然状態における盛土内応力は、余剰強度 γ^2 を考慮した極限釣合の条件によつて、盛土内任意点において次式を満足せねばならない¹⁾。

* 本論文はその前半を第7回工学会大会土木部会講演会(昭.31.5.26)で、後半を第6回応用力学連合講演会(昭.31.10.15)でそれぞれ発表したものを総合したものである。

**京都大学助教授, 防災研究所

$$G = \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - 2(1 + 2 \tan^2 \varphi) \sigma_r \sigma_\theta + 4(1 + \tan^2 \varphi) \tau_{r\theta}^2 + \eta^2 = 0 \quad \dots\dots(3)$$

ここに φ は盛土材料の内部摩擦角であり、 η^2 は常時は正であるが、破壊の極限においては 0 となるような変数である。

式 (2) の応力函数 F は、函数 G と与えられた境界条件を満足するように選ばなければならない。いま f を θ のある連続函数とすると、 F は Fourier の級数を用いて次式で表わされる。

$$F = r^{m+2} f(\theta) = r^{m+2} \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta\} \quad \dots\dots(4)$$

ここに A_n, B_n は求める常数、 m は盛土の境界における応力条件によつて決まる数、 n は正の整数である。式 (4) を式 (2) に代入すると、盛土内任意点の応力度成分は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r,n} &= r^m (m+2-n^2) \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta\} - \frac{2}{3} r \tau_s \cos \theta \\ \sigma_{\theta,n} &= r^m (m+2)(m+1) \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta\} \\ \tau_{r,\theta,n} &= r^m (m+1)n \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n \sin n \theta - B_n \cos n \theta\} + \frac{1}{3} r \tau_s \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

たとえば 1:2.5 の法面勾配で、左右対称の三角形断面を有する盛土が自重のみを受ける場合、 $m=1, n=1, 2, \dots, 5$ とすると、対称性により式 (5) の B 項は消えて、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= r(2A_1 \cos \theta - 2A_2 \cos 2\theta - 6A_3 \cos 3\theta - 13A_4 \cos 4\theta - 22A_5 \cos 5\theta - \frac{2}{3} r_s \cos \theta) \\ \sigma_\theta &= r(6A_1 \cos \theta + 6A_2 \cos 2\theta + 6A_3 \cos 3\theta + 6A_4 \cos 4\theta + 6A_5 \cos 5\theta) \\ \tau_{r,\theta} &= r(2A_1 \sin \theta + 4A_2 \sin 2\theta + 6A_3 \sin 3\theta + 8A_4 \sin 4\theta + 10A_5 \sin 5\theta + \frac{1}{3} r_s \sin \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

となる。これに法面 ($\theta=68^\circ 12'$) における境界条件として、 $\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{r,\theta} = 0$ を代入して A_1, A_2, A_3 を消去し、 $A_4/r_s = A_4', A_5/r_s = A_5'$ とおく。いま $\tan \varphi = 0.5 (\varphi = 26^\circ 34')$ 、 $\eta^2 \geq 0$ として式 (3) に代入すると、

$$G = \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - 3\sigma_r \sigma_\theta + 5\tau_{r,\theta}^2 \leq 0 \quad \dots\dots(7)$$

が得られる。この式 (7) に上記の $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r,\theta}$ を代入し、 $\theta=0^\circ, 11^\circ 15', 22^\circ 30', 33^\circ 45', 45^\circ, 56^\circ 15', 67^\circ 30'$ について適合する範囲を求めると、図-1 の各楕円の内部がこの条件に合致する。この図からわかるように、係数 A_5' はほとんど 0 の近くの値しかとることができないので、 $A_5' \approx 0$ と見なすことができる。このとき盛土中央における応力度成分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} (\sigma_y/r_s y)_{x=0} &= (\sigma_r/r_s r)_{\theta=0} = -10.838 A_4' + 0.922 \\ (\sigma_x/r_s y)_{x=0} &= (\sigma_\theta/r_s r)_{\theta=0} = 22.986 A_4' + 0.060 \end{aligned}$$

$(\sigma_x)_{x=0}$ と $(\sigma_y)_{x=0}$ との比を K とし、これをもつて盛土の締固めの度合を表わすと、

$$\left. \begin{aligned} K_a \leq K \leq K_b \\ \text{ここに } K_a = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}, K_b = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

であるから、 $0.382 \leq K \leq 2.62$ となり、 K と係数 A_4' の関係は図-2 で示される。この A_4' がとりうる範囲での数値を用いて、式 (6) により盛土内任意点での応力度成分を計算し、これを直角座標系における成分に変換して、任意の水平断面上の応力分布を求めた結果が図-3 である。

図-3 によつて盛土内の応力分布の様子は、側方土圧係数 K

図-1 係数 A_4' と A_5' の関係

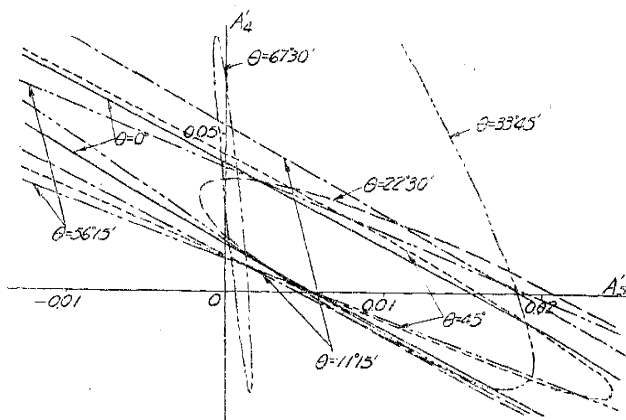
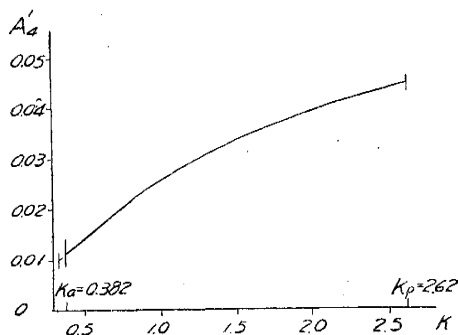


図-2 係数 A_4' と係数 K との関係



によつて大いに変化することが判明する。この係数の概略値を実験的に求めることによつて、盛土内応力分布に關係する 圖-1 の A'_4 の値を締固めの度合の函数として規定することができる。

3. 直角座標による解法

直角座標系においては、余剰強度 R' を考慮したときの極限釣合の式は、圖-4 を参照してつぎのように表わされる²⁾。

$$G' = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} + R' - \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} \sin \varphi = 0 \quad \dots\dots(9)$$

いま σ_1 を主応力の中の1つ、 $K\sigma_1 (K > 0)$ を他の1つとすると、余剰強度 R' は 圖-4 のように $0 < K < 1$ に対して次式で示される。

$$R' = \frac{\sigma_1}{2} \{ (1+K) \sin \varphi - (1-K) \} \quad \dots\dots(10)$$

もし $K > 1$ ならば、 $K' = 1/K$ とおいて式 (10) に代入すればよい。一方、主応力と応力度成分との關係は周知のごとく、

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \dots\dots(11)$$

で与えられるから、これらを式 (9) に代入することによつて次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} G &= (\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2 - A^2(\sigma_y + \sigma_x)^2 = 0 \\ \text{ここに} \quad A &= \frac{1-K}{1+K} = \sin \bar{\varphi} \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

式 (12) によつて余剰強度を考えた場合の極限釣合の条件式は、破壊時の土の剪断抵抗角 φ の代りに、仮想抵抗角 $\bar{\varphi}$ とおいたものを用いて非常に簡単に表わされる。この仮想抵抗角 $\bar{\varphi}$ は盛土の内部摩擦角の中で有効に働さうる部分 (mobilized part) に相当する摩擦角であるが²⁾、著者の解法においては、これを盛土全体に均一なものではなく、盛土内の位置によつて変化すると考える。式 (10) 及び式 (12) の係数 K は 2. と同じく側方土圧係数、または静止土圧係数とよばれる締固めの度合を示す係数であつて、つぎの兩極値の中間に存在する。

$$\left. \begin{aligned} 1/N_\varphi &\leq K \leq N_\varphi \\ \text{ここに} \quad N_\varphi &= \tan^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

上式の N_φ は土圧論で流動値 (flow value) とよばれる係数である。

ここで安藏善之輔博士の解法⁴⁾に用いられたと同様に、堤頂を通る任意の直線によつて境される微小楔形内の応力度成分が、いずれも座標 x, y の1次函数で表わされると仮定すると、法面近傍ではそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_y]_s &= r_s [A_s x + (B_s - 1)y] = -r_s (x \tan \theta - y) (D_s \tan^2 \theta - 1) \\ [\tau_{xy}]_s &= -r_s [B_s x + C_s y] = -r_s (x \tan \theta - y) D_s \tan \theta \\ [\sigma_x]_s &= r_s [C_s x + D_s y] = -r_s (x \tan \theta - y) D_s \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

となる。ただしこの場合も引張応力を正とした。式中の係数 A_s, B_s, C_s, D_s は、圖-5 に示したような意味を持つ係数であり、法面における側方土圧係数 D_s を決定することによつて、他の三者の値が定まる。安藏法では、この D_s の代りに限界状態での値として、

$$D_{R, \max} = -\cos^2 \theta \frac{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \varphi}}{\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \varphi}} \quad \dots\dots(15)$$

をとつたため、盛土の塑性釣合の極限における解が誘導されたが、著者の方法では、式 (13) により

$$D_{R, \min} \leq D_s \leq D_{R, \max} \quad \dots\dots(16)$$

なる D_s を採用する。法面における側方土圧係数 D_s の値は盛土の締固めの度合と密接な關係があり、締固めの効果が大きいほど D_s の絶対値が大きくなるが、この關係は 4. で述べる簡単な模型実験で見出すことができる。

このようにして盛土法面近傍の土圧係数が定まると、安藏法と同様に細分した微小クサビ形の各境界線にお

圖-3 極座標による盛土内応力分布の解

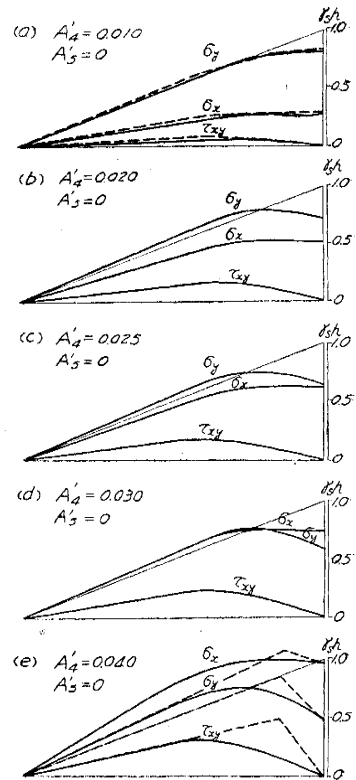
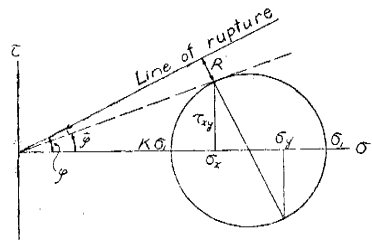


圖-4 自然状態における Mohr の応力円と余剰強度 R'



いて、応力の連続条件と式 (12) の余剰強度を考慮した極限釣合の条件とを用いることができる。すなわち、一般に $x/y = \tan \alpha_i$ において、

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_y]_i &= [\sigma_y]_{i+1}, [\tau_{xy}]_i = [\tau_{xy}]_{i+1}, [\sigma_x]_i = [\sigma_x]_{i+1} \\ \{ [\sigma_y]_i - [\sigma_x]_i \}^2 + 4[\tau_{xy}]_i^2 - \sin^2 \bar{\varphi}_i \{ [\sigma_y]_i + [\sigma_x]_i \}^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

が成立する。上式中の仮想抵抗角 $\bar{\varphi}_i$ は式 (12) によつて、盛土の締固めの度合の函数として実験的に求められる値であり、盛土が自然状態で安定している限り $\bar{\varphi}_i < \varphi$ である。この式 (17) を連立させて解くことによつて、各クサビ形に固有な土圧係数 A_i, B_i, C_i, D_i が求められる。領域分割の数は、普通盛土断面の半分に対して 3~4 で十分である。

計算例として 2. で示したものをとる。すなわち、法面勾配が 1:2.5 の左右対称盛土が自重のみを受ける場合の応力分布を計算する。まず図-6 に示すように、対称な断面の半分を 3 つの領域に任意に分割し、それぞれ符号 I, II, S で各クサビ形を指示する。前と同様に $\tan \varphi = 0.5$ とすると、式 (15) 及び式 (16) より $-0.4975 \geq D_s \geq -1.493$ となるから、 $D_s = -1.0$ をとる。すると法面近傍の他の土圧係数の値は、 $A_s = 0.464, B_s = -0.16, C_s = 0.4$ となるから、法面における σ_x と σ_y の水平軸方向の増加率の比は、

$$K_s = \frac{\delta[\sigma_x]_s}{\delta x} / \frac{\delta[\sigma_y]_s}{\delta x} = \frac{r_s C_s}{r_s A_s} = 0.862$$

となる。すなわち $D_s = -1.0$ は、この比が $K_s = 0.862$ の場合の土圧係数に対応する。もし $K_s = 1.0$ なる程度に締固められた盛土においては、 $D_s = -1.19$ となる。この土圧増加率比 K_s については、後に述べるような実験によつて、その概略の値を知つておくことができる。また盛土中央における側方土圧係数、すなわち σ_x と σ_y の比も実験的に $K = 0.8$ を採用すると、式 (12) の A は盛土中央における値として、 $A = (\sin \bar{\varphi})_{x=0} = 0.111$ が得られる。

ゆえにこの計算例においては、式 (17) はつぎのようになる。

a) $x/y = 0$ (E) において、

$$\left. \begin{aligned} [\tau_{xy}]_I &= 0 & \therefore C_I &= 0 \\ G &= 0 & \therefore (B_I - 1 - D_I)^2 + 4 C_I^2 - 0.0123(B_I - 1 + D_I)^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

b) $x/y = \tan 22^\circ 30' = 0.4142$ において、

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_y]_I &= [\sigma_y]_{II} & \therefore 0.4142(A_I - A_{II}) + (B_I - B_{II}) &= 0 \\ [\tau_{xy}]_I &= [\tau_{xy}]_{II} & \therefore 0.4142(B_I - B_{II}) + (C_I - C_{II}) &= 0 \\ [\sigma_x]_I &= [\sigma_x]_{II} & \therefore 0.4142(C_I - C_{II}) + (D_I - D_{II}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

c) $x/y = \tan 45^\circ = 1.0$ において、

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_y]_{II} &= [\sigma_y]_s & \therefore (A_{II} - 0.464) + (B_{II} + 0.16) &= 0 \\ [\tau_{xy}]_{II} &= [\tau_{xy}]_s & \therefore (B_{II} + 0.16) + (C_{II} - 0.4) &= 0 \\ [\sigma_x]_{II} &= [\sigma_x]_s & \therefore (C_{II} - 0.4) + (D_{II} + 1.0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

この式 (18) の各式を連立させて解いて、盛土内応力度成分を各クサビ領域ごとに表示すると右のようになる。

	I-領域	II-領域	S-領域
	$0 < \frac{x}{y} < 0.4142$	$0.4142 < \frac{x}{y} < 1.0$	$1.0 < \frac{x}{y} < 2.5$
σ_y/r_s	$0.0413x - 0.7532y$	$0.0687x - 0.7637y$	$0.464x - 1.16y$
$-\tau_{xy}/r_s$	$0.2468x$	$0.2363x + 0.0047y$	$-0.16x + 0.4y$
σ_x/r_s	$-0.6027y$	$0.0047x - 0.6047y$	$0.4x - 1.0y$

図-7 は計算の結果を図示したものであり、これは 2. の図-3(c) と類似し

た応力分布を示している。なお図-3(a) 及び (e) において破線で記入したのは、式 (16) の D_s の代りに、その塑性釣合の極限値としての式 (15) の D_R を用いた安藏博士の解法による結果であつて、これより図-3(a) は主動状態、(e) は受動状態における分布を与えることが知られる。また図-7 には、水平及び鉛直両方向の垂直応力比 σ_x/σ_y と、主応力比 σ_2/σ_1 の分布をも記入した。これによつて計算に用いた仮定がすべて満足されている

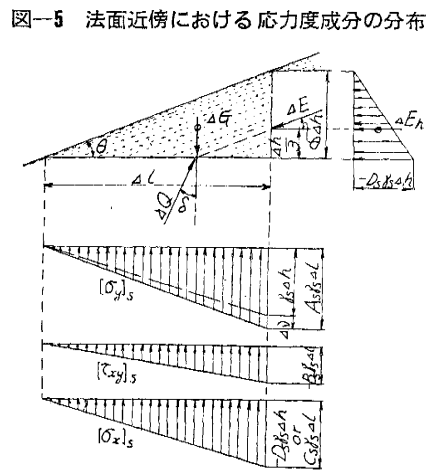
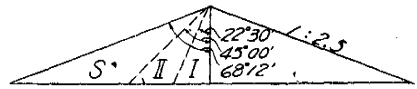


図-6 盛土の領域分割



ことが、後述の実験結果と比較して明らかである。

4. 砂模型による実験

実験に用いた装置は図-8に示すような砂槽であつて、盛土底面にあたる側壁に、水平及び鉛直にあけたスリットを通して薄い鋼製テープ片を埋め込み、所定の締固めで盛土を作成した後、このテープ片の引抜き時の摩擦抵抗から土圧分布を求めた。盛土材料には、平均粒径が約0.2mmの均等な賀茂川砂を気乾燥させたものを用い、盛土勾配並びに締固めの度合を3通りに変化せしめた。図-9は一例として法面勾配が1:2.5の場合を示し、応力度は $\sigma_y/r_s h, \sigma_x/r_s h$ (h :盛土高)の形に無次元化した。

つぎに l を底幅の半分として、横軸を x/l にとつて無次元表示を行うと、たとえば中位の締固め($r_s=1.73\sim 1.74$ g/cm³)に対して図-10が得られる。この図から知られることは、 σ_y は盛土の法面勾配によつてそれほど変化しないが、 σ_x の方は広く変化している。同一勾配の盛土については、図-9にも明らかのように、締固めの度合が大きいほど σ_x が増すのは当然であるが、この場合も σ_y の方はあまり変化しない。

最後に、盛土の水平断面全体について σ_x と σ_y の比をとつて見ると、図-11に示す結果が得られる。盛土中央における側方土圧係数は、 $K=0.60\sim 0.85$ の範囲に収まっているが、基礎の可撓性が大きいような場合には、これが主動状態に近い値にまで減少することが考えられる⁵⁾。

以上の結果、種々の土質状態に対して係数 K の概略の値を実験から知つておくと、盛土内応力分布は2.または3.で述べた理論式を用いて、容易に計算することができる。2.の極座標による方法では、盛土中央における係数値を用い、3.の直角座標による方法では、さらに法面における係数値をも含ませたが、本実験によりこれら

図-7 直角座標による盛土内応力分布の解

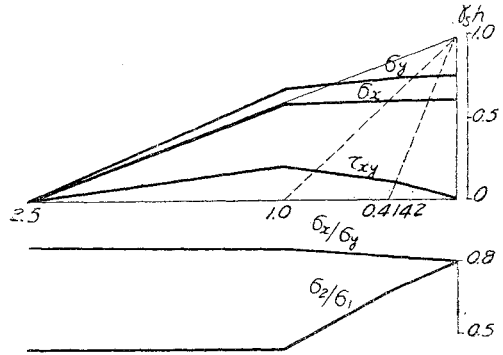


図-8 実験装置

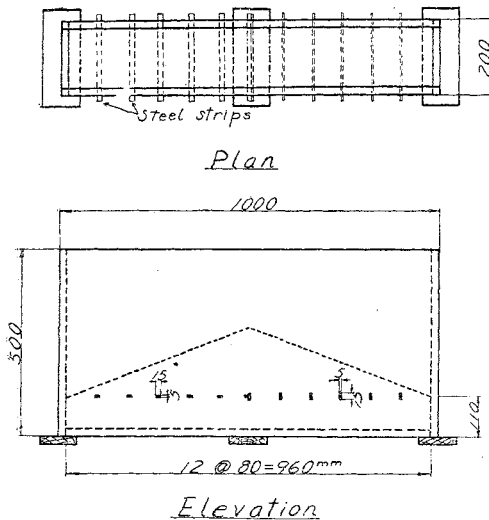


図-10 法面勾配による盛土内応力分布の変化

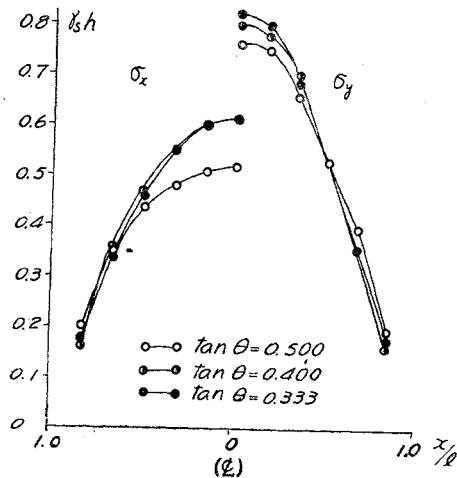


図-9 締固めの度合による盛土内応力分布の変化

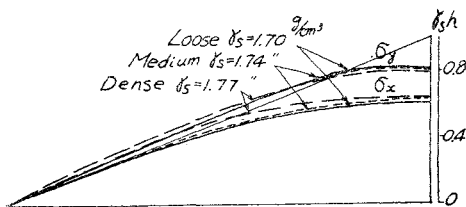
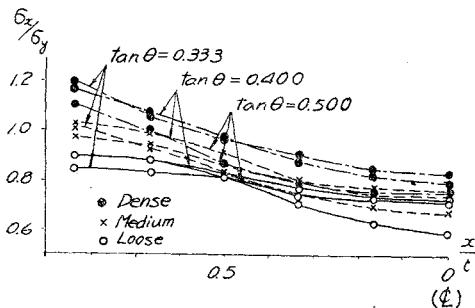


図-11 盛土内側方土圧係数の分布



の計算法の合理性が実証せられた。

5. 結 語

本文において著者は、盛土内の側方土圧係数に対応した自然状態の応力分布を得る理論的解法を試み、極座標と直角座標の両者を用いる計算法を別個に提案し、砂模型での実験によつて理論の妥当性を検証した。理論式の中で、盛土内余剰強度が0となるような土圧係数を選ぶと、従来の塑性釣合の極限における解が誘導される。本文で例示した計算は、ごく単純な境界条件の場合についての結果であるが、他のもつと複雑な場合に対しても広く適用することができる。実験については大学院工学研究科学生、近藤正君の協力に負うところが多く、ここに感謝の意を表わす。

参 考 文 献

- 1) F. Jonson : Calculation of the Stability of Earth Dams, Trans. 2nd Congress on Large Dams, Vol. 4, 1936, pp. 463-480
- 2) R.E. Glover & F.E. Cornwell : Stability of Granular Materials, Trans. A.S.C.E., Vol. 108, 1943, pp. 46-63
- 3) K. Terzaghi : Theoretical Soil Mechanics, 1948, pp. 177-181
- 4) Z. Anzō : Pressure Exerted by Granular or Pulverulent Material, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyūshū University, Vol. 7, 1933, pp. 89-143
- 5) J. Ohde : Druckverteilung in und unter Erddämmen, Wasserwirtschaft-Wassertechnik, Vol. 3, 1953, pp. 248-252

(昭.31.11.2)