

不規則な地震動による動水圧

准員 小坪 清 真*

DYNAMIC WATER PRESSURE ON DAMS DUE TO IRREGULAR EARTHQUAKES

(Trans. JSCE, No. 47, Aug. 1957)

Seima Kotsubo, C.E. Assoc. Member

Synopsis : A theory of dynamic water pressures due to irregular earthquakes was deduced and an example of computation was shown.

The result shows that the dynamic water pressures calculated by the author's theory are much different from those obtained on the assumption that the earthquakes are stationary simple harmonic motions.

要旨 全く不規則な地震動による動水圧の理論式を導いて計算例を示し、その結果が、地震動を定常的な単弦振動と仮定して求めた従来の動水圧の性状と、はなはだ異なるものであることを示した。

結論 従来の動水圧理論式¹⁾²⁾は、地震動が定常的な単弦振動であると仮定して解かれたものである。しかしながら、実際の地震動は、突然起る全く不規則な週期及び振幅をもつ震動の重合である。従つて、厳密には、これは、刻々変化する動水圧の過渡現象として解かれねばならない。

この場合、不規則な地盤の震動にともない、ダム自身も複雑な弾性変形を行なうのであるから、ダムと貯水との連成振動として取り扱うべきものであるが、この問題は、「貯水時におけるダムの弾性振動」として、別の機会に論ずることとし、本論文では、ダムが地盤と共に剛振動をなすものとして動水圧を求めた。

広い領域をもつ弾性体内の過渡現象は、一般に波動問題として取り扱われる。音の水中伝播速度は約 1400 m/s であり、地震は少くとも数秒間は続くものであるから、貯水池の長さが短い場合には反射波の取り扱いが必要になる。しかしながら、実際の貯水池の形は簡単なものではないから、反射波も極めて複雑なものとなるであろう。また、音波のエネルギーは、伝播途中において散逸し、上流側境界で反射して再びダム地点まで到達するまでには、相当減衰したものとなるであろう。これらの理由により、問題の取り扱いを簡単にするために、本論文では、反射波の取り扱いを省略し、貯水池が上流側へ無限に広がるものと仮定した。

[I] 二次元動水圧

1. 微分方程式及び境界条件

図-1 に示すように、 x 及び z を直角座標、 h を堤高、 u 及び w を、 x 及び z 方向の水分子の微小変位、 w_0 を水の単位重量、 E_v をその体積弾性率、 g を重力加速度、 t を時間、 σ を動水圧とすれば、水分子の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{g}{w_0} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{g}{w_0} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \dots\dots\dots (2)$$

$$\sigma = -E_v \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

今、

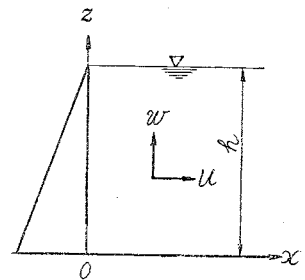
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

なる速度ポテンシャル ϕ を用いると、(1)、(2) 及び (3) 式より、次の微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{w_0}{gE_v} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

動水圧のみを考えると、 $t=0$ においては、速度ポテンシャル及び動水圧は 0 である。また、実際のダムでは、

図-1 重力ダム
Fig.1 Gravity Dam



* 九大大学院研究奨学生、工学部土木教室

表面波の影響は極めて微小であるから、その取扱を省略すると、境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & \left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \quad (\sigma)_{z=h} = \frac{w_0}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=h} = 0 \\ \text{(ii)} \quad & \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x=0} = f(t) \\ \text{(iii)} \quad & (\phi)_{t=0} = 0, \quad \frac{w_0}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

微分方程式(4)を、 t について Laplace 変換を行う(第2種)。

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\phi) &= \Phi(x, z, p) \\ \mathfrak{L}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) &= p^2 \Phi - p^2(\phi)_{t=0} - p\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{t=0} \\ &= p^2 \Phi \end{aligned}$$

であるから、(4)式は、次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{w_0 p^2}{g E_v} \Phi = 0 \dots\dots\dots (6)$$

境界条件(5)式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & \left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \quad (\Phi)_{z=h} = 0 \\ \text{(ii)} \quad & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=0} = \mathfrak{L}f(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

2. 微分方程式の解

(6)式の解を、 $\Phi = X(x, p)Z(z, p)$ とおけば、(6)式は次のように変数分離される。

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \lambda^2 Z = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \left(\lambda^2 + \frac{w_0 p^2}{g E_v}\right) X = 0 \dots\dots\dots (9)$$

条件(7)式の(i)を満足する(8)式の解は、

$$Z = A_m \cos \lambda_m z, \quad \lambda_m = \frac{(2m+1)\pi}{2h}, \quad (m=0, 1, 2, \dots\dots\dots)$$

λ_m は実数、 p は一般に複素数であるから、(9)式の解は、次のようになる。

$$X = B e^{-x\sqrt{\lambda_m^2 + \left(\frac{p}{v}\right)^2}} + C e^{x\sqrt{\lambda_m^2 + \left(\frac{p}{v}\right)^2}}$$

ここに、 $v = \sqrt{g E_v / w_0}$ = 音速である。この解の第2項は、 $x \rightarrow \infty$ で発散するから、解として第1項のみを取れば、解 Φ は次のような形となる。

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos \lambda_m z \cdot e^{-x\sqrt{\lambda_m^2 + \left(\frac{p}{v}\right)^2}} \dots\dots\dots (10)$$

(a) $f(t) = -1$ なる場合

ダムが、単位跳躍函数1で表わされる衝撃速度を受けた場合には、境界条件(7)式の(ii)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=0} &= -1 \quad t > 0 \\ &= 0 \quad t < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

この条件を用いて、(10)式の係数 A_m を求めると、 Φ が次式となる。

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(-1)^m \cos \lambda_m z \cdot e^{-x\sqrt{\lambda_m^2 + \left(\frac{p}{v}\right)^2}} \cdot 1}{(2m+1)\pi \sqrt{\lambda_m^2 + \left(\frac{p}{v}\right)^2}}$$

従つて動水圧は、

$$\sigma = \frac{w_0}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \frac{w_0}{g} \mathfrak{L}^{-1}(p\Phi) = \mathfrak{L}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4 w_0 (-1)^m v \cos \lambda_m z \cdot \left(\frac{p}{v}\right) e^{-x\sqrt{\lambda_m^2 + \left(\frac{p}{v}\right)^2}} \cdot 1}{(2m+1)g\pi \sqrt{\lambda_m^2 + \left(\frac{p}{v}\right)^2}}$$

$$\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4 w_0 (-1)^m v \cos \lambda_m z \cdot J_0(\lambda_m \sqrt{(vt)^2 - x^2})}{(2m+1)g\pi} \left. \begin{array}{l} (vt > x) \\ (vt < x) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

(b) 速度時間曲線 $V(t)$ が与えられた場合

図-2 のように、速度 V が、 $\tau=0$ の時 $V(0)$ まで跳躍し、その後図の曲線に沿って進むものとする。これを、 dV の各段階に分け、この分け方を密にすれば、個々の段階は $dV \cdot 1$ の跳躍速度を意味することになる。単位跳躍速度による動水圧は、 $\sigma = F(t)$ であるから、 dV により $d\sigma$ なる寄与があるものとすれば

$$\begin{aligned} d\sigma &= dV \cdot F(t-\tau) \\ &= \frac{dV}{d\tau} \cdot F(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

これらの寄与を、 $\tau=0$ から $\tau=t$ まで積分すれば

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= V(0)F(t) + \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \cdot F(t-\tau) d\tau \\ &= V(t)F(0) + \int_0^t V(t-\tau) \frac{d}{d\tau} F(\tau) d\tau \end{aligned} \left. \dots\dots\dots (13) \right\}$$

(12) 式を、(13) 式の第2式に入れたと、

$$\sigma = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4 w_0 (-1)^m v \cos \lambda_m z}{(2m+1)g\pi} \left\{ V(t) + \int_{\frac{x}{v}}^t V(t-\tau) \frac{d}{d\tau} J_0(\lambda_m \sqrt{v^2 \tau^2 - x^2}) d\tau \right\} \dots\dots\dots (14)$$

($v \tau > x$)

(c) 地動が突然 $\cos \omega t$ で始まる場合

地震動を $(\alpha g/\omega^2) \cos \omega t$ とすれば、

$$V = -\frac{\alpha g}{\omega} \sin \omega t, \quad \frac{dV}{dt} = -\alpha g \cos \omega t$$

となるから、(13) 式の第1式を用いて、動水圧 σ が次式で表わされる。

$$\sigma = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4 \alpha w_0 (-1)^m v \cos \lambda_m z}{(2m+1)\pi} \int_{\frac{x}{v}}^t \cos \omega(t-\tau) J_0(\lambda_m \sqrt{(v\tau)^2 - x^2}) d\tau \dots\dots\dots (15)$$

($t > \frac{x}{v}$)

(15) 式は、速度 v の波動が、 x 方向に進行して行くことを示している。従つて、 ω の値のいかんに関せず、すべての項を採用しなければならない。

$\omega = \lambda_m v$ のとき、ダムに作用する動水圧は、Kapteyn's trigonometrical integral¹³⁾を用いて、

$$\int_0^t \cos \omega(t-\tau) J_0(\lambda_m v \tau) d\tau = t J_0(\lambda_m v t) \dots\dots\dots (16)$$

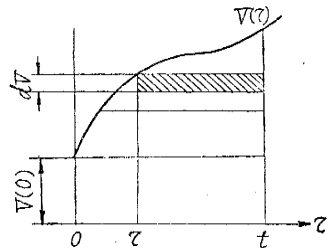
(16) 式は、この mode の動水圧が時間の経過と共に限りなく増大してゆく状態を示している。すなわち、このときは、動水圧は地動に共振したのであつて、定常振動論における共振条件と一致する。

(15) 式を定常項と過渡項に分離すると、

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{x}{v}}^t \cos \omega(t-\tau) J_0(\lambda_m \sqrt{(v\tau)^2 - x^2}) d\tau \\ &= \cos \omega t \int_{\frac{x}{v}}^{\infty} \cos \omega \tau \cdot J_0(\lambda_m \sqrt{(v\tau)^2 - x^2}) d\tau + \sin \omega t \int_{\frac{x}{v}}^{\infty} \sin \omega \tau \cdot J_0(\lambda_m \sqrt{(v\tau)^2 - x^2}) d\tau \\ & \quad - \int_t^{\infty} \cos \omega(t-\tau) \cdot J_0(\lambda_m \sqrt{(v\tau)^2 - x^2}) d\tau \\ & \quad \tau^2 - \left(\frac{x}{v}\right)^2 = \xi^2 \quad \text{とおけば} \end{aligned}$$

第1項 = $\cos \omega t \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\omega \sqrt{\xi^2 + \left(\frac{x}{v}\right)^2}\right)}{\sqrt{\xi^2 + \left(\frac{x}{v}\right)^2}} \xi J_0(\lambda_m v \xi) d\xi$, 第2項 = $\sin \omega t \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\omega \sqrt{\xi^2 + \left(\frac{x}{v}\right)^2}\right)}{\sqrt{\xi^2 + \left(\frac{x}{v}\right)^2}} \xi J_0(\lambda_m v \xi) d\xi$

図-2 速度時間曲線
Fig.2 Velocity Curve



次の公式

$$\int_0^\infty J_0(at) \frac{e^{-b\sqrt{t^2+z^2}}}{\sqrt{t^2+z^2}} t dt = \frac{e^{-z\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} \text{第1項の積分} &= \Re \int_0^\infty J_0(\lambda_m v \xi) \frac{e^{-i\omega \sqrt{\xi^2 + \left(\frac{x}{v}\right)^2}}}{\sqrt{\xi^2 + \left(\frac{x}{v}\right)^2}} \xi d\xi = \frac{e^{-\frac{\pi}{v} \sqrt{\lambda_m^2 v^2 - \omega^2}}}{\sqrt{\lambda_m^2 v^2 - \omega^2}} \quad (\lambda_m^2 v^2 > \omega^2 \text{ のとき}) \\ &= -\frac{\sin\left(\frac{x}{v} \sqrt{\omega^2 - \lambda_m^2 v^2}\right)}{\sqrt{\omega^2 - \lambda_m^2 v^2}} \quad (\lambda_m^2 v^2 < \omega^2 \text{ のとき}) \\ \text{第2項の積分} &= -\Im \int_0^\infty J_0(\lambda_m v \xi) \frac{e^{-i\omega \sqrt{\xi^2 + \left(\frac{x}{v}\right)^2}}}{\sqrt{\xi^2 + \left(\frac{x}{v}\right)^2}} \xi d\xi = 0 \quad (\lambda_m^2 v^2 > \omega^2 \text{ のとき}) \\ &= -\frac{\cos\left(\frac{x}{v} \sqrt{\omega^2 - \lambda_m^2 v^2}\right)}{\sqrt{\omega^2 - \lambda_m^2 v^2}} \quad (\lambda_m^2 v^2 < \omega^2 \text{ のとき}) \end{aligned} \right\}$$

第1項、第2項を統合すると、結局、動水圧 σ が次式となる。

$$\begin{aligned} \sigma = & - \sum_{m=0}^{s-1} \frac{4\alpha w_0 (-1)^m \cos \lambda_m z}{(2m+1)\pi \sqrt{c^2 - \lambda_m^2}} \sin(\omega t - x\sqrt{c^2 - \lambda_m^2}) \\ & - \sum_{m=s}^\infty \frac{4\alpha w_0 (-1)^m \cos \lambda_m z}{(2m+1)\pi \sqrt{\lambda_m^2 - c^2}} e^{-x\sqrt{\lambda_m^2 - c^2}} \cos \omega t \\ & + \sum_{m=0}^\infty \frac{4\alpha w_0 (-1)^m v \cos \lambda_m z}{(2m+1)\pi} \int_t^\infty \cos \omega(t-\tau) J_0(\lambda_m \sqrt{(v\tau)^2 - x^2}) d\tau \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

ここに、 $c^2 = (\omega/v)^2 = (\omega_0 \omega^2 / gE_0)$ 、 S は、 $\lambda_m^2 > c^2$ を満足する m の最小値である。

(17) 式の第1項及び第2項が定常項、第3項が過渡項である。地震の週期が動水圧の共振週期より大きい時には、第1項はなくなり、地震と同一位相の動水圧となる。地震の週期が動水圧の共振週期より小さい時には、第1項も残り、地震の位相より 90° おくれた動水圧が生ずる。従来の定常振動論による動水圧式では、第2項のみを採用し、第1項をすてたのであるが、この項も、やはり解として採用しなければならない。

図-3 は、堤高 $h=100$ m のダムに対し、地震週期 T が 1.0 sec, 0.5 sec, 0.278 sec (共振週期) 及び 0.2 sec の時の、堤底動水圧を、時間 $t=0$ から $t=1.0$ sec まで図示したものである。但し、 $\sigma = 4\alpha w_0 h Q$ の形に要約し、無次元の係数 Q の変化で示した。なお、図中の点線は、定常振動として解かれた従来の動水圧である。

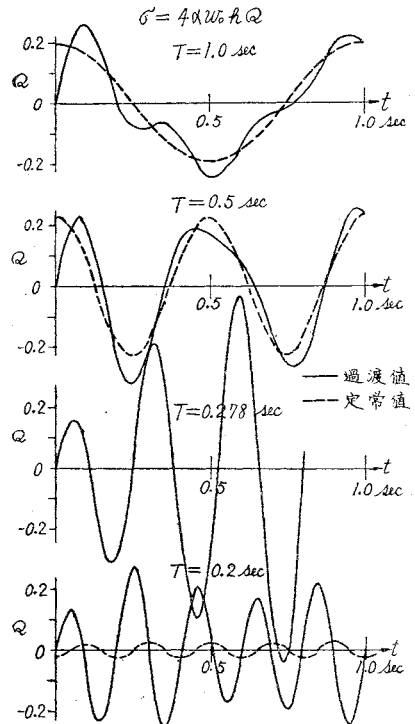
図から明らかなように、 $T=1.0$ sec の時には、動き始めにおける動水圧は、定常振動の動水圧よりも約 30% 大きく、 $T=0.5$ sec の時には、約 40% 大きい。

地震週期が共振週期に一致した時には、動水圧は震動時間の経過と共に次第に大きくなり、第2動目において $Q=0.4$ となつている。従つて、ダム地点の地震動の卓越週期が、動水圧の共振週期に等しい時には、相当大きな動水圧を惹起することが予想される。

地震週期が共振週期より短い場合には、定常振動論によれば、動水圧は、はなはだ小さいものであるが、本論によれば相当大きな値を示し、かつ、地震の位相よりほぼ 90° おくれていることがわかる。

図-3 地震動が $\cos \omega t$ で始まる時の過渡動水圧

Fig. 3 Transient Dynamic Water Pressure When Earthquake Begins with $\cos \omega t$



(d) 地震加速度記録 $A(t)$ が与えられた場合

(13) 式の第1式に (12) 式を入れて

$$\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4 w_0 (-1)^m v \cos \lambda_m z}{(2m+1) g \pi} \left\{ V(0) J_0(\lambda_m \sqrt{(vt)^2 - x^2}) + \int_{\frac{x}{v}}^t A(t-\tau) J_0(\lambda_m \sqrt{(v\tau)^2 - x^2}) d\tau \right\}$$

地震においては、一般に、 $V(0)=0$ とおくことができるから、

$$\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4 w_0 (-1)^m v \cos \lambda_m z}{(2m+1) g \pi} \int_{\frac{x}{v}}^t A(t-\tau) J_0(\lambda_m \sqrt{(v\tau)^2 - x^2}) d\tau \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$$\left(t > \frac{x}{v} \right)$$

加速度曲線の加速度の最大値を αg とし、この最大値を1としたときの他の時刻における加速度を $\psi(t)$ で表わせば、 $A(t) = \alpha g \psi(t)$ となり、(18) 式は、

$$\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4 \alpha w_0 h (-1)^m v \cos \lambda_m z}{(2m+1) \pi h} \int_{\frac{x}{v}}^t \psi(t-\tau) J_0(\lambda_m \sqrt{(v\tau)^2 - x^2}) d\tau \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$\equiv 4 \alpha w_0 h Q \quad \left(t > \frac{x}{v} \right)$$

従来定常振動論による動水圧と、(19) 式によつて計算される動水圧とを、無次元の係数 Q の値の変化で比較することができる。

写真-1は、塚原ダムサイトで記録された地震加速度曲線で、電力研究所報より取つたものである。図-4は、一例としてこのような地震によつて生ずる動水圧を、(19) 式によつて計算したものである。

写真-1 塚原ダムサイト地震記録
(1954.2.23)

図の最上段は、従来定常振動論による動水圧が、地震加速度と同一位相で、刻々における地震加速度に比例して生ずると見た場合の値で、その最大値を1とした。

図-4 から次のことがわかる。

(1) ある時刻における動水圧は、その時刻の地震加速度に必ずしも比例するものでなく、動水圧の共振週期と地震週期との関係により、共振の時刻及び大きさが異なる。

(2) $h=100\text{ m}$ 及び 75 m いずれの場合にも、動水圧の最大値は、定常振動論による動水圧よりも相当大きい。

$t=1.5\sim 2.0\text{ sec}$ の間では、 $h=75\text{ m}$ の場合には、動水圧と地震加速度はほとんど同一位相にあるが、 $h=100\text{ m}$ の場合には、動水圧の位相は、地震加速度のそれより約 90° おくれている。

(4) 地動が停止した後においても、動水圧は急に0となるものではなく、なおしばらく、その固有週期でダムに作用しながら次第に減衰する。

【II】地形の影響

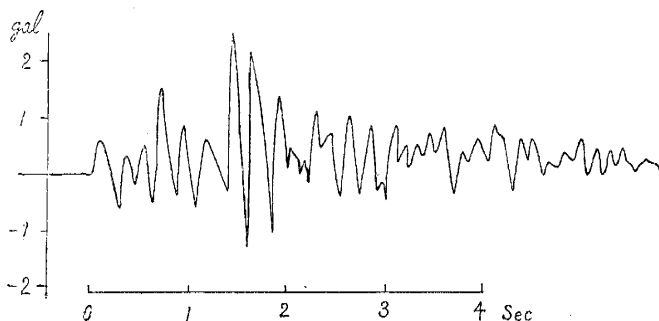
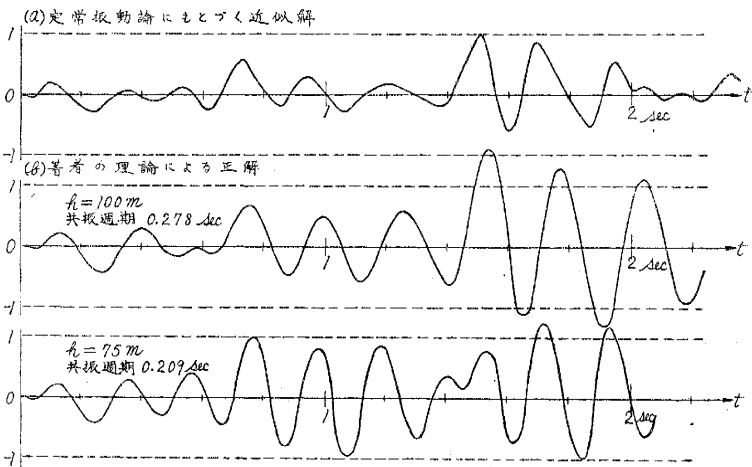


図-4 不規則な地震動による動水圧

Fig.4 Dynamic Water Pressure due to Irregular Earthquake



ダム高に比し、河幅が非常に広いか、または、矩形断面の場合には、前述のような二次元的取扱が可能であるが、ダム地点の横断面形が幅狭い台形あるいは三角形をなす場合には、もはや二次元的取扱をすることができない。このような場合には三次元的動水圧の解が必要になる。しかしながら任意の断面に対して理論的解法を試みることは、はなはだ困難であるから、本論では、断面が扇形または三角形の場合についての解を求め、一般の形の断面の場合を推論する。

1. 扇形断面

図-5 に示すように、円筒座標を ρ, θ, x とし、水分子の座標方向の微小変位 Fig.5 Fan-shaped Section. をそれぞれ、 u, v, w とする。今、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\rho \partial \theta}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

なる速度ポテンシャル ϕ を用いると、 ϕ に関する微分方程式及び動水圧 σ が次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi}{\rho^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{w_0}{g E_v} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (20)$$

$$\sigma = \frac{w_0}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (21)$$

(20) 式を解くにあつての境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & \left(\frac{w_0}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{\theta=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} = 0 \\ \text{(ii)} \quad & \left(\frac{w_0}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{\rho=\rho_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} = 0 \\ \text{(iii)} \quad & \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x=0} = f(t), \\ \text{(iv)} \quad & (\phi)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{w_0}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(20) 式を条件 (22) 式によつて解けば、 $f(t) = -1$ なる場合の解 σ は次式となる。

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{8 w_0 v F_{\mu_s} J_{\mu}(j_{\mu_s} \rho) \sin \mu \theta}{(2n+1) g \pi (j_{\mu_s}^2 \rho_0^2 - \mu^2) \{J_{\mu}(j_{\mu_s} \rho_0)\}^2} J_0(j_{\mu_s} \sqrt{v^2 t^2 - x^2}) \quad (23)$$

加速度曲線 $a g \psi(t)$ による動水圧は次式となる。

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{8 a w_0 h F_{\mu_s} v J_{\mu}(j_{\mu_s} \rho) \sin \mu \theta}{(2n+1) \pi h (j_{\mu_s}^2 \rho_0^2 - \mu^2) \{J_{\mu}(j_{\mu_s} \rho_0)\}^2} \int_0^t \psi(t-\tau) J_0(\lambda_m \sqrt{(v\tau)^2 - x^2}) d\tau \quad (24)$$

$$\left(t > \frac{x}{v} \right)$$

ここに、

$$\mu = \frac{(2n+1)\pi}{2\theta_0}, \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$F_{\mu_s} = \int_0^{\rho_0} J_{\mu}(j_{\mu_s} \rho) \cdot (j_{\mu_s} \rho) \cdot d(j_{\mu_s} \rho)$$

で、 j_{μ_s} は、 $J_{\mu}'(j_{\mu_s} \rho_0) = 0$ を満足する j の値で、絶対値小なるものより順次 $s=1, 2, \dots$ とする。

共振週期は、 $\omega = j_{\mu_s} v$ のとき、すなわち、

$$T = \sqrt{\frac{w_0}{g E_v}} \frac{2\pi}{j_{\mu_s}} \quad (25)$$

2. 河幅が極めて狭い三角形断面の場合

この場合には、図-6 に示すように、近似的に扇形断面と仮定すれば、 $\rho_0 \approx h$ となり、微分方程式は (20) 式と全く同一となる。境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} = 0 \\ \text{(ii)} \quad & \left(\frac{w_0}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{\rho=h} = 0 \\ \text{(iii)} \quad & \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x=0} = f(t) \\ \text{(iv)} \quad & (\phi)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{w_0}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

図-5 扇形断面

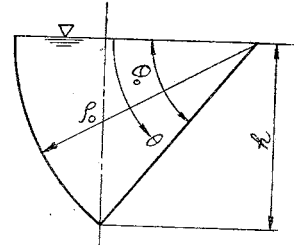
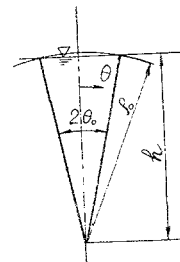


図-6 三角形断面

Fig.6 Triangular Section



$f(t) = -1$ なる場合の解を求めると、動水圧 σ は次式となる。

$$\sigma = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{4 w_0 v F_s J_0(j_s \rho)}{g(j_s h)^2 \{J_1(j_s h)\}^2} J_0(j_s \sqrt{v^2 t^2 - x^2}) \dots (27)$$

地震加速度曲線 $\alpha g \psi(t)$ による動水圧は次式となる。

$$\sigma = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{4 \alpha w_0 h v F_s J_0(j_s \rho)}{(j_s h)^2 h \{J_1(j_s h)\}^2} \int_0^t \psi(t-\tau) J_0(\lambda_m \sqrt{(v\tau)^2 - x^2}) d\tau \dots (28)$$

$$\left(t > \frac{x}{v} \right)$$

ここに、 j_s は、 $J_0(jh) = 0$ の根で、 F_s は次式で表わされる。

$$F_s = \int_0^h J_0(j_s \rho) \cdot (j_s \rho) d \cdot (j_s \rho)$$

共振週期は、 $\omega = j_s v$ のとき、すなわち、

$$T = \sqrt{\frac{w_0}{g E_v} \frac{2\pi}{j_s}} \dots (29)$$

(24) 式及び (28) 式の時間函数は、2次元の場合の時間函数と同一である。ただ、共振週期とそれに対する振動型が異なるのみである。

しかしながら、任意の断面に対して、その振動型と共振週期とを求めることは、はなはだ困難なことである。従つて、実際の应用到に便ならしめるために、一つの近似解法を考えてみる。表-1 は、 $h=100$ m のダムに対し、①矩形断面、②半円形断面、③1/4 円形断面、④三角形断面の場合における共振週期を示したものである。表から明らかなように、第2次共振週期は、第1次共振週期より遙かに小さい。一般にダム地点の地震卓越週期は 0.1~0.3 sec であることを考えると、実際の地震記録に対して動水圧を計算する場合、100 m 程度以下のダムに対しては第1次共振週期のみを取り扱えば充分であろう。高次の共振週期に対して(19)式の積分を行つても、その値は極めて小さいものとなることが予想される。

今、断面の平均水深を \bar{h} 、最大水深を h 、最大水深に対する二次元的共振週期を T とすれば、その断面の第1次共振週期は、近似的に $T\sqrt{\bar{h}/h}$ で表わされる。表-1 最下段は、この値と、真の値とを比較したものであるが 10% 程度の誤差は免がれない。従つて、実際の地震によつてダムに作用する動水圧を計算する場合には、この誤差の範囲内にある共振週期の内、最も大きな動水圧を生ずるものを取れば安全側である。

次に、ダム表面各部に作用する動水圧の分布は、第1次振動型に近似したもとなるであろう。図-

7 は、種々な断面の場合の動水圧の鉛直並びに水平分布を、地震週期を 1 sec として、定常振動論によつて求めたものである。これらの分布の内、第1次振動型のものが、その大部分を占める。矩形断面の動水圧が最も大きな値を示しているから、他の断面についても、矩形断面の場合の値を標準に取れば安全側である。従つて、今、動水圧の鉛直分布を放物線と仮定すれば、第1次共振週期が T_1 なる断面のダムに作用する動水圧

表-1 種々な断面の共振週期 ($h=100$ m)

① 矩形断面				
m	0	1	2	3
	0.278 Sec	0.093	0.055	0.040

② 半円形断面				
π	1	2	3	4
0	0.237 Sec	0.082	0.051	0.037
1	0.104	0.054	0.038	0.030
2	0.067	0.041		

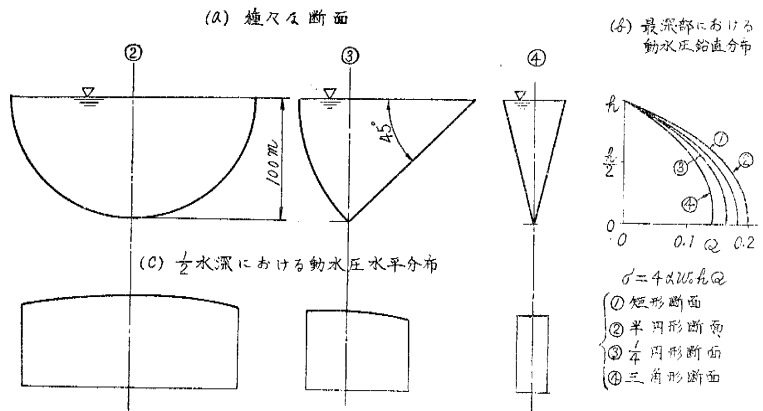
③ 1/4 円形断面				
π	1	2	3	4
0	0.202 Sec	0.092	0.062	
1	0.081	0.052		
2	0.052			

④ 三角形断面				
π	1	2	3	4
0	0.181 Sec	0.099	0.050	0.037

第1次共振週期の近似値

	矩形断面	半円形断面	1/4円形断面	三角形断面
理論値	0.278 Sec	0.237	0.202	0.181
近似値	0.278	0.246	0.208	0.176

図-7 動水圧に及ぼす地形の影響
Fig.7 Effect of Section of Valley upon Dynamic Water Pressure



は、近似的に次式で表わされることになる。

$$\sigma = 4\alpha w_0 h \sqrt{1 - \frac{z}{h} \cdot \frac{v}{\pi h}} \int_0^t \psi(t-\tau) J_0\left(\frac{2\pi\tau}{T_1}\right) d\tau \dots \dots \dots (30)$$

[III] アーチダムへの適用

アーチダムに対しては、兩岸の交角及び傾斜などを考慮して現象を理論的に解明することはほとんど不可能であるが、重力ダムに対して得られた結果から大体の推論を行う。

著者は前論文²⁾で、断面が矩形の場合には、河流方向震動に対してアーチダムに働らく動水圧の水平分布は、拱頂で最小値を示し、アバットに向うに従つて多少増大した値となること、及び共振週期が二次元論による共振週期に等しいことを示した。従つて、兩岸がほとんど平行と見なされる場合には、動水圧の水平分布を等布と仮定して、(30)式がそのまま、アーチダムへも適用できるであろう。兩岸の傾斜による共振週期の変化は、[II]における近似法をそのまま用いるものとする。

しかしながら、兩岸の交角が増大すれば、時間函数が異なることが予想されるが、正解が得られない限り不明であり、将来の研究に待ちたい。なお、河流直角方向震動に対しては、動水圧は極めて小さいものであるから、外力として問題にする必要はないと思う。

[IV] 結 論

以上より、著者は、全く不規則な地震動によつて重力ダムに作用する動水圧の理論的解法を、二次元の場合及び簡単な地形の場合に対して導き、その結果から、任意の断面の場合の近似計算式を求め、さらに、アーチダムに作用する動水圧への応用を提案した。近似計算式には、余りに推論的と思われる点もあるが、将来の研究に待ちたい。

しかしながら、いずれにしても、不規則な地動による動水圧は、従来の定常振動論による動水圧が、地震加速度と同一位相で、その時刻の地震加速度に比例して生ずると仮定して求められたものと、はなはだ異なるものであることがわかつた。

アーチダムの耐震性を論ずる場合、ダム自身の振動性状の重要なことは言うまでもないが、先ずダムに働らく外力を明白にしなければならぬ。満水時アーチダムに働らく外力は、堤体慣性力と、動水圧である。この内前者は、地震加速度に比例した慣性力が、加速度と同一位相で働らくと見なされるが、後者は、前述のように、その大きさ及び位相が、地震加速度と必ずしも一致せず、同一地震記録に対しても、堤高及び地形によつてはなはだ異なつた値を示し、かつ、場合によつては相当大きな値になることがわかる。

アーチダムのように比較的薄い構造物では、それ自身の慣性力よりも、動水圧の方が外力の過半を占めるものであるから、動水圧の性状を明らかにすることは、アーチダムの耐震性研究に重要なことである。

著者は、前述の理論にもとづいて、ダム地点の種々の地震記録に対して動水圧を求め、アーチダムの耐震設計に資したいと考えている。そのためには、(30)式の積分を簡単に行ふ必要があり、その積算計を目下試作中であるが、これについては別の機会にゆづる。

なお、本論文は、九大工学部土木工学教室田中吉郎教授、並びに、同応用理学教室渡部信夫教授に御指導をいただいた。ここに厚く感謝の意を表する。

文 献

- 1) 畑野 正「重力堰堤に動作する地震力の影響(その二)」土木学会論文集, 昭和 22, 23 年度
- 2) 小坪清真「アーチダムに働らく地震時動水動」土木学会論文集第 44 号
- 3) Watson "Theory of Bessel Function" p. 380

(昭.31.12.7)