行列による平面骨組構造の解法

正員　大　地　羊　三*

Matrix Analysis of Plane Frame Structures

(Trans. JSCE, No. 47, Aug. 1957)

Yōzō Ōchi, C.E. Member

Synopsis: A matrix form of a linear equation to solve a given plane flame structure is requierd in this paper. Table 3 is a most general form. Table 6 is a linear equation for trusses, and Table 8 is for rigid frame structures. In these Tables α, β, ε and δ are rectangular Matrices, which construction will be known through examples, further more M, H, V, R and θ are column vectors, positive directions of these factors are pointed out in figure 3.

1. 緒　　言

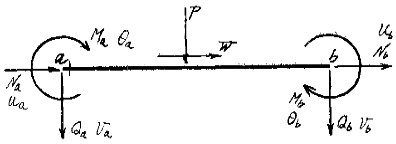
ラーメン・トラス等，いわゆる骨組構造の解法は，昔からいろいろの方法が考えられている。これ等各種の解法を一貫した思想は，部材端に生ずる部材力又は変位量を未知数として連立一次方程式を立て，これを解くといふ事である。即ち，骨組構造を解くという事の中には，(1) 連立一次方程式を立てるという事と，(2) 立てた連立一次方程式を解くという事の二つの問題が含まれている。第1の連立一次方程式を立てる問題を取扱つたものには撓角撓度法，四連モーメントの定理による方法，弾性方程式による方法等がある。又第2の連立一次方程式を解く問題を取扱つたものには撓角分配法，モーメント分配法，定点法，レラクゼイション法等をあげる事ができる。

本論文は第1の問題について先輩諸先生方の考え方を更に一般化したものである。第2の問題に対する私見は後日改めて公表するつもりである。如何にしたら簡単に連立一次方程式を立てる事ができるかという問題は，不静定次数が少ない場合には大して問題にならない。しかし不静定次数が多くなると，仲々厄介な問題である。この方面の研究としては高層ラーメンに関する鷹部屋博士の論文[1]，ローゼ橋に関する平井博士の論文[2]，フィーレンデール橋に関する内田一郎氏の論文[3]，閉合多角形に関する酒井博士の論文等がある。しかしこれ等は特定の形をした骨組構造に対するものである。著者は如何なる形をした骨組構造にもあてはまる連立一次方程式の形はどんなものとなるかを考えてみた。次にその大要を述べる。

2. 部材条件式

骨組構造を構成している各部材を節点及び支点の位置で切断し，その一つを取り出すと（図—1）その部材の中では次の微分方程式が成立つ。

図—1



$$\frac{d^2}{du^2}\left(EI\frac{d^2v}{du^2}\right)=p(u)$$

a端（b端）のセン断力，曲げモーメント，タワミ角，タワミ量をそれぞれ Q_a，M_a，θ_a，v_a（Q_b，M_b，θ_b，v_b）として上記の微分方程式を解き変形すると

$$\left.\begin{aligned} -Q_a+Q_b &= -\int_0^l p\,ds \\ -Q_a l-M_a+M_b &= -\int_0^l p(l-s)\,ds \\ -\frac{l}{EI_0}\xi_a M_a-\frac{l}{EI_0}\eta M_b+\theta_a+\frac{v_a-v_b}{l} &= \mathfrak{A} \\ \frac{l}{EI_0}\eta_a M_a+\frac{l}{EI_0}\xi_b M_b+\theta_b+\frac{v_a-v_b}{l} &= -\mathfrak{B} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但し，$\xi_a\equiv\frac{EI_0}{l^3}\int_0^l\frac{(l-s)^2}{EI}ds$，$\xi_b\equiv\frac{EI_0}{l^3}\int_0^l\frac{s^2}{EI}ds$，$\eta\equiv\frac{EI_0}{l^3}\int_0^l\frac{s(l-s)}{EI}ds$

$$\mathfrak{A}\equiv\frac{1}{l}\int_0^l\frac{l-s}{EI}\left\{\frac{s}{l}\int_0^l p(l-t)dt-\int_0^s p(s-t)dt\right\}ds,\quad \mathfrak{B}\equiv\frac{1}{l}\int_0^l\frac{s}{EI}\left\{\frac{s}{l}\int_0^l p(l-t)dt-\int_0^s p(s-t)dt\right\}ds$$

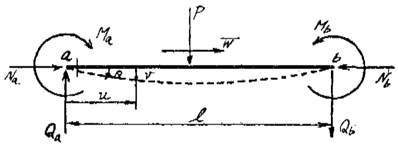
* 国鉄鉄道技術研究所

とする。又 (1) 式とは独立に材軸方向の関係式として次の (2) 式が考えられる。

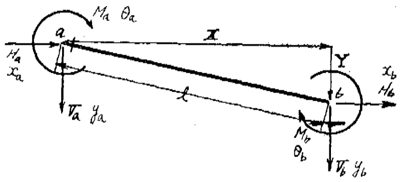
$$\left.\begin{aligned} &N_a-N_b+\int_0^l w\,ds=0 \\ &u_a-u_b=\int_0^l \frac{1}{EA}\left(N_a+\int_0^s w\,dt\right)ds\equiv\Delta C \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

さて今までは Q, M, θ, v, N, u の符号を図—1 の矢印の方向を正と考えて方程式を立てたが，多数の部材を取扱う場合には図—2 の矢印の方向を正と考えた方が便利である。符号を図—2 の如く変更した場合は，(1)，(2) 式中にある Q_a，N_b 及び M_b の符号の正負を逆にしなければならない。更にすべての部材の材端に働く部材力及び変位量を同一方向に分解する目的で Q，N，u，v を図—3 の如く H，V，x，y におきかえると，

図—2



図—3



$$N=\frac{X}{l}H+\frac{Y}{l}V,\quad u=\frac{X}{l}x+\frac{Y}{l}y$$
$$Q=-\frac{Y}{l}H+\frac{X}{l}V,\quad v=-\frac{Y}{l}x+\frac{X}{l}y$$

なる関係があるから，これを (1)，(2) 式に代入して変形すると次の 6 個の関係式を得る。

$$H_a+H_b=-\left(\frac{-Y}{l}\int_0^l p\,ds+\frac{X}{l}\int_0^l w\,ds\right)\equiv-\mathfrak{H}_m\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

$$V_a+V_b=-\left(\frac{X}{l}\int_0^l p\,ds+\frac{Y}{l}\int_0^l w\,ds\right)\equiv-\mathfrak{B}_m\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

$$M_a+M_b+YH_a-XV_a=\int_0^l p(l-s)\,ds\equiv\mathfrak{M}_{bm}\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

$$-\frac{l}{EI_0}(\xi_a M_a-\eta M_b)+\theta_a-\frac{Y}{l^2}(x_a-x_b)+\frac{X}{l^2}(y_a-y_b)=\mathfrak{A}\cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

$$-\frac{l}{EI_0}(-\eta M_a+\xi_b M_b)+\theta_b-\frac{Y}{l^2}(x_a-x_b)+\frac{X}{l^2}(y_a-y_b)=-\mathfrak{B}\cdots\cdots(\mathrm{V})$$

$$\frac{X}{l}(x_a-x_b)+\frac{Y}{l}(y_a-y_b)-\frac{l'}{EA_0}\left(\frac{X}{l}H_a+\frac{Y}{l}V_a\right)=\int_0^l\frac{1}{EA}\int_0^s w\,dt\,ds\equiv\mathfrak{L}\cdots\cdots(\mathrm{VI})$$

但し，$\mathfrak{H}_m(\mathfrak{B}_m)$ はそれぞれ問題としている部材に作用する外力の水平(垂直)分力を表わし，$\mathfrak{M}_{bm}$ は外力の b 端に関するモーメントを表わしており，いずれも図—3 の矢印の方向を正に取つている。又，$l'\equiv EA_0\int_0^l (1/EA)\,ds$

(I)～(VI) 式は一つの部材の両端（a 及び b 端）における H, V, M, θ, x, y の間の関係を表わす式である。この内(I)～(III) 式は力の釣合条件であり，(IV)～(VI) 式は変形量に関する条件式であるが，今後は両方をひつくるめて部材条件式という事にする。

今までは一つの部材に関する部材条件式を考えてきたのであるが，(I)～(VI) 式中の文字を次の如く行列及び列ベクトルと考える事によつて骨組構造全体に対する部材条件式とする事ができる。

即ち，骨組を構成するすべての部材に任意に番号をつけ，更に a 端，b 端の区別（図面では a 端に ← の印をつける事にする）をして式中に表われる文字を

$H_a\ V_a\ M_a\ x_a\ y_a\ \theta_a(H_b\ V_b\ M_b\ x_b\ y_b\ \theta_b)$＝各部材の a 端（b 端）における水平力，垂直力，曲げモーメント，水平変位，垂直変位及びタワミ角を部材の番号順に並べた m 次元（部材の数を m 個とした）の列ベクトル。

$X\ Y\ l\ \xi_a\ \xi_b\ \eta\ l'$＝各部材の水平長さ，垂直長さ，全長，$\xi_a$，$\xi_b$，$\eta$ 及び l' を部材の番号順に対角線上に配列した m 次の対角行列（但し，$1/l$ は l の逆行列と考える）

$\mathfrak{H}_m\ \mathfrak{B}_m\ \mathfrak{M}_{bm}\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{L}$＝各部材に作用する外力の水平合力，垂直合力，$b$ 端に関する曲げモーメント，弾性荷重に対する a 端，b 端の支点反力及び $\mathfrak{L}$ を部材の番号順に並べた m 次元の列ベクトル

と定義すればよい。

3．結合条件式

第2節で求めた部材条件式は $H_a\ H_b\ V_a\ V_b\ M_a\ M_b\ x_a\ x_b\ y_a\ y_b\ \theta_a\ \theta_b$ 等 $12\,m$ 個の未知数を含んでいる。之に対して部材条件式の数は $6\,m$ 個しかないから，完全な連立一次方程式を立てるためには，更に $6\,m$ 個の条件が必要である。

このために本節では節点及び支点に着目して式を立ててみよう（前節では部材に着目して式を立てた）。

与えられた骨組構造物の中から一つの節点 P_iを取り出し，その P_i 節点に集まる部材の内 P_i 節点側を a 端とする部材を $a_i \cdot a_j$……，b 端とする部材を $b_k \cdot b_l$……とすると P_i 節点が剛節点であるときは，これに集まる部材の材端の変位及びタワミ角は，節点の変位及びタワミ角に等しくなければならないから

$$\left.\begin{array}{lll} x_{ai}=x_{pi} & y_{ai}=y_{pi} & \theta_{ai}=\theta_{pi} \\ x_{aj}=x_{pi} & y_{aj}=y_{pi} & \theta_{aj}=\theta_{pi} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_{bk}=x_{pi} & y_{bk}=y_{pi} & \theta_{bk}=\theta_{pi} \\ x_{bl}=x_{pi} & y_{bl}=y_{pi} & \theta_{bl}=\theta_{pi} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{-}1,2,3)$$

が成立つ。全部の節点が剛節点であれば各節点について同様の式が成立つから，これをまとめて次の如く表わす事ができる。

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\beta}_1 \end{bmatrix}[x_p] \qquad \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\beta}_1 \end{bmatrix}[y_p] \qquad \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\beta}_1 \end{bmatrix}[\theta_p]$$

但し，$x_a\ x_b\ y_a\ y_b\ \theta_a\ \theta_b$ は前節で定義した材端の変位及びタワミ角を表わす列ベクトルであり，$x_p \cdot y_p \cdot \theta_p$ はそれぞれ節点の水平変位・垂直変位・タワミ角を節点の番号順に並べた P 次元の列ベクトルである（$\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\beta}_1$ はすぐあとで定義する）。

支点についても 3—1，2，3 式と同じ様な式を立てる事ができるから，それ等をまとめて

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\beta}_2 \end{bmatrix}[x_r] \qquad \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\beta}_2 \end{bmatrix}[y_r] \qquad \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\beta}_2 \end{bmatrix}[\theta_r]$$

とする事ができる。但し，$x_r \cdot y_r \cdot \theta_r$ は支点の水平変位・垂直変位・タワミ角を支点の番号順に並べた r 次元の列ベクトルである。この $x_r \cdot y_r \cdot \theta_r$ 等は支点の支持状態から決定される量であるが，その条件式は次節で考える事にして，ここでは未知数のままにしておく。

上の二式を一括すると

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_p \\ x_r \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_p \\ y_r \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_r \end{bmatrix} \cdots\cdots(3\text{—}1',2',3')$$

但し，小行列 $\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\beta}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 \cdot \bar{\beta}_2$ は次に定義する様な特殊なク形行列である。

α_1 又は β_1（α_2 又は β_2）＝行には節点（支点）の番号を，列には部材の番号を対応させる。第 i 行の要素は i 番目その節点（支点）に集る部材の内 i 節点（i 支点）側が a 端又は b 端となる部材の番号に対応する列の要素を 1，その他の要素を 0 とする p 行 m 列（r 行 m 列）の行列（例題参照）。

$\bar{\alpha}_1$ 又は $\bar{\beta}_1$（$\bar{\alpha}_2$ 又は $\bar{\beta}_2$）＝それぞれ α_1 又は β_1（α_2 又は β_2）の転置行列。

3—1′，2′，3′ 式は材端が剛結されている場合の式である。材端の一部がヒンジになつている場合には，3—3′式を多小変更しなければならない。たとへば i 部材の a 端がヒンジになつている場合は，3—3 式の $\theta_{ai}=\theta_{pi}$ が成立たなくなりその変りに $M_{ai}=0$ なる関係が成立つ。故に部材がヒンジで結合されている場合も含めて考えると 3—3′ 式は次の如く一般化しなければならない。

$$\begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} W_a & \\ & W_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix}$$

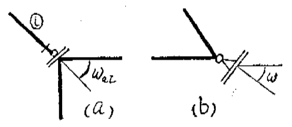
但し，$W_a(W_b)$ は 0 又は ∞ を対角要素とする m 次の行列で，a 端（b 端）が節点又は支点に剛節されているときは対応する要素が 0 となり，ヒンジで結合されているときは ∞ となるようなものである。

更に問題を一般化して完全剛結でも完全ヒンヂでもない中間の結合の場合も含める事にすると

$$\begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} W_a & \\ & W_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \theta_{0a} \\ \theta_{0b} \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \begin{matrix} (\text{VII}) \\ (\text{VIII}) \end{matrix}$$

但し，$\theta_{0a}\ \theta_{0b}$ は角変化に対する材端のガタを表わし，$W_a\ W_b$ は材端のタワミ角がモーメントに比例する場合の比例常数を表わすものである。これ等はすべて実験によつてその数値を決定しなければならない。

図—4



次に図—4(a) の如き結合をなしている場合について考える。この場合には 3—1，2 式の i 部材の a 端に関する式 $x_{ai}=x_{pi}$，$y_{ai}=y_{pi}$ が成立たなくなる。その代りに，

滑動方向に直角方向の相対変位は 0 であるという条件より

$$\cos w_{ai}\left[x_a-[\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2]\begin{bmatrix}x_p\\x_r\end{bmatrix}\right]_i+\sin w_{ai}\left[y_a-[\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2]\begin{bmatrix}y_p\\y_r\end{bmatrix}\right]_i=0$$

滑動方向の部材力の分力は0であるという条件より

$$-\sin w_{ai}\,[H_a]_i+\cos w_{ai}\,[V_a]_i=0$$

の2式が成立つ。

但し，$[\ ]_i$ は $[\ ]$ で表わされたベクトルの i 番目の要素を意味するものとする。上式は滑動端が a 端にある場合を示した。もし滑動端が b 端にある場合は，列ベクトルのサフィックス a を b に，矩形行列 α を β にしなければならない。この種の結合状態を含めると 3-1.2 式は次の如く一般化される。

$$\begin{bmatrix}\cos w_a, & 0\\ 0, & \cos w_b\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}x_a\\x_b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2\\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_p\\x_r\end{bmatrix}\right\}+\begin{bmatrix}\sin w_a, & 0\\ 0, & \sin w_b\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}y_a\\y_b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2\\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_p\\y_r\end{bmatrix}\right\}$$
$$-\begin{bmatrix}z_{1a}, & 0\\ 0, & z_{1b}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}\cos w_a, & 0\\ 0, & \cos w_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_a\\H_b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sin w_a, & 0\\ 0, & \sin w_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_a\\V_b\end{bmatrix}\right\}=0$$

$$-\begin{bmatrix}\sin w_a, & 0\\ 0, & \sin w_b\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}x_a\\x_b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2\\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_p\\x_r\end{bmatrix}\right\}+\begin{bmatrix}\cos w_a, & 0\\ 0, & \cos w_b\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}y_a\\y_b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2\\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_p\\y_r\end{bmatrix}\right\}$$
$$-\begin{bmatrix}z_{2a}, & 0\\ 0, & z_{2b}\end{bmatrix}\left\{-\begin{bmatrix}\sin w_a, & 0\\ 0, & \sin w_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_a\\H_b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos w_a, & 0\\ 0, & \cos w_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_a\\V_b\end{bmatrix}\right\}=0$$

但し，$\sin w_a$，$\cos w_a$($\sin w_b$，$\cos w_b$) は各部材の a 端(b 端)の滑動方向に垂角の方向を表わす角度の sine 及び cosine を対角要素とした m 次の対角行列である。剛結端，ヒンジ端の場合には w_a w_b として任意の値（例えば 0）を取つて差支えない。又 $z_{1a}(z_{1b})$，$z_{2a}(z_{2b})$ は 0 又は ∞ を対角要素とする m 次の対角行列で a 端（b 端）が結剛端，ヒンヂ端の場合は対応する要素は 0，**図—4(a)** の如き滑動端の場合は $z_{1a}(z_{1b})=0$，$z_{2a}(z_{2b})=\infty$ とする。

上式を変形すると次式の最後の項が無いものとなる。

$$\begin{bmatrix}x_a\\x_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2\\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_p\\x_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}z_{11a}, & 0\\ 0, & z_{11b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_a\\H_b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}z_{12a}, & 0\\ 0, & z_{12b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_a\\V_b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_{0a}\\x_{0b}\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots\begin{matrix}(\text{IX})\\(\text{X})\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_a\\y_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2\\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_p\\x_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}z_{21a}, & 0\\ 0, & z_{21b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_a\\H_b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}z_{22a}, & 0\\ 0, & z_{22b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_a\\V_b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_{0a}\\y_{0b}\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots\begin{matrix}(\text{XI})\\(\text{XII})\end{matrix}$$

但し，

$$z_{11a}=\cos w_a\cdot z_{1a}\cdot\cos w_a+\sin w_a\cdot z_{2a}\cdot\sin w_a \qquad z_{12a}=\cos w_a\cdot z_{1a}\sin w_a-\sin w_a z_{2a}\cos w_a$$

$$z_{21a}=\sin w_a z_{1a}\cos w_a-\cos w_a z_{2a}\sin w_a \qquad z_{22a}=\sin w_a z_{1a}\sin w_a+\cos w_a z_{2a}\cos w_a$$

サフィックスが b のときも同様である。

更に問題を一般化し，不完全滑動端の場合も含めると，上式の最後の項 x_{0a}，y_{0a} をつけ加えなければならない。但し，x_{0a} x_{0b}($y_{0a}y_{0b}$) は水平変位（垂直変位）に対する材端がガタを表わし，$z_{11}z_{12}$(z_{21} z_{22}) 等は水平変位（垂直変位）が水平力及び垂直力に関係する程度を表わしておる。これ等は実験によつてその数値を決定しなければならない。

以上 VII～XII 式は部材と節点又は支点との結合状態を表わす一般式である。故に今後はこれ等を結合条件式という事にする。

4. 釣合条件式及び支点条件式

第2節の部材条件式と第3節の結合条件式を合わせると $12\,m$ 個の一次方程式が得られる。所がこれ等の式の中に含まれる未知数は，第3節の初めに述べた $12\,m$ 個の他に $x_p\,y_p\,\theta_p$，$x_r\,y_r\,\theta_r$ 計 $3\,p+3\,r$ が新たに加わつている。故に更に $3\,p+3\,r$ の条件式が必要である。このために各節点及び支点における部材力の釣合条件を用いる事にする。第3節で定義した $\alpha_1\,\beta_1\,\alpha_2\,\beta_2$ を用いると釣合条件式は次の如く表わす事ができる。

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_a\\H_b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\H_r\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathfrak{H}_p\\\mathfrak{H}_r\end{bmatrix}=0,\quad \begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_a\\V_b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\V_r\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathfrak{V}_p\\\mathfrak{V}_r\end{bmatrix}=0,$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_a\\M_b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\M_r\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathfrak{M}_p\\\mathfrak{M}_r\end{bmatrix}=0\quad\cdots\cdots\begin{matrix}(\text{XIII}),(\text{XV}),(\text{XVII})\\(\text{XIV}),(\text{XVI}),(\text{XVIII})\end{matrix}$$

但し，H_r V_r M_r はそれぞれ各支点における水平反力，垂直反力，反力モーメントを支点の番号順に並べた r 次元の列ベクトルである。又 $\mathfrak{H}_p$ $\mathfrak{V}_p$ $\mathfrak{M}_p$($\mathfrak{H}_r$ $\mathfrak{V}_r$ $\mathfrak{M}_r$) はそれぞれ節点（支点）に働く外力の水平合力，垂直合力，節支（支点）に関するモーメントを節点（支点）の番号順に並べた p 次元（r 次元）の列ベクトルである。

条件式として XIII～XVIII 式を追加すると方程式の数は $12\,m+3\,p+3\,r$ 個となる。然しながら未知数が新たに $3\,r$ 個（$H_rV_rM_r$）増えたので，更に $3\,r$ 個の条件式を立てなければならない。この $3\,r$ 個の条件式として支点条件

式を用いる。支点条件式としては次の如きものが考えられる。

(i) 固定端では $x=0,\ y=0,\ \theta=0$

(ii) ヒンヂ端では $x=0,\ y=0,\ M=0$

(iii) 可動端では $\cos w\cdot x+\sin w\cdot y=0,\ -\sin w\cdot H+\cos w\cdot V=0,\ M=0$ (図—**4(b)**)

(iv) 自由端では $H=0,\ V=0,\ M=0$

支点の形状に応じて上記の 4 個の内のどれかを用いればよい。これ等を一つの式にまとめると

$$\left.\begin{array}{l}[\cos w_r]x_r+[\sin w_r]y_r-z_{1r}\{[\cos w_r]H_r+[\sin w_r]V_r\}=0\\ -[\sin w_r]x_r+[\cos w_r]y_r-z_{2r}\{-[\sin w_r]H_r+[\cos w_r]V_r\}=0\\ \theta_r-W_rM_r=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

但し，$z_{1r}\ z_{2r}\ W_r$ は 0 又は ∞ を対角要素とする r 次の対角行列で，固定端では $z_{1r}=0,\ z_{2r}=0,\ W_r=0$；ヒンヂ端では $z_{1r}=0,\ z_{2r}=0,\ W_r=\infty$；可動端では $z_{1r}=0,\ z_{2r}=\infty,\ W_r=\infty$；自由端では $z_{1r}=\infty,\ z_{2r}=\infty,\ W_r=\infty$；の値をとる。

(4) 式を変形すると次式で右辺が 0 となつたものとなる。

$$x_r-z_{11r}H_r-z_{12r}V_r=x_{0r}\cdots\cdots\cdots\cdots\mathrm{XIX}$$

$$y_r-z_{21r}H_r-z_{22r}V_r=y_{0r}\cdots\cdots\cdots\cdots\mathrm{XX}$$

$$\theta_r-W_rM_r=\theta_{0r}\cdots\cdots\cdots\cdots\mathrm{XXI}$$

但し，
$$\begin{bmatrix}z_{11r}, & z_{12r}\\ z_{21r}, & z_{22r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos w_r, & -\sin w_r\\ \sin w_r, & \cos w_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_{1r}, & 0\\ 0, & z_{2r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos w_r, & \sin w_r\\ -\sin w_r, & \cos w_r\end{bmatrix}$$

更に問題を一般化して支点に反力に無関係な変位のある場合を考えると，上式の如く右辺に $x_{0r}\ y_{0r}\ \theta_{0r}$ が表われる。但し，$x_{0r}\ y_{0r}\ \theta_{0r}$ はそれぞれ反力に無関係な各支点の水平変位，垂直変位，角変位を支点の番号順に並べた r 次元の列ベクトルである。又 $z_{11r}\cdots\cdots z_{22r}\ W_r$ は r 次の対角行列でその要素は支点の拘束状態を表わすもので，そう数値が大きければ大きいほど支点が動き易い事を示す。

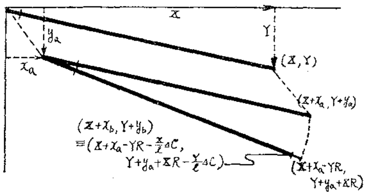
5. 方程式の数をへらす事

2～4 節で求めた条件式 I～XXI 式を一つの表にまとめると**表—1** を得る。この連立一次方程式を解けば骨組構造の部材力を求める問題は解決された事になる。しかし方程式の数は $12m+3p+6r$ 個あり，その数は余りに多くこのままでは実用の価値はほとんどない。そこで次に方程式の数をへらす事を考える。

(i) $x_a\ x_b\ y_a\ y_b$ を部材角 R と部材の縮み $\varDelta C$ でおきかえる事。

図—**5** を参照すると次の関係成が立つ事がわかる。

図—5



表—1

		M_a	M_b	M_r	H_a	H_b	H_r	V_a	V_b	V_r	θ_a	θ_b	θ_p	θ_r	x_a	x_b	x_p	x_r	y_a	y_b	y_p	y_r	荷重項
部材條件式	I				E_m	E_m																	$-\mathfrak{g}_m$
	II							E_m	E_m														$-\mathfrak{H}_m$
	III	E_m	E_m		Y			$-X$															$-\mathfrak{M}_{pm}$
	IV	$\frac{-l}{EI_0}\xi_a$	$\frac{l}{EI_0}\eta$								E_m				$\frac{-Y}{l^2}$	$\frac{Y}{l^2}$			$\frac{X}{l^2}$	$\frac{-X}{l^2}$			$\mathfrak{A}$
	V	$\frac{l}{EI_0}\eta$	$\frac{-l}{EI_0}\xi_b$									E_m			$\frac{-Y}{l^2}$	$\frac{Y}{l^2}$			$\frac{X}{l^2}$	$\frac{-X}{l^2}$			$-\mathfrak{B}$
	VI				$\frac{-Xl'}{lEA_0}$			$\frac{-Yl'}{lEA_0}$							$\frac{X}{l}$	$\frac{-X}{l}$			$\frac{Y}{l}$	$\frac{-Y}{l}$			$\mathfrak{L}$
結合條件式	VII	W_a									$-E_m$		$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2$									$-\theta_{0a}$
	VIII		W_b									$-E_m$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_2$									$-\theta_{0b}$
	IX				Z_{11a}			Z_{12a}							$-E_m$		$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2$					$-x_{0a}$
	X					Z_{11b}			Z_{12b}							$-E_m$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_2$					$-x_{0b}$
	XI				Z_{21a}			Z_{22a}											$-E_m$		$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2$	$-y_{0a}$
	XII					Z_{21b}			Z_{22b}											$-E_m$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_2$	$-y_{0b}$
釣合條件式	XIII				α_1	β_1																	$\mathfrak{f}_p$
	XIV				α_2	β_2	$-E_r$																$\mathfrak{f}_r$
	XV							α_1	β_1														$\mathfrak{V}_p$
	XVI							α_2	β_2	$-E_r$													$\mathfrak{V}_r$
	XVII	α_1	β_1																				$\mathfrak{M}_p$
	XVIII	α_2	β_2	$-E_r$																			$\mathfrak{M}_r$
支点條件式	XIX						$-Z_{11r}$			$-Z_{12r}$								E_r					x_{0r}
	XX						$-Z_{21r}$			$-Z_{22r}$												E_r	y_{0r}
	XXI			$-W_r$										E_r									θ_{0r}

$E_m,\ E_r$ は夫々 m 次元，r 次元の単位行列である。

$$\frac{l}{EI_0}\xi_a\equiv\int_0^l\frac{(l-s)^2}{EIl^2}ds,\quad \frac{l}{EI_0}\xi_b\equiv\int_0^l\frac{s^2}{EIl^2}ds,\quad \frac{l}{EI_0}\eta\equiv\int_0^l\frac{s(l-s)}{EIl^2}ds\quad \frac{l'}{EA_0}\equiv\int_0^l\frac{1}{EA}ds$$

$$\mathfrak{A}\equiv\frac{1}{l}\int_0^l\frac{l-s}{EI}\left\{\frac{s}{l}\int_0^l p(l-t)dt-\int_0^s p(s-t)dt\right\}ds\quad \mathfrak{B}\equiv\frac{1}{l}\int_0^l\frac{s}{l}\left\{\frac{s}{l}\int_0^l p(l-t)dt-\int_0^s p(s-t)dt\right\}ds,\ \mathfrak{L}\equiv\int_0^l\frac{1}{EA}\int_0^s w\,dt\cdot ds$$

$$x_b=x_a-Y\cdot R-\frac{X}{l}\varDelta C,\quad y_b=y_a+X\cdot R-\frac{Y}{l}\varDelta C\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

この(5)式を用いて $x_a\ x_b\ y_a\ y_b$ を $x_b\ y_b\ R\ \varDelta C$ におきかえると**表—1** は**表—2** の如く変化する。

(ii) $\theta_a\ \theta_b\ \varDelta C$ を消す事。

表—2 の IV′,V′ 式と VII,VIII 式を加え合わせて符号を変えると**表—3** の XXII,XXIII 式を得る。又 VI′ 式に X/l'

（又は Y/l）をかけ IX′ 式（又は XI′ 式）と加え合わせて符号を変えると表—3 の XXIV 式（又は XXV 式）を得る。

(iii) $H_aH_bH_r : V_aV_bV_r$ の数を減らす事。

先ず行列方程式 $\alpha\cdot x=l$（α：行の数 m が列の数 n より少ない矩形行列，$x\cdot l$：それぞれ n 次及び m 次の列ベクトル）の解の形を求める事から初めよう。α の行ベクトルと独立な $(n-m)$ 個のベクトルを行ベクトルとする $n-m,n$ 行列を β とする。然るとき初めの方程式は

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}l\\ x_\beta\end{bmatrix}\quad 但し\ x_\beta\equiv\beta\cdot x$$

と書ける。$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ は正規行列であるから逆行列が存在し，その形は次の如くなる。

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}^{-1}=\left[\bar\beta_L\frac{1}{\alpha\bar\beta_L},\bar\alpha_L\frac{1}{\beta\bar\alpha_L}\right]\quad\cdots\cdots(6)$$

但し，α_L，β_L は α,β の行ベクトルと直交するベクトルを行ベクトルとする $n-m,\ n:m,\ n$ 行列である。又 $\bar\alpha_L$，$\bar\beta_L$ は α_L,β_L の転置行列を意味し，分数は逆行列を表わすものとする。一方 $\bar\alpha_L\,\bar\beta_L$ は $\bar\alpha_L=\bar\alpha\cdot\lambda+\bar\beta\cdot A$（$\lambda:m,n-m$ 行列，$A:n-m$ 次正規行列）$\bar\beta_L=\bar\alpha\cdot B+\bar\beta\cdot\mu$（$B:m$ 次正規行列，$\mu:n-m,n$ 行列）と書ける。これに $\alpha\cdot\bar\alpha_L=0$，$\beta\cdot\bar\beta_L=0$ なる関係を用いると

表—2

		M_a	M_b	M_r	H_a	H_b	H_r	V_a	V_b	V_r	θ_a	θ_b	θ_p	θ_r	χ_b	χ_p	χ_r	y_b	y_p	y_r	R	ΔC	荷重項
部材條件式	I				E_m	E_m																	$-\mathfrak{H}_m$
	II							E_m	E_m														$-\mathfrak{V}_m$
	III	E_m	E_m		Y			$-X$															$-\mathfrak{M}_{bm}$
	IV′	$\frac{l}{EI_a}\xi_a$	$\frac{l}{EI_b}\eta$								E_m										$-E_m$		$\mathfrak{A}$
	V′	$\frac{l}{EI_a}\eta$	$\frac{l}{EI_b}\xi_b$									E_m									$-E_m$		$-\mathfrak{B}$
	VI′				$-\frac{Xl'}{lEA_a}$			$-\frac{Yl'}{lEA_a}$														E_m	$\mathfrak{L}$
結合條件式	VII	$\overline{W}_a$									$-E_m$		$\bar\alpha_1$	$\bar\alpha_2$									$-\theta_{oa}$
	VIII		$\overline{W}_b$									$-E_m$	$\bar\beta_1$	$\bar\beta_2$									$-\theta_{ob}$
	IX′				Z_{11a}			Z_{12a}							$-E_m$	$\bar\alpha_1$	$\bar\alpha_2$				$-Y$	$-\frac{X}{l}$	$-\chi_{oa}$
	X					Z_{11b}			Z_{12b}						$-E_m$	$\bar\beta_1$	$\bar\beta_2$						$-\chi_{ob}$
	XI′				Z_{21a}			Z_{22a}										$-E_m$	$\bar\alpha_1$	$\bar\alpha_2$	X	$-\frac{Y}{l}$	$-y_{oa}$
	XII					Z_{21b}			Z_{22b}									$-E_m$	$\bar\beta_1$	$\bar\beta_2$			$-y_{ob}$
釣合條件式	XVII	α_1	β_1																				$\mathfrak{M}_p$
	XVIII	α_2	β_2	$-E_r$																			$\mathfrak{M}_r$
	XIII				α_1	β_1																	$\mathfrak{H}_p$
	XIV				α_2	β_2	$-E_r$																$\mathfrak{H}_r$
	XV							α_1	β_1														$\mathfrak{V}_p$
	XVI							α_2	β_2	$-E_r$													$\mathfrak{V}_r$
支點條件式	XXI			$-\overline{W}_r$										E_r									θ_{or}
	XIX						$-Z_{11r}$			$-Z_{12r}$							E_r						χ_{or}
	XX						$-Z_{21r}$			$-Z_{22r}$										E_r			y_{or}

表—3

	M_a	M_b	M_r	H_a	H_b	H_r	V_a	V_b	V_r	R	θ_p	θ_r	χ_b	χ_p	χ_r	y_b	y_p	y_r	荷重項
XXII	$\xi-\begin{bmatrix}\overline{W}_a&0\\0&\overline{W}_b\end{bmatrix}$									E_m	$-\bar\alpha_1$	$-\bar\alpha_2$							$-\mathfrak{A}+\theta_{oa}$
XXIII										E_m	$-\bar\beta_1$	$-\bar\beta_2$							$\mathfrak{B}+\theta_{ob}$
XXI			$-\overline{W}_r$									E_r							θ_{or}
XXIV				$\frac{Xl'X}{lEA_al}-Z_{11a}$			$\frac{Xl'Y}{lEA_al}-Z_{12a}$			Y			E_m	$-\bar\alpha_1$	$-\bar\alpha_2$				$-\frac{X}{l}\mathfrak{L}+\chi_{oa}$
−X					$-Z_{11b}$			$-Z_{12b}$					E_m	$-\bar\beta_1$	$-\bar\beta_2$				χ_{ob}
XIX						$-Z_{11r}$			$-Z_{12r}$						E_r				χ_{or}
XXV				$\frac{Yl'X}{lEA_al}-Z_{21a}$			$\frac{Yl'Y}{lEA_al}-Z_{22a}$			$-X$						E_m	$-\bar\alpha_1$	$-\bar\alpha_2$	$-\frac{Y}{l}\mathfrak{L}+y_{oa}$
−XII					$-Z_{21b}$			$-Z_{22b}$								E_m	$-\bar\beta_1$	$-\bar\beta_2$	y_{ob}
XX						$-Z_{21r}$			$-Z_{22r}$									E_r	y_{or}
III	E_m	E_m		Y			$-X$												$-\mathfrak{M}_{bm}$
−XVII	$-\alpha_1$	$-\beta_1$																	$-\mathfrak{M}_p$
−XVIII	$-\alpha_2$	$-\beta_2$	E_r																$-\mathfrak{M}_r$
I				E_m	E_m														$-\mathfrak{H}_m$
−XIII				$-\alpha_1$	$-\beta_1$														$-\mathfrak{H}_p$
−XIV				$-\alpha_2$	$-\beta_2$	E_r													$-\mathfrak{H}_r$
II							E_m	E_m											$-\mathfrak{V}_m$
−XV							$-\alpha_1$	$-\beta_1$											$-\mathfrak{V}_p$
−XVI							$-\alpha_2$	$-\beta_2$	E_r										$-\mathfrak{V}_r$

$$\xi\equiv\begin{bmatrix}\frac{l}{EI_a}\xi_a & -\frac{l}{EI_b}\eta\\ -\frac{l}{EI_a}\eta & \frac{l}{EI_b}\xi_b\end{bmatrix}$$

$$\bar\alpha_L=\left(E_m-\bar\alpha\frac{1}{\alpha\cdot\bar\alpha}\alpha\right)\bar\beta A$$

$$\bar\beta_L=\left(E_n-\bar\beta\frac{1}{\beta\cdot\bar\beta}\beta\right)\bar\alpha B\quad\cdots\cdots(7)$$

故に初めの行列方程式の解は

$$x=\bar\beta_L\frac{1}{\alpha\bar\beta_L}l+\bar\alpha_L\frac{1}{\beta\bar\alpha_L}x_\beta=\left(E_n-\bar\beta\frac{1}{\beta\bar\beta}\beta\right)\bar\alpha\frac{1}{\alpha\left(E_n-\bar\beta\frac{1}{\beta\bar\beta}\beta\right)\bar\alpha}l+\left(E_n-\bar\alpha\frac{1}{\alpha\bar\alpha}\alpha\right)\bar\beta\frac{1}{\beta\left(E_n-\bar\alpha\frac{1}{\alpha\bar\alpha}\alpha\right)\bar\beta}x_\beta\cdots(8)$$

この (8) 式の結果を用いて表—3 の I, XIII, XIV 式を解くと，

$$\begin{bmatrix}H_a\\H_b\\H_r\end{bmatrix}=\mathfrak{T}\begin{bmatrix}-\mathfrak{H}_m\\-\mathfrak{H}_p\\-\mathfrak{H}_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar\varepsilon\\ \bar\rho\\ \bar\sigma\end{bmatrix}\frac{1}{[\lambda\mu\nu]\begin{bmatrix}\bar\varepsilon\\ \bar\rho\\ \bar\sigma\end{bmatrix}}H_{\lambda\mu\nu}\qquad H_{\lambda\mu\nu}\equiv[\lambda\mu\nu]\begin{bmatrix}H_a\\H_b\\H_r\end{bmatrix}\cdots\cdots(9)$$

但し，

$$\mathfrak{T}=\left(\begin{bmatrix}E_m&&\\&E_m&\\&&E_r\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar\lambda\\ \bar\mu\\ \bar\nu\end{bmatrix}\frac{1}{[\lambda\mu\nu]\begin{bmatrix}\bar\lambda\\ \bar\mu\\ \bar\nu\end{bmatrix}}[\lambda\mu\nu]\right)\begin{bmatrix}E_m&-\bar\alpha_1&-\bar\alpha_2\\E_m&-\bar\beta_1&-\bar\beta_2\\0&0&E_r\end{bmatrix}\biggl\{\begin{bmatrix}E_m&E_m&0\\-\alpha_1&-\beta_1&0\\-\alpha_2&-\beta_2&E_r\end{bmatrix}\biggl(\begin{bmatrix}E_m&&\\&E_m&\\&&E_r\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\bar\lambda\\ \bar\mu\\ \bar\nu\end{bmatrix}\frac{1}{[\lambda\mu\nu]\begin{bmatrix}\bar\lambda\\ \bar\mu\\ \bar\nu\end{bmatrix}}[\lambda\mu\nu]\Bigg)\begin{bmatrix}E_m & -\bar\alpha_1 & -\bar\alpha_2\\ E_m & -\bar\beta_1 & -\bar\beta_2\\ 0 & 0 & E_r\end{bmatrix}\Bigg\}^{-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

$[\lambda\mu\nu]=\begin{bmatrix}E_m & E_m & 0\\ -\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}$ の行ベクトルと一次独立なベクトルを行ベクトルとする行列

$[\varepsilon\rho\sigma]=\begin{bmatrix}E_m & E_m & 0\\ -\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}_L$ これは $\begin{bmatrix}E_m & E_m & 0\\ -\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar\varepsilon\\ \bar\rho\\ \bar\sigma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar\varepsilon+\bar\rho\\ -\alpha_1\bar\varepsilon-\beta_1\bar\rho\\ -\alpha_2\bar\varepsilon-\beta_2\bar\rho+\bar\sigma\end{bmatrix}=0$ と同じ意味であるから

$\bar\rho=-\bar\varepsilon$, $\bar\sigma=(\alpha_2-\beta_2)\bar\varepsilon$, $(\alpha_1-\beta_1)\bar\varepsilon=0$ が結論される。

(9) 式において更に $[\lambda\mu\nu]\begin{bmatrix}\bar\varepsilon\\ \bar\rho\\ \bar\sigma\end{bmatrix}=E$ なる条件を付加えると

$$\begin{bmatrix}H_a\\ H_b\\ H_r\end{bmatrix}=-\mathfrak{T}\begin{bmatrix}\mathfrak{H}_m\\ \mathfrak{H}_p\\ \mathfrak{H}_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}E_m\\ -E_m\\ \alpha_2-\beta_2\end{bmatrix}\bar\varepsilon H_{\lambda\mu\nu}\quad\text{同様にして}\quad\begin{bmatrix}V_a\\ V_b\\ V_r\end{bmatrix}=-\mathfrak{T}\begin{bmatrix}\mathfrak{V}_m\\ \mathfrak{V}_p\\ \mathfrak{V}_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}E_m\\ -E_m\\ \alpha_2-\beta_2\end{bmatrix}\bar\varepsilon V_{\lambda\mu\nu}\quad(10),(11)$$

但し，

$$\bar\varepsilon=\left[E-(\bar\alpha_1-\bar\beta_1)\frac{1}{(\alpha_1-\beta_1)(\bar\alpha_1-\bar\beta_1)}(\alpha_1-\beta_1)\right][\bar\lambda-\bar\mu+(\bar\alpha_2-\bar\beta_2)\bar\nu]$$

$$\left\{[\lambda-\mu+\nu(\alpha_2-\beta_2)]\left[E-(\bar\alpha_1-\bar\beta_1)\frac{1}{(\alpha_1-\beta_1)(\bar\alpha_1-\bar\beta_1)}(\alpha_1-\beta_1)\right][\bar\lambda-\bar\mu+(\bar\alpha_2-\bar\beta_2)\bar\nu]\right\}^{-1}\cdots\cdots(\mathrm{b})$$

$[\lambda\mu\nu]$ をきめると (a),(b) 式より $\mathfrak{T}$ 及び $\bar\varepsilon$ が計算され，(10)，(11) 式の形が定まる。しかしこれはなかなか厄介な作業である。故に計算による直接法ではなく次の如くして求めた方が良い（例題参照）。

（イ） 与えられた骨組構造物の全部の節点を剛節点と考え，適当な所で切断して内的に静定な構造物とする。

（ロ） 全部の支点を固定端と考え各支点間の縁を切る。

（ハ） 切断面に番号をつけ i 番目の切断面が部材の a 端にあるか，b 端にあるか，或いは支点にあるかに従つて λ, μ 或いは ν の i 行目の適当な要素を 1 とする。

（ニ） （イ）（ロ）で得られた切断面から出発して（先ず切断面のある部材を通り）他の切断面を横断しないで元にもどる道を考える（但し，各支点の間は $EI=\infty$ の部材で結ばれているものと考える）

（ホ） i 番目の切断面から出る道が ⓚ 部材の a 端から b 端に向つて進むときは ε の ik 要素を $+1$ とし，逆に ⓚ 部材の b 端から a 端に向つて進むときは ε の ik 要素 -1 とする。ε のその他の要素は 0 とする。

（ヘ） （イ）（ロ）で作られた静定構造物の各部材の a 端，b 端及び支点に外力によつて生ずる水平力及び鉛直力を $H_{0a}V_{0a}$, $H_{0b}H_{0b}$ 及び $H_{0r}V_{0r}$ とすると，力の釣合条件より

$$\begin{bmatrix}H_a\\ H_b\\ H_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_m\\ -E_m\\ \alpha_2-\beta_2\end{bmatrix}\bar\varepsilon H_{\lambda\mu\nu}+\begin{bmatrix}H_{0a}\\ H_{0b}\\ H_{0r}\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}V_a\\ V_b\\ V_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_m\\ -E_m\\ \alpha_2-\beta_2\end{bmatrix}\bar\varepsilon V_{\lambda\mu\nu}+\begin{bmatrix}V_{0a}\\ V_{0b}\\ V_{0r}\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots(12),(13)$$

なる事が証明される。これと (10) (11) とを比較すると，

$$-\mathfrak{T}\begin{bmatrix}\mathfrak{H}_m\\ \mathfrak{H}_p\\ \mathfrak{H}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{0a}\\ H_{0b}\\ H_{0r}\end{bmatrix}$$

$$-\mathfrak{T}\begin{bmatrix}\mathfrak{V}_m\\ \mathfrak{V}_p\\ \mathfrak{V}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_{0a}\\ V_{0b}\\ V_{0r}\end{bmatrix}\quad(14),(15)$$

(iv) $x_b\ x_p\ x_r$ 及び $y_b\ y_p\ y_r$ 消す事

表―3 の $[H_aH_bH_r]$ 及び $[V_aV_bV_r]$ に (10)，(11)式又は (12)，(13)式を代入し XXIV，X，XIX 式及び XXV，XII，XX 式の左から $\varepsilon[E_m, -E_m, \bar\alpha_2-\bar\beta_2]$ をかけると**表―4** を得る。なお，(iii) の（イ），（ロ）で定義した静定構造物の各

表―4

	M_a	M_b	M_r	$H_{\lambda\mu\nu}$	$V_{\lambda\mu\nu}$	R	θ_p	θ_r	荷　重　項
XXII	$\xi-\begin{bmatrix}W_a & 0\\ 0 & W_b\end{bmatrix}$					E_m	$-\bar\alpha_1$	$-\bar\alpha_2$	$-\mathfrak{a}+\theta_{0a}$
XXIII						E_m	$-\bar\beta_1$	$-\bar\beta_2$	$\mathfrak{b}+\theta_{0b}$
XXI			W_r					E_r	θ_{0r}
XXVI				$\varepsilon\frac{X}{l}\frac{l'X}{EA_0l}\bar\varepsilon$ $-\varepsilon Z_{11}\bar\varepsilon$	$\varepsilon\frac{X}{l}\frac{l'Y}{EA_0l}\bar\varepsilon$ $-\varepsilon Z_{12}\bar\varepsilon$	εY			$-\varepsilon\frac{X}{l}\mathfrak{a}-\varepsilon\frac{X}{l}\frac{l'X}{EA_0l}H_{0a}-\varepsilon\frac{X}{l}\frac{l'Y}{EA_0l}V_{0a}+\varepsilon f(x_{0a}+Z_{11a}H_{0a}+Z_{12a}V_{0a})$
XXVII				$\varepsilon\frac{Y}{l}\frac{l'X}{EA_0l}\bar\varepsilon$ $-\varepsilon Z_{21}\bar\varepsilon$	$\varepsilon\frac{Y}{l}\frac{l'Y}{EA_0l}\bar\varepsilon$ $-\varepsilon Z_{22}\bar\varepsilon$	$-\varepsilon X$			$-\varepsilon\frac{Y}{l}\mathfrak{a}-\varepsilon\frac{Y}{l}\frac{l'X}{EA_0l}H_{0a}-\varepsilon\frac{Y}{l}\frac{l'Y}{EA_0l}V_{0a}+\varepsilon f(y_{0a}+Z_{21a}H_{0a}+Z_{22a}V_{0a})$
III	E_m	E_m		$Y\bar\varepsilon$	$-X\bar\varepsilon$				$-\mathfrak{M}_{bm}-YH_{0a}+XV_{0a}$
−XVII	$-\alpha_1$	$-\beta_1$							$-\mathfrak{M}_{Lb}$
−XVIII	$-\alpha_2$	$-\beta_2$	E_r						$-\mathfrak{M}_{Lr}$

荷重項（III，−XVII，−XVIII 行）: $=\begin{bmatrix}E_m & L_m & \\ -\alpha_1 & -\beta_1 & \\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\\ M_{0r}\end{bmatrix}$

$Z_{ik}=Z_{ika}+Z_{ikb}+(\bar\alpha_2-\bar\beta_2)Z_{ikr}(\alpha_2-\beta_2)$，　$f(x_a)=[x_a-x_b+(\alpha_2-\beta_2)x_r]$

部材の a 端，b 端の曲げモーメント及び支点モーメントを M_{0a}，M_{0b} 及び M_{0r} とすると，部材，節点及び支点の釣合条件式より

$$[E_m E_m]\begin{bmatrix}M_{0a}\\M_{0b}\end{bmatrix}+YH_{0a}-XV_{0a}+\mathfrak{M}_{bm}=0,\quad -[\alpha_1\beta_1]\begin{bmatrix}M_{0a}\\M_{0b}\end{bmatrix}+\mathfrak{M}_p=0,\quad -[\alpha_2\beta_2]\begin{bmatrix}M_{0a}\\M_{0b}\end{bmatrix}+M_{0r}+\mathfrak{M}_r=0$$

が得られる。故に **表—4** の III，－XVII，－XVIII 式の右辺（荷重項）は，表の右側に示したような形に書く事がきでる。

(v)　トラスの場合

トラスの場合には W_a W_b W_r の対角要素はすべて ∞ となり，又 $M_a=M_b=M_r=0$ であるから **表—3** の 1，2，3 行及び 1，2，3 列は必要がなくなる。更に $H_b=-H_a-\mathfrak{H}_m$，$V_b=-V_a-\mathfrak{V}_m$（I，II 式）を考慮して未知数をへらすと **表—5** が得られる。又

$$\frac{X}{l}H+\frac{Y}{l}V=N,\quad -\frac{Y}{l}H+\frac{Z}{l}V=Q$$

なる関係を用いて H，V を N，Q に交換し（支点反力の場合には $\frac{X}{l}=\cos\omega$，$\frac{Y}{l}=\sin\omega$ とする）多少の変形を行うと結局 **表—6** を得る。

表—5

	H_a	H_r	V_a	V_r	R	x_p	x_r	y_p	y_r	荷　重　項
XVIII	$\frac{X}{l}\frac{l'}{EA_0}\frac{X}{l}-(\bar{Z}_{11a}-\bar{Z}_{11b})$		$\frac{X}{l}\frac{l'}{EA_0}\frac{Y}{l}-(\bar{Z}_{12a}-\bar{Z}_{12b})$		Y	$-\bar{\alpha}_1+\bar{\beta}_1$	$-\bar{\alpha}_2+\bar{\beta}_2$			$-\frac{X}{l}\mathfrak{L}+\mathfrak{X}_{0a}-\mathfrak{X}_{0b}+\bar{Z}_{11b}\mathfrak{f}_m+\bar{Z}_{22b}\mathfrak{W}_m$
XIX		$-\bar{Z}_{11r}$		$-\bar{Z}_{12r}$			E_r			$\mathfrak{X}_{0r}$
XVII	$\frac{Y}{l}\frac{l'}{EA_0}\frac{X}{l}-(\bar{Z}_{21a}-\bar{Z}_{21b})$		$\frac{Y}{l}\frac{l'}{EA_0}\frac{Y}{l}-(\bar{Z}_{22a}-\bar{Z}_{22b})$		$-X$			$-\bar{\alpha}_1+\bar{\beta}_1$	$-\bar{\alpha}_2+\bar{\beta}_2$	$-\frac{Y}{l}\mathfrak{L}+\mathfrak{y}_{0a}-\mathfrak{y}_{0b}+\bar{Z}_{21b}\mathfrak{f}_m+\bar{Z}_{22b}\mathfrak{W}_m$
XX		$-\bar{Z}_{21r}$		$-\bar{Z}_{22r}$					E_r	$\mathfrak{y}_{0r}$
III′	Y		$-X$							$-\mathfrak{M}_{bm}=0$
XXX	$-\alpha_1+\beta_1$									$-\mathfrak{f}_p-\beta_1\mathfrak{f}_m$
XXXI	$-\alpha_2+\beta_2$	E_r								$-\mathfrak{f}_r-\beta_2\mathfrak{f}_m$
XXXII			$-\alpha_1+\beta_1$							$-\mathfrak{W}_p-\beta_1\mathfrak{W}_m$
XXXIII			$-\alpha_2+\beta_2$	E_r						$-\mathfrak{W}_r-\beta_2\mathfrak{W}_m$

表—6

	N_a	N_r　Q_r	x_p　x_r	y_p　y_r	荷　重　項
	$\frac{l'}{EA_0}-\left(\frac{X}{l}\ \frac{Y}{l}\right)\begin{pmatrix}\bar{Z}_{11a}+\bar{Z}_{11b} & \bar{Z}_{12a}+\bar{Z}_{12b}\\ \bar{Z}_{21a}+\bar{Z}_{21b} & \bar{Z}_{22a}+\bar{Z}_{22b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{X}{l}\\ \frac{Y}{l}\end{pmatrix}$		$-\frac{X}{l}[\bar{\alpha}_1-\bar{\beta}_1,\ \bar{\alpha}_2-\bar{\beta}_2]$	$-\frac{Y}{l}[\bar{\alpha}_1-\bar{\beta}_1,\ \bar{\alpha}_2-\bar{\beta}_2]$	$-\mathfrak{L}+\left(\frac{X}{l}\ \frac{Y}{l}\right)\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{X}_{0a}-\mathfrak{X}_{0b}\\ \mathfrak{y}_{0a}-\mathfrak{y}_{0b}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{Z}_{11b} & \bar{Z}_{12b}\\ \bar{Z}_{21b} & \bar{Z}_{22b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{f}_m\\ \mathfrak{W}_m\end{pmatrix}\right\}$
		$\begin{matrix}-\bar{Z}_{1r} & \\ & -\bar{Z}_{2r}\end{matrix}$	$\begin{matrix}\cos\omega_r\\ -\sin\omega_r\end{matrix}$	$\begin{matrix}\sin\omega_r\\ \cos\omega_r\end{matrix}$	$\begin{bmatrix}\cos\omega_r & \sin\omega_r\\ -\sin\omega_r & \cos\omega_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathfrak{X}_{0r}\\ \mathfrak{y}_{0r}\end{bmatrix}$
	$-\begin{bmatrix}\alpha_1-\beta_1\\ \alpha_2-\beta_2\end{bmatrix}\frac{X}{l}$	$\cos\omega_r$　$-\sin\omega_r$			$\begin{matrix}-\mathfrak{f}_p-\beta_1\mathfrak{f}_m\\ -\mathfrak{f}_r-\beta_2\mathfrak{f}_m\end{matrix}$
	$-\begin{bmatrix}\alpha_1-\beta_1\\ \alpha_2-\beta_2\end{bmatrix}\frac{Y}{l}$	$\sin\omega_r$　$\cos\omega_r$			$\begin{matrix}-\mathfrak{W}_p-\beta_1\mathfrak{W}_m\\ -\mathfrak{W}_r-\beta_2\mathfrak{W}_m\end{matrix}$

6. 従来の各種解法との関係

(i)　撓角撓度法

表—4 の XXII，XXIII，XXI 式の左より

$$\begin{bmatrix}E_m & E_m & 0\\ -\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi-\begin{bmatrix}W_a & 0\\ 0 & W_b\end{bmatrix} & \\ & -W_r\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}E_m & E_m & 0\\ -\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\xi-\begin{bmatrix}W_a & 0\\ 0 & W_b\end{bmatrix}\right)^{-1} & \\ & -\dfrac{1}{W_r}\end{bmatrix}$$

$$\equiv\begin{bmatrix}E_m & E_m & 0\\ -\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K & \\ & -\dfrac{1}{W_r}\end{bmatrix}$$

をかけ III，XVII，XVIII 式の符号を変えて加えると **表—7** を得る。

但し，

$$K\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{l}{EI_0}\xi_a-W_a, & -\dfrac{l}{EI_0}\eta\\ -\dfrac{l}{EI_0}\eta, & \dfrac{l}{EI_0}\xi_b-W_b\end{bmatrix}^{-1}=\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{l}{EI_0}\eta & 0\\ 0 & \dfrac{l}{EI_0}\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{m_a}, & -E_m\\ -E_m, & \dfrac{1}{m_b}\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{m_am_b}{E_m-m_am_b}, & 0\\ 0, & \dfrac{m_am_b}{E-m_am_b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{m_b}, & E_m\\ E_m, & \dfrac{1}{m_a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{EI_0}{\eta l}, & 0\\ 0, & \dfrac{EI_0}{\eta l}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{m_a}{E_m-m_am_b}\dfrac{EI_0}{\eta l}, & \dfrac{m_am_b}{E_m-m_am_b}\dfrac{EI_0}{\eta l}\\ \dfrac{m_am_b}{E_m-m_am_b}\dfrac{EI_0}{\eta l}, & \dfrac{m_b}{E_m-m_am_b}\dfrac{EI_0}{\eta l}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}k_a & k\\ k & k_b\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots(16)$$

ここで $m_a\equiv\left(\xi_a-\dfrac{l}{EI_0}W_a\right)^{-1}\eta$，$m_b\equiv\left(\xi_b-\dfrac{l}{EI_0}W_b\right)^{-1}\eta$ [5] とする。これは剛接点では $W=0$ なる故 $m_a=\eta/\xi_a$，$m_b=\eta/\xi_b$，ヒンジ点では $W=\infty$ なる故 $m_a=m_b=0$ となる。又，等断面の部材では $\xi_a=\xi_b=1/3$，$\eta=1/6$ である。

又，荷重項に現われる $\begin{bmatrix}\mathfrak{A}\\ -\mathfrak{B}\end{bmatrix}$ は，各部材を両端固定梁と考えた場合の外力による支点モーメントで表わすのが普通である。今この支点モーメントを C_a，C_b（符号は **図—3** の如く取る）とすると，これ等の間には次の関係がある。

$$\begin{bmatrix}\mathfrak{A}\\ -\mathfrak{B}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{l}{EI_0}\xi_a, & -\frac{l}{EI_0}\eta\\ -\frac{l}{EI_0}\eta, & \frac{l}{EI_0}\xi_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_a\\ C_b\end{bmatrix}\text{[6)]}\qquad\cdots\cdots(17)$$

表—7

	R	θ_p	θ_r	$H_{\lambda\mu\nu}$	$V_{\lambda\mu\nu}$	荷　重　項
XXXIV	$[E_m, E_m]K\begin{bmatrix}E_m\\ E_m\end{bmatrix}$	$-[E_m, E_m]K\begin{bmatrix}\bar\alpha_1\\ \bar\beta_1\end{bmatrix}$	$-[E_m, E_m]K\begin{bmatrix}\bar\alpha_2\\ \bar\beta_2\end{bmatrix}$	$-Y\bar{\varepsilon}$	$X\bar{\varepsilon}$	$-[E_m\ E_m]\left\{K\left(\begin{bmatrix}\mathfrak{A}\\ -\mathfrak{B}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta_{0a}\\ \theta_{0b}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\end{bmatrix}\right\}$
XXXV	$-[\alpha_1, \beta_1]K\begin{bmatrix}E_m\\ E_m\end{bmatrix}$	$[\alpha_1, \beta_1]K\begin{bmatrix}\bar\alpha_1\\ \bar\beta_1\end{bmatrix}$	$[\alpha_1, \beta_1]K\begin{bmatrix}\bar\alpha_1\\ \bar\beta_1\end{bmatrix}$			$[\alpha_1, \beta_1]\left\{K\left(\begin{bmatrix}\mathfrak{A}\\ -\mathfrak{B}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta_{0a}\\ \theta_{0b}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\end{bmatrix}\right\}$
XXXVI	$-[\alpha_2, \beta_2]K\begin{bmatrix}E_m\\ E_m\end{bmatrix}$	$[\alpha_2, \beta_2]K\begin{bmatrix}\bar\alpha_1\\ \bar\beta_1\end{bmatrix}$	$[\alpha_2, \beta_2]K\begin{bmatrix}\bar\alpha_2\\ \bar\beta_2\end{bmatrix}-\frac{1}{W_r}$			$[\alpha_2, \beta_2]\left\{K\left(\begin{bmatrix}\mathfrak{A}\\ -\mathfrak{B}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta_{0a}\\ \theta_{0b}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\end{bmatrix}\right\}-\left[\frac{1}{W_r}\theta_{0r}+M_{0r}\right]$
−XXVI	$-\varepsilon Y$			$\varepsilon Z_{11}\bar{\varepsilon}$	$\varepsilon Z_{12}\bar{\varepsilon}$	$-\varepsilon\cdot f(x_{0a}+z_{11a}H_{0a}+z_{12a}V_{0a})$
−XXVII	εX			$\varepsilon Z_{21}\bar{\varepsilon}$	$\varepsilon Z_{22}\bar{\varepsilon}$	$-\varepsilon\cdot f(y_{0a}+z_{21a}H_{0a}+z_{22a}V_{0a})$

$$K=\begin{bmatrix}K_a & K\\ K & K_b\end{bmatrix}=\left\{\xi-\begin{bmatrix}W_a & 0\\ 0 & W_b\end{bmatrix}\right\}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{m_a}{E_m-m_am_b}\frac{EI_0}{\eta l}, & \frac{m_am_b}{E_m-m_am_b}\frac{EI_0}{\eta l}\\ \frac{m_am_b}{E_m-m_am_b}\frac{EI_0}{\eta l}, & \frac{m_b}{E_m-m_am_b}\frac{EI_0}{\eta l}\end{bmatrix}$$

但 $m_a=\frac{1}{\xi_a-\frac{l}{EI_0}W_a}\eta$, $m_b=\frac{1}{\xi_b-\frac{l}{EI_0}W_b}\eta$

$\frac{l'}{EA_0}\doteqdot 0$, $\mathfrak{L}\doteqdot 0$ とする。

表—7 の $-$XXVI, $-$XXVII 式において $H_{\lambda\mu\nu}$, $V_{\lambda\mu\nu}$ の係数及び荷重項は大部分が0である。故に式の配列の順序を変えて次の二つのグループに分けて考えると便利である。$H_{\lambda\mu\nu}$, $V_{\lambda\mu\nu}$ の係数及び荷重項が第1のグループ（サフィックスⅠをつける）では 0, 第2のグループ（サフィックスⅡをつける）では必ずしも0でなくても良いものとする。式で表わすと $-$XXVI, XXVII を次の二つのグループに分ける事を意味する。

$$\begin{bmatrix}-\varepsilon Y\\ \varepsilon X\end{bmatrix}_{\mathrm{I}}R=0,$$

$$\begin{bmatrix}-\varepsilon Y\\ \varepsilon X\end{bmatrix}_{\mathrm{II}}R+\begin{bmatrix}\varepsilon z_{11}\bar{\varepsilon}, & \varepsilon z_{12}\bar{\varepsilon}\\ \varepsilon z_{21}\bar{\varepsilon}, & \varepsilon z_{22}\bar{\varepsilon}\end{bmatrix}_{\mathrm{II}}\begin{bmatrix}H_{\lambda\mu\nu}\\ V_{\lambda\mu\nu}\end{bmatrix}_{\mathrm{II}}=-\begin{bmatrix}\varepsilon f(x_{0a}+z_{11a}H_{0a}+z_{12a}V_{0a})\\ \varepsilon f(y_{0a}+z_{21a}H_{0a}+z_{22a}V_{0a})\end{bmatrix}_{\mathrm{II}}$$

初めの式の解は (8) 式を用いて

$$R=\bar{\delta}R_\rho \qquad \text{但し,}\ R_\rho=\rho\cdot R \quad\cdots\cdots(18)$$

と表わされる。ここで ρ は $\begin{bmatrix}-\varepsilon Y\\ \varepsilon X\end{bmatrix}_{\mathrm{I}}$ と一次独立なベクトルを表わし，δ は $\begin{bmatrix}-\varepsilon Y\\ \varepsilon X\end{bmatrix}_{\mathrm{I}}$ と直交し ρ との積が単位行列となる矩形行列を表わす。

(18) 式を **表—7** の R に代入し，XXXIV 式の左から δ を掛けると **表—8** が得られる。特別な場合として第2のグループがないときは **表—8** の XXXVII 式及び $H_{\lambda\mu\nu}$, $V_{\lambda\mu\nu}$ の欄が不要となる。**表—7, 8** は撓角撓度法を表わす方程式である。特に **表—8** は鷹部屋博士が求められた機械的作表法を一般化したものである。

表—8

	θ_p	θ_r	R_ρ	$(H_{\lambda\mu\nu}, V_{\lambda\mu\nu})_{\mathrm{II}}$	荷　重　項
XXXVI′	$[\alpha_1, \beta_1]K\begin{bmatrix}\bar\alpha_1\\ \bar\beta_1\end{bmatrix}$	$[\alpha_1, \beta_1]K\begin{bmatrix}\bar\alpha_2\\ \bar\beta_2\end{bmatrix}$	$-[\alpha_1, \beta_1]\begin{bmatrix}K_a+K\\ K_b+K\end{bmatrix}\bar{\delta}$		$[\alpha_1, \beta_1]\left\{K\left(\begin{bmatrix}\mathfrak{A}\\ -\mathfrak{B}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta_{0a}\\ \theta_{0b}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\end{bmatrix}\right\}$
XXXV′	$[\alpha_2, \beta_2]K\begin{bmatrix}\bar\alpha_1\\ \bar\beta_1\end{bmatrix}$	$[\alpha_2, \beta_2]K\begin{bmatrix}\bar\alpha_2\\ \bar\beta_2\end{bmatrix}-\frac{1}{W_r}$	$-[\alpha_2, \beta_2]\begin{bmatrix}K_a+K\\ K_b+K\end{bmatrix}\bar{\delta}$		$[\alpha_2, \beta_2]\left\{K\left(\begin{bmatrix}\mathfrak{A}\\ -\mathfrak{B}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta_{0a}\\ \theta_{0b}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\end{bmatrix}\right\}-\left[\frac{1}{W_r}\theta_{0r}+M_{0r}\right]$
XXXIV′	$-\delta[K_a+K, K_b+K]\begin{bmatrix}\bar\alpha_1\\ \bar\beta_1\end{bmatrix}$	$-\delta[K_a+K, K_b+K]\begin{bmatrix}\bar\alpha_2\\ \bar\beta_2\end{bmatrix}$	$\delta[\Sigma K]\bar{\delta}$	$\delta[-Y\bar{\varepsilon}, X\bar{\varepsilon}]_{\mathrm{II}}$	$-[\delta, \delta]\left\{K\left(\begin{bmatrix}\mathfrak{A}\\ -\mathfrak{B}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta_{0a}\\ \theta_{0b}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\end{bmatrix}\right\}$
XXXVII			$\begin{bmatrix}-\varepsilon Y\\ \varepsilon X\end{bmatrix}_{\mathrm{II}}\bar{\delta}$	$\begin{bmatrix}\varepsilon Z_{11}\bar{\varepsilon}, & \varepsilon Z_{12}\bar{\varepsilon}\\ \varepsilon Z_{21}\bar{\varepsilon}, & \varepsilon Z_{22}\bar{\varepsilon}\end{bmatrix}_{\mathrm{II}}$	$-\varepsilon\begin{Bmatrix}f(x_{0a}+Z_{11a}H_{0a}+Z_{12a}V_{0a})\\ f(y_{0a}+Z_{21a}H_{0a}+Z_{22a}V_{0a})\end{Bmatrix}_{\mathrm{II}}$

$$\Sigma K=K_a+K_b+2K$$

(ii)　四連モーメントの定理による解法

表—4 の XVII, XVIII 式の解は (8) 式を用いて次の如く表わす事ができる。

$$\begin{bmatrix}M_a\\ M_b\\ M_r\end{bmatrix}=\bar{\sigma}_L\left\{\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\bar{\sigma}_L\right\}^{-1}\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\\ M_{0r}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\bar\alpha_1 & -\bar\alpha_2\\ -\bar\beta_1 & -\bar\beta_2\\ 0 & E_{rL}\end{bmatrix}_L\left\{\sigma\begin{bmatrix}-\bar\alpha_1 & -\bar\alpha_2\\ -\bar\beta_1 & -\bar\beta_2\\ 0 & E_r\end{bmatrix}_L\right\}^{-1}M_\sigma$$

$$\cdots\cdots(19)$$

但し，$M_\sigma=\sigma\begin{bmatrix}M_a\\ M_b\\ M_r\end{bmatrix}$, σ は $\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}$ の行ベクトルと一次独立なベクトルを行ベクトルとする矩形行列とする。

更に $\left\{\sigma\begin{bmatrix}-\bar\alpha_1 & -\bar\alpha_2\\ -\bar\beta_1 & -\beta_2\\ 0 & E_r\end{bmatrix}\right\}^{-1}M_\sigma=M_\sigma{}^*$ とおいて (19) 式を **表—4** の $\begin{bmatrix}M_a\\ M_b\\ M_r\end{bmatrix}$ に代入し，XXII, XXIII, XXIV 式の左から $\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}$ をかけると **表—9** を得る。

更に (i) の後段で述べた方法を用いて **表—9** を整理すると **表—10** を得る。

(iii) 弾性方程式による解法

節点及び支点が剛結され各部材の長さの変化を無視する場合のみを考える。この場合 **表—4** の XXVI, XXVII 式は

$$\begin{bmatrix}\varepsilon Y\\ -\varepsilon X\end{bmatrix}R=0$$

となる。これに (8) 式を用いると

$$R=\bar{\delta}\,R_p \cdots(20)$$

一方第5節の (iii) の(イ), (ロ)で定義した静定構造物の切断面に働く部材力を不静定量とし，この不静定量に番号をつけ $x_1 x_2\cdots\cdots x_n$ とすると

表—9

	M_σ^*	K	$H_{\lambda\mu\nu}$	$V_{\lambda\mu\nu}$	荷重項
XXVIII	$\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}_\perp \left\{\xi-\begin{bmatrix}W_a & 0 & 0\\ 0 & W_b & 0\\ 0 & 0 & -W_r\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2\\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2\\ 0 & E_r\end{bmatrix}_\perp$	$\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}_\perp\begin{bmatrix}E_m\\ E_m\\ 0\end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}_\perp\left\{-\begin{bmatrix}\mathfrak{A}\\ -\mathfrak{B}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\theta_{0a}\\ \theta_{0b}\\ \theta_{0r}\end{bmatrix}-\left\{\xi-\begin{bmatrix}W_a & 0 & 0\\ 0 & W_b & 0\\ 0 & 0 & -W_r\end{bmatrix}\right\}\bar{\sigma}_\perp\left(\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\bar{\sigma}_\perp\right)^{-1}\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\\ M_{0r}\end{bmatrix}\right\}$
XXIX	$[E_m\ E_m\ 0]\begin{bmatrix}-\bar{\alpha}_1 & -\bar{\alpha}_2\\ -\bar{\beta}_1 & -\bar{\beta}_2\\ 0 & E_r\end{bmatrix}_\perp$		$Y\bar{\mathcal{E}}$	$-X\bar{\mathcal{E}}$	$[E_m\ E_m\ 0]\left\{\begin{bmatrix}E_m & & \\ & E_m & \\ & & E_r\end{bmatrix}-\bar{\sigma}_\perp\left(\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\bar{\sigma}_\perp\right)^{-1}\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\\ M_{0r}\end{bmatrix}$
−XXVI		εY	$-\varepsilon Z_{11}\bar{\mathcal{E}}$	$-\varepsilon Z_{12}\bar{\mathcal{E}}$	$\varepsilon\int(x_{0a}+Z_{11a}H_a+Z_{12a}V_a)$
−XXVII		$-\varepsilon X$	$-\varepsilon Z_{21}\bar{\mathcal{E}}$	$-\varepsilon Z_{22}\bar{\mathcal{E}}$	$\varepsilon\int(y_{0a}+Z_{21a}H_a+Z_{22a}V_a)$

表—10

	M_σ^*	K_p	$(H_{\lambda\mu\nu}\ V_{\lambda\mu\nu})_{II}$	荷重項
XXVIII	$\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}_\perp \left\{\xi-\begin{bmatrix}W_a & 0 & 0\\ 0 & W_b & 0\\ 0 & 0 & -W_r\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}-\bar{\alpha}_1 & -\bar{\alpha}_2\\ -\bar{\beta}_1 & -\bar{\beta}_2\\ 0 & E_r\end{bmatrix}_\perp$	$\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}_\perp\begin{bmatrix}\bar{\delta}\\ \bar{\delta}\\ 0\end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}_\perp\left\{-\begin{bmatrix}\mathfrak{A}\\ -\mathfrak{B}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\theta_{0a}\\ \theta_{0b}\\ \theta_{0r}\end{bmatrix}-\left\{\xi-\begin{bmatrix}W_a & 0 & 0\\ 0 & W_b & 0\\ 0 & 0 & -W_r\end{bmatrix}\right\}\bar{\sigma}_\perp\left(\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\bar{\sigma}_\perp\right)^{-1}\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\\ M_{0r}\end{bmatrix}\right\}$
XXX	$[\delta\ \delta\ 0]\begin{bmatrix}-\bar{\alpha}_1 & -\bar{\alpha}_2\\ -\bar{\beta}_1 & -\bar{\beta}_2\\ 0 & E_r\end{bmatrix}_\perp$		$\delta[-Y\bar{\mathcal{E}}\ -X\bar{\mathcal{E}}]_{II}$	$[\delta\ \delta\ 0]\left\{\begin{bmatrix}E_m & & \\ & E_m & \\ & & E_r\end{bmatrix}-\bar{\sigma}_\perp\left(\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\bar{\sigma}_\perp\right)^{-1}\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\\ M_{0r}\end{bmatrix}$
−XXVII		$\begin{bmatrix}\varepsilon Y\\ -\varepsilon X\end{bmatrix}_{II}\bar{\delta}$	$-\begin{bmatrix}\varepsilon Z_{11}\bar{\mathcal{E}}, & \varepsilon Z_{12}\bar{\mathcal{E}}\\ \varepsilon Z_{21}\bar{\mathcal{E}}, & \varepsilon Z_{22}\bar{\mathcal{E}}\end{bmatrix}_{II}$	$\varepsilon\begin{bmatrix}\int(x_{0a}+Z_{11a}H_a+Z_{12a}V_a)\\ \int(y_{0a}+Z_{21a}H_a+Z_{22a}V_a)\end{bmatrix}_{II}$

$$\begin{bmatrix}M_a\\ M_b\\ M_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\\ M_{0r}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}M_{1a}\\ M_{1b}\\ M_{1r}\end{bmatrix}x_1-\begin{bmatrix}M_{2a}\\ M_{2b}\\ M_{2r}\end{bmatrix}x_2\cdots\cdots-\begin{bmatrix}M_{na}\\ M_{nb}\\ M_{nr}\end{bmatrix}x_n=\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\\ M_{0r}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}M_{1a}\ M_{2a}\cdots M_{na}\\ M_{1b}\ M_{2b}\cdots M_{nb}\\ M_{1r}\ M_{2r}\cdots M_{nr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\\ M_{0r}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\overline{\mathfrak{M}}_a\times\\ \overline{\mathfrak{M}}_b\times\\ \overline{\mathfrak{M}}_r\times\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

但し, $\begin{bmatrix}M_{ia}\\ M_{ib}\\ M_{ir}\end{bmatrix}$ は不静定量 $x_i=-1$ (その他の不静定量及び外力は 0 とする) が作用したとき静定構造物の各部材の材端に生ずる曲げモーメントを表わす列ベクトルとする。

(20), (21) 式を **表—4** に代入すると, $\delta\cdot$III, −XVII, −XVIII 式は

$$\begin{bmatrix}\delta & \delta & 0\\ -\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\\ M_{0r}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\overline{\mathfrak{M}}_a\times\\ \overline{\mathfrak{M}}_b\times\\ \overline{\mathfrak{M}}_r\times\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}\delta & \delta & 0\\ -\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\\ M_{0r}\end{bmatrix}$$

然るに $\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\neq 0$ なる故

$$\begin{bmatrix}\delta & \delta & 0\\ -\alpha_1 & -\beta_1 & 0\\ -\alpha_2 & -\beta_2 & E_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\mathfrak{M}}_a\times\\ \overline{\mathfrak{M}}_b\times\\ \overline{\mathfrak{M}}_r\times\end{bmatrix}=0 \text{ 転置行列を取ると } [\mathfrak{M}_a\times,\mathfrak{M}_b\times,\mathfrak{M}_r\times]\begin{bmatrix}\bar{\delta} & -\bar{\alpha}_1 & -\bar{\alpha}_2\\ \bar{\delta} & -\bar{\beta}_1 & -\bar{\beta}_2\\ 0 & 0 & E_r\end{bmatrix}=0\cdots\cdots\cdots(22)$$

又 **表—4** の XXII, XXIII, XXI 式に左より $[\mathfrak{M}_a\times,\mathfrak{M}_b\times,\mathfrak{M}_r\times]$ を掛け (20), (21), (22) 式を用いると

$$[\mathfrak{M}_a\times,\mathfrak{M}_b\times,\mathfrak{M}_r\times]\begin{bmatrix}\xi-\begin{bmatrix}W_a & 0\\ 0 & W_b\end{bmatrix} & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & \ \ 0\end{matrix} & -W_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\mathfrak{M}}_a\times\\ \overline{\mathfrak{M}}_b\times\\ \overline{\mathfrak{M}}_r\times\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=[\mathfrak{M}_a\times,\mathfrak{M}_b\times,\mathfrak{M}_r\times]\left\{\begin{bmatrix}+\mathfrak{A}\\ -\mathfrak{B}\\ 0\end{bmatrix}\right.$$

$$\left.-\begin{bmatrix}\theta_{0a}\\ \theta_{0b}\\ \theta_{0r}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\xi-\begin{bmatrix}W_a & 0\\ 0 & W_b\end{bmatrix} & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & \ \ 0\end{matrix} & -W_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{0a}\\ M_{0b}\\ M_{0r}\end{bmatrix}\right\}$$

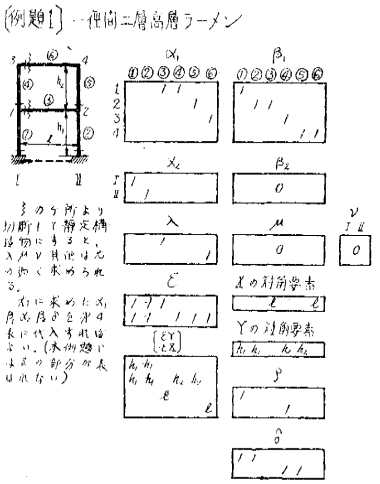
更に $\mathfrak{M}_a\times,\mathfrak{M}_b\times,\mathfrak{M}_r\times$ の間には $-(\alpha_2\beta_2)\begin{bmatrix}\overline{\mathfrak{M}}_a\times\\ \overline{\mathfrak{M}}_b\times\end{bmatrix}+\mathfrak{M}_r\times=0$ なる関係があるから上式は次の如く変形される。

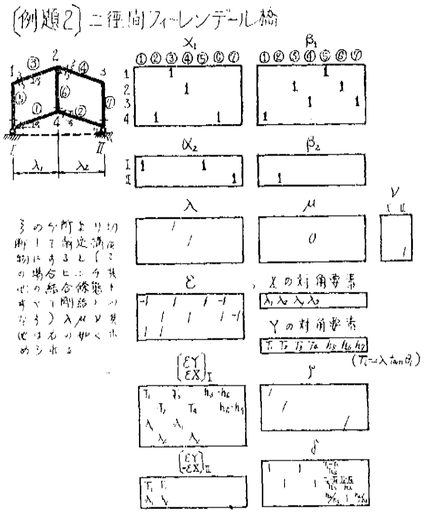
$$[\mathfrak{M}_a\times\ \mathfrak{M}_b\times]\left\{\xi-\begin{bmatrix}W_a & 0\\ 0 & W_b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_2\\ \bar{\beta}_2\end{bmatrix}W_r[\alpha_2\beta_2]\begin{bmatrix}\overline{\mathfrak{M}}_a\times\\ \overline{\mathfrak{M}}_b\times\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\right.$$

$$=[\mathfrak{M}_a\times\mathfrak{M}_b\times]\left\{\begin{bmatrix}\mathfrak{A}\\-\mathfrak{B}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta_{0a}\\ \theta_{0b}\end{bmatrix}+\left[\xi-\begin{pmatrix}W_a&0\\0&W_b\end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix}M_{0a}\\M_{0b}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_2\\ \bar{\beta}_2\end{bmatrix}[\theta_r+W_rM_r]\right\} \quad \cdots\cdots \text{XXXXI}$$

7. 例　　題

すでに制限紙数を越えているので次の二つの例題をあげるにとどめる。





8. 結　　論

（1）　本論文の **表―3** は直線部材で構成されるすべての平面骨組構造に適用できる。これはラーメン構造に対しては **表―4**，トラス構造に対しては **表―6** の如く簡素化される。

（2）　特に **表―8** は鷹部屋博士の機械的作表法を一般化したものである。又 **表―9** はブライヒの四連モーメント法を数式化したものである。

（3）　本文で述べた方法に従つて $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \varepsilon$ 及び δ を求めれば **表―4，6，8** に示す連立一次方程式は容易に求る事ができる。

（4）　曲線部材を含む平面骨組構造の部材力を求める問題，骨組構造の Backling 荷重及び固有振動数を求める問題等も部材条件を変えるだけで本文と同様の方法で求める事ができる。又立体骨組構造についても同じ方法が考えられるが，この問題に関しては後日発表する予定である。

（5）　本論文では部材力を求めるために連立一次方程式を立てる問題を取扱つた。第二段階として連立一次方程式を解く問題があるがこれに対する私見は後日機会があつたら発表したい。

参考文献その他

（1）　「ラーメン新論」
（2）　土木学会誌 35 巻 4 号，土木学会論文集 13 号
（3）　土木学会誌 26 巻 8，9　巻，28 巻 2 号
（4）　土木学会誌 29 巻 12 号
（5）　これは山崎徳也氏が出された式と一致している。
　　　土木学会誌 36 巻 9 号，九大工学部集報 25―3，4

（6）　各部材を等断面と考えその両端を固定した場合の外力による支点モーメントとして C_a，C_b を定義する事があ。この場合には

$$\begin{bmatrix}\mathfrak{A}\\-\mathfrak{B}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\dfrac{l}{3EI_0}, & -\dfrac{l}{6EI_0}\\ -\dfrac{l}{6EI_0}, & \dfrac{l}{3EI_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_a\\C_b\end{bmatrix}\quad\therefore K\begin{bmatrix}\mathfrak{A}\\-\mathfrak{B}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\dfrac{1}{6\eta}\dfrac{m_a(2E_m-m_b)}{E_m-m_am_b}, & \dfrac{-1}{6\eta}\dfrac{m_a(E_m-2m_b)}{E_m-m_am_b}\\ \dfrac{-1}{6\eta}\dfrac{m_b(E_m-2m_a)}{E_m-m_am_b}, & \dfrac{1}{6\eta}\dfrac{m_b(2E_m-m_a)}{E_m-m_am_b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_a\\C_b\end{bmatrix}$$

（昭.31.10.5）