

線型計画法による保線計画の理論とその適用について

正員 小林 勇*
 正員 後藤 尚 男**
 准員 佐佐木 綱***

On the Theory by Linear Programming for the Planning of Railway-Track Maintenance and its Applications.

(Trans. JSCE, No. 47, Aug. 1957)

Dr. Eng., Isamu Kobayashi, C.E. Member, Hisao Gotō, C.E. Member
 and Tsuna Sasaki, C.E. Assoc. Member.

Synopsis : In recent years the operations research has been rapidly developed as a management science. One of the most typical processes in the operations research is linear programming used for the production planning. In this paper we shall present a new analytical method based on linear programming by which we can evaluate the optimal activity levels of railway track, and discuss the applications of our method to the management of railway track.

要旨 経済学と工学との境界領域の学問として、最近著しい発展をとげてきたオペレーションズ・リサーチの代表的解析手段は線型計画法である。本文ではこの線型計画法を用いて、これまで主として力学的方法によつて研究せられてきた保線計画を経済的見地から考察し、列車の安全運転を確保し、しかも最も経済的である軌道各部の活動水準を追求し、なお本理論の適用性を阪神電鉄への適用例をおとして検討した。

1. 緒言

もともとオペレーションズ・リサーチ (O.R.) は軍事的目的から作戦計画として発展してきたものであるが、最近ではオペレーションを取り扱うすべての分野において採用されてきている。特に経済工学的立場は O.R. の主流となつている。本文では O.R. の代表的手段である線型計画法 (L.P.) の手法を採用することにより、保線計画がいかに定式化されるかを示し、実用例をおして本理論の適応性を検討する。本文においていう保線計画とは“列車運転の安全を確保しながら軌道構造のいかなる部分をいかなるレベルに保つのが最も経済的であるかということに対する理論的計画”をさすものとする。

2. L.P. について

L.P. を説明するため例を企業にとり、生産計画の立案の場合を述べる。

いま企業は利用しうる k 個のプロセスを持ち、各プロセスはそれぞれ固定生産要素を必要とするものとする。そしておのおの固定生産要素の使用にはある限界があるのが普通である。企業の欲する生産計画は、これらの制限された生産要素を使用して各プロセスをいかなるレベルで操業すれば、生産の結果えられる純収入を最大にすることができるかということである。これを定式化するため任意の一つのプロセスを列ベクトル

$$P_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, k$$

ここに、 a_{ij} = i 番目のプロセスが単位水準で実行される j 番目の固定要素の量で表わし、そのプロセス P_i の活動水準を x_i 、固定要素の供給ベクトルを

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

*工学博士，京都大学教授，工学部土木工学教室

**京都大学助教授，同 上

***京都大学助手，同 上

さらに

$$A = (P_1, P_2, \dots, P_k), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

と定義すれば、生産計画は

$$AX \leq S, \quad X \geq 0 \dots\dots\dots (1)$$

の条件下で純収入 $f(X)$ を最大ならしめることである。 $f(X)$ が最も簡単な場合は x の一次式となるから、

$$f(X) = (v_1, v_2, \dots, v_k) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = V'X \dots\dots\dots (2)$$

を最大ならしめるプロセスレベル X が求める最適生産計画となる^{1),2)}。式 (1)、式 (2) はともに x の一次式であるので線型計画法 (L.P.) と呼ばれている。

3. L.P. と保線計画との関係

列車の安全運転の確保ということが列車の走行時の 動揺加速度がある 値以上になつてはならないということに対応するものと仮定すれば、本文で問題としている保線計画とは“列車の走行速度が与えられたとき車両の動揺加速度がある値以上にならないように、最も経済的な軌道構造各部の保守水準 X を決定すること”である。生産計画の場合と比較して異なる点は、保線計画では式 (1)、式 (2) 両式ともに非線型となることである。この点については後ほど論ずることにして、保線計画を L.P. で表現してみる。

ある車両がある速度で走行しているとき、その車両の動揺加速度 s は走行速度 x_k 、車両自体の性質、軌道の状態等 (x_1, x_2, \dots, x_k) によつて変化する。しかしながら安全運転とか乗心地という見地からその動揺加速度はあまり大きくなってはならない。いまこの管理限界を s_0 とし、動揺加速度が x の一次式によつて表わされるものと仮定すれば、その車両について

$$\alpha_{1i}x_1 + \alpha_{2i}x_2 + \dots + \alpha_{ki}x_k \leq s_0, \quad x \geq 0$$

が成立しなければならない。同一軌道上を走行する車両の種類を n 個とし、

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{k1} \\ \alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{k2} \\ \dots \\ \alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{kn} \end{pmatrix} = (A', \Gamma)$$

ここに、 Γ は軌道構造のみに関係する行列で軌道構造係数と定義すれば、保線計画は

$$\Gamma X \leq S_0, \quad X \geq 0 \dots\dots\dots (3)$$

の条件下で保守費を最小ならしめる X を求めることである。 X は軌道構造に関する x のみからなる軌道構造ベクトルである。

従つて保守費 p が

$$p = C'X \dots\dots\dots (4)$$

で表わされると仮定すれば、保線計画はまったく生産計画と同一式で表現できる。しかしながら、すでに述べたように保線計画では非線型となり式 (3)、式 (4) が成立しない。この点を解決するため次元解析を援用する。

4. 次元解析の適用による L.P. 化

次元解析の基礎となつている P_i 定理によれば、“いかなる完全な物理関係も常に考えている 物理量の組み合わせよりなる独立な無次元量の間の関係で表わすことができる”といわれている。独立な無次元量のすべてを求めるために、動揺加速度を s_i 、車両・軌道状態を表わす物理量を (x_1, x_2, \dots, x_k) とし、

$$s_i = Kx_1^{\alpha_{1i}}x_2^{\alpha_{2i}}\dots x_k^{\alpha_{ki}}, \quad i=1, 2, \dots, n \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 K =比例常数

と仮定すれば、両辺の次元が常に等しくなるような α を求め、これによつて独立な無次元量を決定することができる。式 (5) の対数をとり動揺加速度の管理限界を s_0 とすれば、

$$A \log X \leq \log S_0, \quad X \geq 0 \dots\dots\dots (6)$$

とすることができるから、式 (5) を成立させるような α を求めることができる。

一方保守費 p が軌道構造水準 X の対数に比例すると仮定すれば、

$$p = C' \log X \dots\dots\dots (7)$$

で表わされるから、保線計画は式 (6) の条件下に式 (7) を最小ならしめる $\log X$ を求める問題となる。式 (6)、式 (7) とともに $\log X$ について一次であるから、L.P. により式 (6)、式 (7) の解 $\log X$ を求めることができる。従つて最適軌道構造ベクトル X は

$$X = \exp(\log X) \dots \dots \dots (8)$$

として求めることができる。

従つて保線計画を L.P. 化するためには、式 (5)、式 (7) あるいは式 (6)、式 (7) を満足するような物理量 x_i の選定が最も重要である。

5. L.P. による保線計画の解法

(1) 理 論

車両動揺加速度 a に最も関係があるものとして次の諸要素を考える。

- 1) 車両重量 m [M]
- 2) 車両のバネ係数 k [MT⁻²]
- 3) レールの曲げ剛性 $r = E_r I_r$ [ML³T⁻²]
- 4) 枕木の曲げ剛性 $s = E_s I_s$ [ML³T⁻²]
- 5) 道床係数 b [ML⁻²T⁻²]
- 6) 路盤係数 l [ML⁻²T⁻²]
- 7) 走行速度 v [LT⁻¹]
- 8) 軌道狂い h —
- 9) 曲線半径 c [L]

いま動揺加速度として上下方向のみを考えると、これまでの調査によれば a と h とはあまり関係がなかつたので、要素 8) は省略することにした。また直線区間のみを考えることにより要素 9) も省略することができる。

上下方向の動揺加速度を a とし、式 (5) にならつて

$$a = Km^\alpha k^\beta r^\tau s^\delta b^\sigma l^\tau v^\nu \dots \dots \dots (9)$$

とおき、両辺の次元を等しいとおけば次の解をうる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\nu}{2} - 1, \quad \beta = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}(\sigma + \tau) - \frac{\nu}{6} \\ r &= \frac{1}{3} - \delta - \frac{2}{3}(\sigma + \tau) - \frac{\nu}{3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

式 (10) を式 (9) に代入すれば

$$a = K \frac{\sqrt[3]{k^2 r}}{m} \left(\frac{s}{r}\right)^\delta \left(\sqrt[3]{\frac{r^2}{k^5}} \cdot b\right)^\sigma \left(\sqrt[3]{\frac{r^2}{k^5}} \cdot l\right)^\tau \left(\sqrt[6]{\frac{m^3}{kr^2}} \cdot v\right)^\nu \dots \dots \dots (11)$$

をうる。Pi 定理から $\frac{s}{r}$, $\sqrt[3]{\frac{r^2}{k^5}} \cdot b$ 等はすべて互に独立した無次元量である。

保線計画では加速度を線型化するため式 (11) の $K, \delta, \sigma, \tau, \nu$ を実験的に決定し、式 (10) から α, β, τ を算出する。

以上のようにして $A = (\alpha, \beta, \tau, \dots, \nu)$ を決定できたならば、次に式 (7) の C' を決定しなければならないが、保線計画の場合であるから軌道構造ベクトルの係数のみで十分であり、これは実際問題において比較的容易に決定することができる。

マトリックス Γ 及びベクトル C' が決定されたならば、保線計画 X は式 (12) の解である。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma \log X &\leq \log A_0, \quad X \geq 0 \\ p &= \text{Min} C' \log X \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

(2) 阪神電鉄への適用例

問題を簡単にするため車両種類を2種 ($n=2$) とし、特急・急行の代表的車両としてそれぞれ3000型及び800型を選んだ。まずマトリックス A を決定するため200mの直線試験軌道区間を19カ所選び、その各区分における軌道の r, s, b を測定した。この際厳密に道床係数、路盤係数を求めることは不可能であるから、 b の値としては枕木上のレールの沈下をとることとした。従つて以後この b を軌道沈下係数と呼ぶことにする。式 (11) における路盤の項を省略し軌道沈下係数 b をもつて道床係数にかえると、式 (11) は簡単になり上下方向加速度 a は

$$a = \frac{\sqrt[3]{k^2 r}}{m} \left(\frac{s}{r}\right)^\delta \left(\sqrt[3]{\frac{r^2}{k^5}} \cdot b\right)^\tau \left(\sqrt[6]{\frac{m^3}{kr^2}} \cdot v\right)^\nu \dots \dots \dots (13)$$

となる。簡単のため $K=1$ とした。

1区間の軌道沈下係数は、その区間を通つた車両の重量と枕木上のレール沈下とから算出した。1区間の測点数は30であり、それぞれ3回ずつ測定しその算術平均値をもつて b の値とした。また r の値はレールの断面形

表 1

区 間 名	bkg/cm ³	L _p cm ⁴	a(10 ⁻² g) ()内は v km/h			
			3000 型		800 型	
野 田, 上	7.28	1 620	6.25 (80)	8.10 (90)	9.42 (55)	9.30 (55)
同上, 下	6.12	1 700	5.62 (72)	5.65 (72)	4.72 (35)	3.87 (30)
中島水道, 上	4.65	1 635	11.55 (86)	11.90 (85)	14.65 (65)	12.36 (84)
同上, 下	3.66	1 635	12.79 (60)	13.32 (80)	13.21 (76)	13.52 (76)
大 物, 上	6.00	1 475	7.90 (84)	8.00 (72)	9.18 (55)	8.82 (53)
同上, 下	5.55	1 435	7.26 (80)	7.87 (90)	10.30 (65)	10.61 (51)
武庫川, 上	5.95	1 450	10.33 (80)	10.20 (76)	14.70 (80)	14.31 (72)
同上, 下	5.02	1 475	10.58(100)	11.25 (90)	14.63 (76)	10.92 (52)
今 津, 上	6.50	1 700	5.35 (86)	4.70 (80)	8.68 (63)	7.04 (65)
同上, 下	4.38	1 710	7.31 (85)	6.65 (85)	10.39 (60)	3.67 (38)
芦 屋, 上	4.63	1 415	11.30(110)	10.30(100)	14.45 (72)	14.20 (70)
同上, 下	3.77	1 415	12.36(103)	12.75 (96)	14.71 (60)	11.20 (51)
深 江, 上	5.38	1 710	9.30(106)	5.59*(96)	15.50 (83)	8.88*(85)
同上, 下1	5.36	1 675	7.66(100)	7.80(103)	12.22 (72)	11.82 (66)
同上, 下2	5.74	1 675	7.79(103)	7.70(106)	8.05 (65)	8.05 (65)
御 影, 上	6.91	1 710	3.34 (30)	3.46 (33)	3.64 (32)	3.72 (32)
同上, 下	7.73	1 710	5.05 (74)	5.33 (76)	9.47 (70)	7.10 (54)
三 宮, 上	7.59	1 635	5.55 (50)	4.64 (45)	5.30 (39)	3.31 (22)
同上, 下	6.93	1 710	4.96 (75)	4.65 (72)	8.45 (60)	8.45 (62)

突固め後 深江, 上 b=7.30 表中 * 印は突固め後の加速度

表 2

車両種別	m (ton)	k (ton/cm)
3000 型	8.32	1.276
800 型	9.06	1.818

以上により式 (13) の δ, σ, ν 以外のすべての値が既知となつたので、表-1、表-2から、 δ, σ, ν の値を最小自乗法で決定することができる。このようにして求めたAの値は表-3のとおりである。ここに負の符号をもつものは加速度を減少させる効果をもつ。

表-3 からわかる興味ある諸点は

表 3

車両種別	α	β	τ	δ	σ	ν
3000 型	-0.71139	1.19575	-0.12726	0.01808	-0.37517	0.57722
800 型	0.44558	0.87086	-0.69988	0.00800	-0.23340	1.10884

次のとおりである。

1. τ, σ の値を比較することから車両形式が 800 型から 3000 型へと新型化してくると、動揺加速度はレールよりも道床路盤状態に大きく影響されるようになってくる。逆に古い型の車両は道床路盤よりもレールに影響される。

このことを明確にするため、道床突固めなどによる道床整備によつて b の値を 3.0, 4.0……, 8.0 と向上していったとき、それに伴う許容最高速度 v は式 (14) から算出される。

$$\left. \begin{aligned} 3000 \text{ 型} : & \nu_1 \log v + \sigma_1 \log b = 0.995 112 \\ 800 \text{ 型} : & \nu_2 \log v + \sigma_2 \log b = -1.895 324 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

その結果は表-4のとおりである。道床整備による速度向上は 3000 型において著しいものがあるが、800 型においてはわずかにみられるのみである。

2. 新型車ほど車両重量が動揺加速度に及ぼす影響が大きい。
3. 新型車ほど走行速度が動揺加速度に及ぼす影響が少ない。

一方年間保守費 p は式 (15) で表わすことができる。

$$p = 144.956 \log I_p + 61.83 \log b - 306.614, b \leq 8.0 \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 p はレールの耐用年限を 30 年、道床突固めを年 1 回としたとき

の単線軌道 1 m あたりの年間保守費 (円) である。 $b \leq 8.0$ の条件はいかに慎重に道床突固めを行つても、現状の道床材料と枕木を使用するかぎり軌道沈下係数を 8.0 kg/cm³ 以上にすることは困難であり、また費用曲線自体も 8.0 以上になると適合し難くなるから付加したものである。

式 (15) の関係式を求めらるにあつては、道床突固め前と突固め後の沈下の相違及び人件費を測定した。道床突固め前後の軌道沈下係数 b の分布は図-1のとおりである。

保守費ベクトル C' のうち枕木に関係する要素をも考察したかつたのであるが、試験区間はいずれも同一状態の枕木が採用されていたので解析することができなかつた。従つてこの際の保線計画はレールと道床・路盤との経済的な最適レベルの決定である。

表 4

b(kg/cm ³)	v(km/h)	
	3000 型	800 型
3.0	108.2	64.6
4.0	130.4	68.6
5.0	150.8	71.8
6.0	170.0	74.7
7.0	187.6	77.1
8.0	204.6	79.3

いま動揺加速度の管理限界を $0.12g$ とす
れば、

$$\Gamma = \begin{pmatrix} r_1, \sigma_1 \\ r_2, \sigma_2 \end{pmatrix}$$

であるから、式 (12) に対応して式 (16) が
えられる。ここに保線計画 X はベクトル $\begin{pmatrix} I_r \\ b \end{pmatrix}$
を表わすものである。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\log I_r) &\leq \begin{pmatrix} 0.583992 - \nu_1 \log v_1 \\ 1.257634 - \nu_2 \log v_2 \end{pmatrix}, \\ 0 \leq b \leq 8.0, \quad I_r \geq 0 \\ p &= \text{Min}(144.956, 61.83) \begin{pmatrix} \log I_r \\ \log b \end{pmatrix} \\ &= -306.614 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

式 (16) から速度 v_1, v_2 が与えられたとき
の最適計画を Simplex Method によつて容
易に求めることができる。

例題 1 走行速度が 3000 型 120 km/h,
800 型 80 km/h であるとき、経済的に最適な軌道構造の活動水準を求める。

軌道構造の活動水準 I_r, b は式 (17)

$$\left. \begin{aligned} -0.127264 \log I_r - 0.375169 \log b &\leq -0.616142 \\ -0.199877 \log I_r - 0.233401 \log b &\leq -0.852585 \\ \log b &\leq 0.90309 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

の条件下に $p = \text{Min}(144.956 \log I_r + 61.83 \log b - 306.614)$

の解であるから、Simplex Method でその解を求めると

$$I_r = 1626 \text{ cm}^4, \quad b = 8.0 \text{ kg/cm}^3$$

となる。従つてまず道床突固めを行い、枕木・レールの浮きなどを少なくする道床整備作業を十分に行い、50 kg
レールを使用するのが最も経済的である。

例題 2 走行速度が 3000 型 120 km/h, 800 型 60 km/h の場合の最適計画を求める。

式 (17) の第 2 式の右辺が -0.714046 に変化するだけであるから、同様に解を求めれば

$$I_r = 329 \text{ cm}^4, \quad b = 8.0 \text{ kg/cm}^3$$

となり、道床整備をできるだけ完全に行い、レールは破壊に対して安全であるかぎり小さいものを使えばよい。
すなわち 37 kg レールを採用する。注意しなければならないことはマトリックス A の決定にあたり I_r の値は
1400~1800 cm^4 であるから、解がこのようにその範囲外に大きくはざれるときはその解の数値は不正確である。
従つて最適解としての I_r は 37 kg レール ($I_r = 951 \text{ cm}^4$) 以上にとるものとする。

例題 3 3000 型 120 km/h, 800 型 96 km/h の場合の最適構造を求める。

この場合は式 (17) の第 2 式の右辺は -0.940382 と
なるから、解は $I_r = 4469 \text{ cm}^4, b = 8.0 \text{ kg/cm}^3$ と求ま
る。ゆえに 70 kg レールの採用が必要となりかつ道床
整備は完全にしなければならない。現在採用しているレ
ールが 50 kg レールであれば、道床整備をいかに慎重に
しても動揺加速度を管理限界 $0.12g$ 以下にすることは
できない。

以上の例題を Simplex Method で解くと、その過程
においていずれの場合も 800 型が最適解の決定に決定的
役割をはたしていることがわかる。

次にこの点を明らかにするため最適解を図解法によつ
て求めてみる。 $\log I_r$ と $\log b$ とを両軸にとり式 (17)

図 - 1

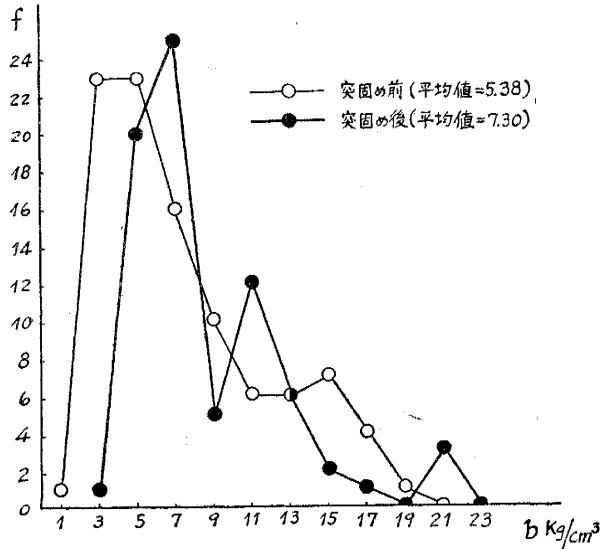
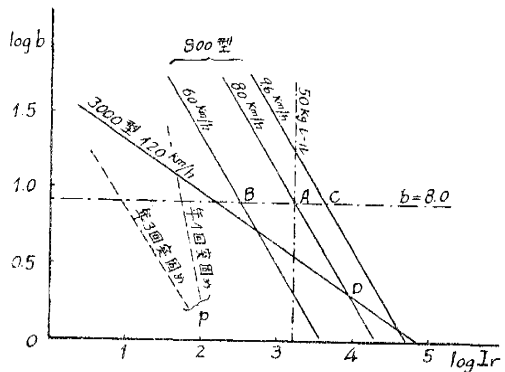


図 - 2



を表わすと図-2のごとくである。例題 1, 2, 3 の最適解はそれぞれ図の点 A, B, C である。保守費曲線 (p -線) が右に平行移動するにつれて保守費は増加する。上の例題ではいずれも 800 型の線と $b=8.0$ との交点で解が与えられている。従つてまず道床整備が保守として最も重要であることがいえる。

図-2 からわかるように保守費曲線の勾配が緩くなつてきて、800 型の線の勾配よりも小さくなれば最適解は点 A から点 D に移る。このときは道床整備よりもレールの重量化の方が、動揺加速度を減少させる点でより経済的であるという解をうる。その限界は

$$800 \text{ 型の勾配} = 0.856367$$

$$\text{保守費曲線の勾配} = 144.956/61.83y$$

$$y = \text{年間の道床整備回数}$$

であるから、

$$0.856367 \geq 144.956/61.83y$$

から $y \geq 2.7$ (回/年)

として求めることができる。

例題 4 3000 型 120 km/h, 800 型 80 km/h に対してレール交換回数が 30 年に 1 回、道床整備作業は年 3 回行わなければならない軌道の経済的構造を求める。

この場合は式 (18) の解である。

$$-0.127264 \log I_r - 0.375169 \log b \leq -0.616142$$

$$-0.199877 \log I_r - 0.233401 \log b \leq -0.852585$$

$$0 \leq b \leq 8.0, I_r \geq 0$$

$$p = \text{Min}(144.956 \log I_r + 3 \times 61.83 \log b - 306.614)$$

} (18)

ゆえに

$$I_r = 7723 \text{ cm}^4, b = 2.1 \text{ kg/cm}^3$$

この場合は約 80 kg レールを採用して道床整備はほとんど行わないのが最適解である。最適解を図示すれば図-2 の点 D である。

5. 結 論

L.P. の適用によりこれまで経験的に行われてきた保線作業に経済的意味を明確に与えることができる。阪神電鉄への適用例をとおして結論できることは次の諸点である。

- 1) 車両の改善はレールの重量化よりも道床整備を要求する傾向にある。
- 2) 阪神電鉄の現状では保線計画は道床整備を第一義とすべきである。
- 3) 800 型車両は 80 km/h 以上に高速化すると動揺加速度は管理限界 0.12 g を超過する。動揺加速度を犠牲にしないかぎり 800 型を 80 km/h 以上に高速化するためにはレールの重量化以外に方策がないと考えられる。
- 4) 保線計画の最適解を支配しているのは 800 型車両である。
- 5) レール保守費/道床保守費 > 2.7 ならば道床整備が経済的であり、レール保守費/道床保守費 < 2.7 ならばレール重量化が経済的である。

今後の問題としては、列車の安全運転の指標として車両の動揺加速度以外の力学的諸要素をいかにして L.P. の条件式へ導入するかということと軌道各部の破壊の時系列論的考察による L.P. の動的計画化とがあげられる。

この研究は昭和 31 年度文部省科学試験研究費による研究の一部であり、なお研究にあたり種々便宜を賜つた阪神電鉄の各位に謝意を表するものである。

参 考 文 献

- 1) A. Charnes, W.W. Cooper and A. Henderson: An introduction to linear programming, John Wiley, 1955, p. 41~74
- 2) R. Dorfman 著, 小宮隆太郎訳: リニャプログラミング, その理論と企業への適用, 日本規格協会, 1955, p. 80~113

(昭.32.2.26)

昭和 32 年 8 月 25 日印刷

昭和 32 年 8 月 31 日発行

土木学会論文集第47号 定価 120 円 (〒 20 円)

編集兼発行者 東京都新宿区四谷1丁目 中川 一 美
印刷所 東京都港区赤坂溜池5番地 株式会社 技報堂

発行所 社団法人 土 木 学 会

東京都新宿区四谷一丁目 電話(35) 5138
振替東京 16828