

# 対数正規分布とその積率による解法

正員 石原 藤次郎\*  
准員 高瀬 信忠\*\*

The Logarithmic-Normal Distribution and its Solution  
Based on Moment Method  
(Trans. JSCE, No. 47, Aug. 1957)

Dr. Eng. Tojiro Ishihara, C.E. Member and Nobutada Takase,  
C.E. Assoc. Member.

**Synopsis :** Hitherto, many seniors have tried several investigations on the un-symmetrical distributions in hydrologic statistics, and proposed several solutions. And these investigations are mostly related to the logarithmic-normal distribution.

In this paper, the authors propose a new solution based on the moment method of the logarithmic-normal distribution in which the upper limit is infinite and the lower limit  $b$ , and suggest a practical table that makes, extremely, the calculations simple. Moreover, using the moment method, the authors prove that the Gumbel distribution is, practically, a special case of the logarithmic-normal distribution.

**要旨** 水文統計学における非対称分布については、従来から種々の研究が行われているが、その多くは対数正規分布を基礎としたものであつて、幾つかの注目すべき解法が提案されている。本論文では、下限値  $b$  を有し上限が無限大なる対数正規分布について、積率による新解法を提案するとともに、その計算を極めて簡易化する実用的数表を提示した。なお、Gumbel 分布が実用上は対数正規分布の特別の場合であることを、積率法によつて証明し、注目すべき結果をえたのである。

## 1. 緒言

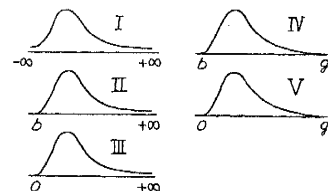
河川改修計画の規模を決定する計画高水流量については、従来から種々の論議が行われているが、今なお多くの問題点が残されている。わが国の多くの河川では、従来から既往最大洪水流量に若干の余裕を加えて計画高水流量とする非科学的方法によつていたが、雨量の統計とともに年最大流量が重要視せられ、高水流量を統計的に表わす方法が広く用いられるようになった。このことは、継続曲線の統計的推定法に関する岩井教授などの研究に基づくものであるが、最近では順序統計学的ないしは推計学的な取扱いが進展してきたことを注目しなければならない。

こうした水文統計学上の研究の多くは対数正規分布に基づくもので、今まで幾つかの解法が提案されているが、著者らはここに積率法を用いた一つの新解法を提案し、その計算を非常に簡単ならしめる実用的数表を作製した。ついで Gumbel 分布についても考察を加えて、対数正規分布の特別の場合であるという注目すべき結果をうる事ができた。

## 2. 水文量の分布函数とその積率による解法

一般に年間最大値を取り扱う分布函数を大別すると、対数正規分布と Gumbel 分布の二つになるが、水文量の密度函数としてはつぎの五つの非対称型をあげることができる。図-1 において、(I) は Gumbel 型としてその性質と実際適用を Gumbel が深く研究しており、(II)~(V) は Slade 型に属するものであつて、わが国では岩井教授がそれらの性質を研究している。しかし、上限常数  $g$  を含む場合は、その性質が極めて複雑であつて、岩井教授は積率の厳密解法を求めたが<sup>1)</sup>、いまだ実用的段階に至つていない。ところが (II), (III) は積率やその性質が簡単であり、とくに (II) において  $b=0$  とした特殊の場合が (III) である

図-1 非対称分布の基本型  
Fig.1 Fundamental types of un-symmetrical distributions



\*工学博士，京大教授，工学部土木工学教室

\*\*建設技官，宮崎工事事務所（元京大助手，工学部土木工学教室）

が、一般には今まで(Ⅲ)が多く用いられてきた。ここでは一般的な場合である(Ⅱ)を積率理論によつて究明し、その積率を簡単な形で表わすことができた。すなわち、下限常数  $b$  をもつた対数正規分布は、

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi, \dots\dots\dots(1)$$

ここに、  $\xi = \alpha \{ \log(x-b) - \log(x_0-b) \} = k \{ \lg(x-b) - \lg(x_0-b) \}, \dots\dots\dots(2)$

上式中、 $F(x)$  は累積分布函数、 $\alpha, x_0, b$  は常数、 $k = \alpha M, M = \log e \doteq 0.4343, \lg$  は自然対数である。(2) 式より  $x = (x_0 - b)e^{\xi/k} + b$

となり、(1) 式の微分形は

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{dF(x)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{k}{(x-b)\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}, \text{ または } \frac{dF(x)}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}$$

となる。

$x=b$  のまわりの  $i$  次の積率  $r_i$  を求めると、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} r_i &= \int_b^{\infty} (x-b)^i dF(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-b)^i e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x_0-b)^i e^{i\xi/k} e^{-\xi^2} d\xi \\ &= \frac{(x_0-b)^i}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi - i/2k)^2} e^{i^2/4k^2} d\xi = \frac{(x_0-b)^i}{\sqrt{\pi}} e^{i^2/4k^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt, \end{aligned}$$

ここに、 $\xi - (i/2k) = t$  であり、今  $m = \log(x_0 - b)$  とすると、 $e^m = x_0 - b$ 、また  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1$  であるから、上式は結局つぎのようになる。

$$r_i = e^{im} e^{i^2/4k^2} \dots\dots\dots(3)$$

従つて  $x$  の平均値  $\bar{x}$ 、標準偏差  $\sigma_x$  および  $x = \bar{x}$  のまわりの  $i$  次の積率  $\mu_i$  を求めると、

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \bar{x} = r_1 + b = e^m e^{1/4k^2} + b, \\ \mu_2 &= (\sigma_x)^2 = r_2 - r_1^2 = e^{2m} (e^{1/k^2} - e^{1/2k^2}) \\ \mu_3 &= r_3 - 3r_2r_1 + 2r_1^3 = e^{3m} (e^{9/4k^2} - 3e^{5/4k^2} + 2e^{3/4k^2}), \\ \mu_4 &= r_4 - 4r_3r_1 + 6r_2r_1^2 - 3r_1^4 = e^{4m} (e^{4/k^2} - 4e^{5/2k^2} + 6e^{3/2k^2} - 3e^{1/k^2}) \end{aligned}$$

となる。この分布函数の特性値、すなわち変異係数  $C_v$ 、ヒズミ係数  $C_s$  および尖り係数  $C_k$  を求めると、

$$C_v = \mu_2 / \bar{x} = e^m (e^{1/k^2} - e^{1/2k^2})^{1/2} / (e^m e^{1/4k^2} + b), \dots\dots\dots(4)$$

$$C_s = \mu_3 / \mu_2^{3/2} = (e^{9/4k^2} - 3e^{5/4k^2} + 2e^{3/4k^2}) / (e^{1/k^2} - e^{1/2k^2})^{3/2}, \dots\dots\dots(5)$$

$$C_k = \mu_4 / \mu_2^2 = (e^{4/k^2} - 4e^{5/2k^2} + 6e^{3/2k^2} - 3e^{1/k^2}) / (e^{1/k^2} - e^{1/2k^2})^2, \dots\dots\dots(6)$$

従つて  $C_v$  は  $\bar{x}$  および  $1/k$  の函数であるが、 $C_s$  および  $C_k$  が  $1/k$  のみの函数であることは、注目すべき点である。いま  $e^x$  を Taylor 級数に展開しておいて、(5)、(6) 式にて  $k \rightarrow \infty$ 、従つて  $1/k \rightarrow 0$  として極限值を求めると、 $C_s \rightarrow 0, C_k \rightarrow 3$  となることから、この分布は  $k$  が十分大きいときは近似的に

$$\bar{x} \doteq e^m e^{1/4k^2} + b \doteq e^m (1 + 1/4k^2) + b, \quad \sigma_x \doteq e^m (e^{1/4k^2} - e^{1/2k^2})^{1/2} \doteq e^m / (\sqrt{2} k)$$

なる正規分布に従うものとみることができ。つぎに (4)、(5) 式から  $1/k$  を消去して、 $C_v$  と  $C_s$  との関係を求めると、

$$C_s = 3(C_v/F) + (C_v/F)^3, \text{ ただし } F = 1 - b/\bar{x}$$

となり、同様に (4)、(6) 式から

$$C_k = (C_v/F)^8 + 6(C_v/F)^6 + 15(C_v/F)^4 + 16(C_v/F)^2 + 3$$

がえられる。上式の  $C_s, C_k$  において、特別の場合として  $b=0$  とすれば  $F=1$  となり、 $C_s$  および  $C_k$  は  $C_v$  の値によつて一義的に定まつてしまうことになる。

いま、水文量が対数正規分布の (1)、(2) 式に従うものとみなすと、決定すべき常数は  $\alpha$  (あるいは  $k$ )、 $x_0$  および  $b$  の三つであるから、積率によつて求めようとすれば 3 次までとらなければならぬ。従つて与えられた原変量の 3 次積率までを用いて、

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= e^m e^{1/4k^2} + b, \\ \sigma_x &= e^m (e^{1/k^2} - e^{1/2k^2})^{1/2}, \\ C_s &= (e^{9/4k^2} - 3e^{5/4k^2} + 2e^{3/4k^2}) / (e^{1/k^2} - e^{1/2k^2})^{3/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

を解けばよい。この場合  $C_s$  は  $1/k$  のみの函数であるから、 $C_s$  を与えると逆に  $1/k$  の値が一義的に決定し、そのためには (5) 式を変形した  $1/k^2$  の 3 次方程式

$$e^{3/2k^2} + 3e^{1/k^2} - (C_s^2 + 4) = 0$$

の実根を求める Cardan の公式によつて、

$$1/k = \left[ 2 \lg \left\{ \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}C_s^2 + \frac{1}{2}C_s\sqrt{4 + C_s^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}C_s^2 - \frac{1}{2}C_s\sqrt{4 + C_s^2}} - 1 \right\} \right]^{1/2} \dots\dots\dots(8)$$

として計算すればよいが、実際にはなかなか面倒である。従つてあらかじめ  $1/k$  の値に対する  $C_s$  の値を作表しておいて、逆に  $C_s$  を与えて  $1/k$  を求めるようにすることが望ましい。こうして  $1/k$  の値が定まると、(7) 式から

$$\left. \begin{aligned} b &= \bar{x} - e^m e^{1/4k^2} \bar{x} - e^{1/4k^2} (e^{1/k^2} - e^{1/2k^2})^{-1/2} \sigma_x \equiv \bar{x} - A_1 \sigma_x, \\ x_0 &= b + e^m = \bar{x} + (1 - e^{1/4k^2}) (e^{1/k^2} - e^{1/2k^2})^{-1/2} \sigma_x \equiv \bar{x} + A_2 \sigma_x, \\ X_0 &= \log(x_0 - b) = \log \{ (e^{1/k^2} - e^{1/2k^2})^{-1/2} \sigma_x \} \equiv \log(C_1 \sigma_x), \\ 1/\alpha &= M/k = 0.4343/k, \quad A_2 = C_1 - A_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

表-1 対数正規分布解法の係数数値表

Table 1 Table of coefficients necessary for the solution of logarithmic-normal distribution

1/k	C <sub>s</sub>	A <sub>1</sub>	-A <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>	1/k	C <sub>s</sub>	A <sub>1</sub>	-A <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>	1/k	C <sub>s</sub>	A <sub>1</sub>	-A <sub>2</sub>	C <sub>1</sub>
0.010	0.021	141.421	0.004	141.417	0.450	1.015	3.063	0.151	2.912	0.980	2.839	1.274	0.273	1.001
0.015	0.031	94.277	0.006	94.271	0.460	1.040	2.993	0.154	2.839	0.990	2.889	1.258	0.274	0.984
0.020	0.042	70.707	0.007	70.700	0.470	1.065	2.926	0.157	2.769	1.000	2.939	1.242	0.275	0.967
0.025	0.053	56.563	0.009	56.554	0.480	1.091	2.862	0.160	2.702	1.010	2.990	1.226	0.276	0.950
0.030	0.063	47.135	0.010	47.125	0.490	1.117	2.800	0.163	2.637	1.020	3.042	1.210	0.277	0.933
0.035	0.073	40.400	0.013	40.387	0.500	1.144	2.741	0.166	2.575	1.030	3.095	1.195	0.279	0.916
0.040	0.084	35.348	0.014	35.334	0.510	1.171	2.683	0.169	2.514	1.040	3.149	1.180	0.280	0.900
0.045	0.095	31.186	0.016	31.170	0.520	1.198	2.628	0.172	2.456	1.050	3.203	1.166	0.281	0.885
0.050	0.106	28.275	0.017	28.258	0.530	1.225	2.575	0.175	2.400	1.060	3.259	1.152	0.282	0.870
0.055	0.116	25.703	0.019	25.684	0.540	1.252	2.524	0.178	2.346	1.070	3.316	1.138	0.283	0.855
0.060	0.127	23.560	0.021	23.539	0.550	1.279	2.475	0.181	2.294	1.080	3.374	1.124	0.284	0.840
0.065	0.138	21.747	0.023	21.724	0.560	1.307	2.427	0.184	2.243	1.090	3.433	1.110	0.285	0.825
0.070	0.149	20.191	0.025	20.166	0.570	1.335	2.381	0.187	2.194	1.100	3.493	1.097	0.286	0.811
0.075	0.159	18.843	0.026	18.817	0.580	1.363	2.336	0.189	2.147	1.110	3.554	1.084	0.287	0.797
0.080	0.170	17.664	0.028	17.692	0.590	1.391	2.293	0.191	2.102	1.120	3.617	1.071	0.288	0.783
0.085	0.180	16.623	0.030	16.653	0.600	1.420	2.252	0.193	2.059	1.130	3.680	1.058	0.289	0.769
0.090	0.191	15.698	0.032	15.666	0.610	1.449	2.212	0.195	2.017	1.140	3.745	1.045	0.290	0.755
0.095	0.202	14.869	0.033	14.836	0.620	1.479	2.173	0.197	1.976	1.150	3.812	1.033	0.291	0.742
0.100	0.213	14.125	0.035	14.090	0.630	1.509	2.135	0.199	1.936	1.160	3.880	1.021	0.292	0.729
0.110	0.234	12.837	0.038	12.799	0.640	1.539	2.098	0.201	1.897	1.170	3.949	1.009	0.293	0.717
0.120	0.256	11.764	0.042	11.722	0.650	1.569	2.062	0.203	1.859	1.180	4.019	0.997	0.294	0.703
0.130	0.277	10.856	0.046	10.810	0.660	1.600	2.027	0.205	1.822	1.190	4.090	0.985	0.295	0.690
0.140	0.298	10.077	0.049	10.028	0.670	1.631	1.993	0.208	1.785	1.200	4.163	0.973	0.296	0.677
0.150	0.320	9.402	0.053	9.349	0.680	1.663	1.961	0.211	1.750	1.210	4.238	0.962	0.297	0.665
0.160	0.342	8.811	0.056	8.755	0.690	1.695	1.929	0.214	1.715	1.220	4.314	0.951	0.298	0.653
0.170	0.364	8.289	0.060	8.229	0.700	1.727	1.898	0.217	1.681	1.230	4.392	0.940	0.299	0.641
0.180	0.385	7.825	0.064	7.761	0.710	1.760	1.868	0.220	1.648	1.240	4.472	0.930	0.300	0.630
0.190	0.407	7.410	0.067	7.343	0.720	1.793	1.838	0.223	1.615	1.250	4.553	0.919	0.301	0.618
0.200	0.429	7.036	0.069	6.967	0.730	1.827	1.809	0.225	1.584	1.260	4.636	0.908	0.302	0.606
0.210	0.450	6.704	0.073	6.631	0.740	1.861	1.781	0.227	1.554	1.270	4.721	0.898	0.302	0.596
0.220	0.471	6.389	0.077	6.312	0.750	1.895	1.754	0.229	1.525	1.280	4.808	0.888	0.302	0.586
0.230	0.492	6.108	0.080	6.028	0.760	1.930	1.728	0.232	1.496	1.290	4.897	0.878	0.302	0.576
0.240	0.515	5.853	0.084	5.769	0.770	1.965	1.702	0.234	1.468	1.300	4.988	0.868	0.301	0.567
0.250	0.538	5.613	0.087	5.526	0.780	2.001	1.677	0.237	1.440	1.310	5.081	0.858	0.301	0.557
0.260	0.561	5.378	0.091	5.287	0.790	2.037	1.652	0.239	1.413	1.320	5.176	0.848	0.301	0.547
0.270	0.584	5.194	0.094	5.100	0.800	2.074	1.628	0.241	1.387	1.330	5.273	0.838	0.300	0.538
0.280	0.607	5.001	0.097	4.904	0.810	2.112	1.605	0.243	1.362	1.340	5.372	0.829	0.300	0.529
0.290	0.630	4.826	0.101	4.725	0.820	2.150	1.582	0.245	1.337	1.350	5.473	0.820	0.301	0.519
0.300	0.653	4.661	0.104	4.557	0.830	2.188	1.559	0.247	1.312	1.360	5.576	0.811	0.301	0.510
0.310	0.676	4.507	0.107	4.400	0.840	2.226	1.537	0.249	1.288	1.370	5.682	0.802	0.301	0.501
0.320	0.699	4.363	0.110	4.253	0.850	2.266	1.516	0.251	1.265	1.380	5.791	0.793	0.301	0.492
0.330	0.722	4.227	0.113	4.114	0.860	2.306	1.495	0.253	1.242	1.390	5.903	0.784	0.301	0.483
0.340	0.745	4.099	0.116	3.983	0.870	2.347	1.474	0.255	1.219	1.400	6.018	0.775	0.301	0.474
0.350	0.769	3.979	0.120	3.859	0.880	2.388	1.454	0.256	1.198	1.410	6.135	0.766	0.300	0.466
0.360	0.793	3.865	0.123	3.742	0.890	2.430	1.434	0.258	1.176	1.420	6.255	0.758	0.300	0.458
0.370	0.817	3.757	0.127	3.630	0.900	2.473	1.415	0.260	1.155	1.430	6.378	0.749	0.300	0.449
0.380	0.841	3.655	0.130	3.525	0.910	2.516	1.396	0.262	1.134	1.440	6.503	0.741	0.300	0.441
0.390	0.865	3.557	0.133	3.424	0.920	2.560	1.378	0.263	1.115	1.450	6.631	0.733	0.300	0.433
0.400	0.890	3.465	0.136	3.329	0.930	2.605	1.360	0.265	1.095	1.460	6.763	0.725	0.300	0.425
0.410	0.915	3.377	0.139	3.238	0.940	2.650	1.342	0.267	1.075	1.470	6.898	0.717	0.300	0.417
0.420	0.940	3.293	0.142	3.151	0.950	2.696	1.324	0.268	1.056	1.480	7.038	0.709	0.300	0.409
0.430	0.965	3.213	0.145	3.068	0.960	2.743	1.307	0.269	1.038	1.490	7.181	0.701	0.299	0.402
0.440	0.990	3.137	0.148	2.989	0.970	2.791	1.290	0.271	1.019	1.500	7.327	0.693	0.298	0.395

として、所要の値を求めることができる。著者らは  $1/k$  に対する  $C_s$ 、さらに  $A_1, A_2, C_1$  の値を計算し、これらを表-1としてとりまとめて、すぐに必要な常数を決定できるようにした。

3. 実際資料に対する  $\bar{x}, \sigma_x, C_s$  の決定とその考察

Hazen はアメリカにおける多数の洪水記録を調べて<sup>2)</sup>、 $\bar{x}$  および  $\sigma_x$  の値が統計年数  $n$  の大きさによつてあまり変化しないことを実証し、 $C_s$  に至つては妥当な補正を施すことによつてかなり正確な値を予知できることを指摘した。また著者らは多数の年最大日雨量および年最大洪水流量を調べて、特定の場合を除くと  $\bar{x}$  および  $\sigma_x$  が  $n$  により有意な差のないこと、すなわち定常性を仮定できることを確かめ、さらに  $C_s$  に妥当な修正を施すことによりかなりの精度がえられることを知つた。こうした事実により、実際資料に対する  $\bar{x}, \sigma_x$  および  $C_s$  の決定をつぎのようにすることを提唱する。すなわち、 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  を実際資料として、

1. 平均値は  $\bar{x} = \sum x_i / n$  によつて定める。

2. 標準偏差：分散  $\sigma_x^2$  は不偏推定量であるから、 $\sigma_x^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)$  となる。標準偏差  $\sigma_x$  は厳密には不偏推定量とはならないが、 $\sigma_x = \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)}$  としてさしつかえない。

3. ヒズミ係数は  $C_s = C_{s1}(1 + F_s)$  によつて補正する。ここに  $C_s$  は調整せられたヒズミ係数、 $C_{s1}$  は計算せられたヒズミ係数、 $F_s$  は修正係数である。 $F_s$  の推定方法として、Hazen<sup>2)</sup> は  $F_s = 8.5/n$ 、Foster<sup>3)</sup> は  $F_s = 6.0/n$  を用いたが、これらはアメリカの洪水記録に基づく経験公式であつて、そのままが国の洪水記録に適用しがたいことはいうまでもない。また Fisher<sup>4)</sup> は  $C_s$  を不偏推定値と同様に取り扱い、

$$C_s = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{\sigma_x^3} = \frac{n}{n-2} C_{s1} = (1 + F_s) C_{s1}, \quad \therefore F_s = \frac{2}{n-2}$$

としたが、この修正係数は一般に極めて小さく、 $n > 3$  ならば常に Hazen や Foster の修正係数より小である。

著者らが積率理論を用いて考察した結果は、つぎのようである。すなわち、対数正規分布を示す (2) 式において、 $x$  と  $\xi$  との関係を求めるために平均値を考えると、

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x_0 - b)e^{\xi/k} + b, \\ \bar{x}^2 &= (x_0 - b)^2 e^{2\xi/k} + 2b(x_0 - b)e^{\xi/k} + b^2, \\ \bar{x}^3 &= (x_0 - b)^3 e^{3\xi/k} + 3b(x_0 - b)^2 e^{2\xi/k} + 3b^2(x_0 - b)e^{\xi/k} + b^3, \\ \bar{x}^2 &= (x_0 - b)^2 (e^{\xi/k})^2 + 2b(x_0 - b)e^{\xi/k} + b^2, \end{aligned}$$

ここに、 $e^{\xi/k} = \sum e^{\xi/k} / n$ ,  $e^{2\xi/k} = \sum e^{2\xi/k} / n$ ,  $e^{3\xi/k} = \sum e^{3\xi/k} / n$ ,

となる。そこで前と同様にして  $x$  の平均値  $\bar{x}$  のまわりの1次ないし3次の積率  $\mu_1', \mu_2', \mu_3'$  を求めると、これらを用いて  $x$  と  $\xi$  との間関係におけるヒズミ係数  $C_s'$  はつぎのように表わされる。

$$C_s' = \frac{\{e^{3\xi/k} - 3e^{2\xi/k} \cdot e^{\xi/k} + 2(e^{\xi/k})^3\}}{\{e^{2\xi/k} - (e^{\xi/k})^2\}^{3/2}} \dots \dots \dots (10)$$

この式で  $C_s'$  は  $1/k$  と  $\xi$  のみの関数であることがわかる。一方、 $1/k$  を定めると、理論的な対数正規分布のヒズミ係数  $C_s$  は (5) 式、従つて表-1から求められる。つぎに  $\xi$  の決定は順序統計学の Plotting position によればよいが、 $1/k$  を固定すると  $C_s'$  は  $\xi$  のみの関数として (10) 式から求めるから、 $n$  の値に対応する  $C_s'$  と  $1/k$  に対する理論上の  $C_s$  との一致度を調べると、Plotting position を批判する一手段ともなるわけである。このことについては、別の機会に詳述するが、ここでは最適と考えられる Hazen の Plotting position によつて、 $1/k$  の値に対する  $F_s$  の値を

$$C_s = C_s'(1 + F_s), \quad \therefore F_s = (C_s / C_s') - 1$$

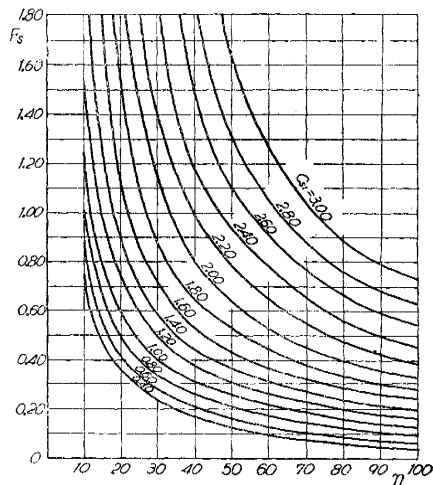
より  $n$  の関数として計算し、図-2 のように作図して、図式的に  $F_s$  を求めるようにした。すなわち、与えられた資料からヒズミ係数  $C_{s1}$  を  $C_{s1} = \sum (x_i - \bar{x})^3 / \{(n-1)\sigma_x^3\}$  として計算し、その  $C_{s1}$  と  $n$  の値に対応する  $F_s$  を図-2 からよみとつて、 $C_s = C_{s1}(1 + F_s)$  として調整せられたヒズミ係数  $C_s$  を推定し、これを母集団のヒズミ係数と仮定して解析を進めることにしたのである。

4. 実際資料に対する適用

以上の新解法に対する実際の適用結果を示し、今までの方法と比較したのが表-2である。このうち 1~7 は年最大日雨量

図-2 ヒズミ係数に対する修正係数

Fig.2 Correction factors for the coefficient of skew



(mm), 8および9は年最大洪水流量 (m<sup>3</sup>/sec) の系列であるが, 以下に計算例として3の場合を示す。

**計算例** 大河内年最大日雨量系列 (統計年数  $n=42$ ) において,  $\bar{x}=129.7$ ,  $\sigma_x=50.7$ ,  $C_{s1}=0.815$  であつた。従つて図-2より,  $C_{s1}=0.815$  に対して  $F_s=0.255$  を得たので,  $C_s=C_{s1}(1+F_s)=1.023$  となつた。そこで表-1より  $C_s=1.023$  に対して,  $1/k=0.453$ ,  $A_1=3.041$ ,  $C_1=2.890$ ,  $-A_2=0.152$  が求められ, これらを用いて必要な常数を計算すると,

$$\begin{aligned} 1/\alpha &= 0.4343/k = 0.1967, & b &= \bar{x} - A_1\sigma_x = -24.5, \\ \sigma_0 &= \bar{x} + A_2\sigma_x = 122.0, & X_0 &= \log C_1\sigma_x = 2.1658 \end{aligned}$$

となり, 理論直線はつぎのようになった。

$$\log(x+24.5) = 0.1967\xi + 2.1658.$$

従つて 50 年確率日雨量では, 超過確率  $F=1/50$ ,  $\xi=1.4520$  ∴  $x_{50}=253.3$  mm となり, 100 年確率日雨量では同様に  $F=1/100$ ,  $\xi=1.6450$ , ∴  $x_{100}=284.1$  mm となつた。

**5. 検 定**

推定した分布函数については, 実際の資料によく適合しているかどうかを検定しなければならない。實際上, 観測資料は数も限られているから, 推定した理論値と完全に一致することはなく, 観測値が理論値 (対数確率紙上では直線にプロットされる) のまわりに散らばるのは当然である。このずれの許容限界としては, 角屋氏の変動域理論<sup>5)</sup>を採用することとして, それによつて支配曲線を定めたが, 1例として大河内年最大日雨量の系列について示したのが 図-3 である。前節で確率計算を行つた実際の資料すべてに適合度を調べたが, 大谷の最小値のみを除いて, すべて支配曲線内にプロットすることができ, 適合度が良好であることがわかつた。なお, 図-3 の縦軸 (C.D.F.) は  $r/n$  であつて,  $r$  は実際の資料を大きさの順序に並べたときの小さい方から数えた順番である。

**6. 対数正規分布と Gumbel 分布との関係**

Gumbel 分布は,

$$\begin{aligned} F(x) &= \exp(-e^{-\xi}), & f(x) &= \alpha \exp(-\xi - e^{-\xi}), \\ \xi &= \alpha(x - x_0) \end{aligned}$$

のごとく表わされるが, ここに  $F(x)$  は累積分布函数,  $f(x)$  は密度函数,  $\alpha, x_0$  は常数である。この分布の特性値を示すと<sup>6)</sup>,

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= 0.5772/\alpha + x_0, & \sigma_x &= 1.2825/\alpha, \\ C_v &= 1.2825/(0.5772 + \alpha x_0), & C_s &= 1.1395, & C_k &= 5.4000 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

となり,  $C_s$  および  $C_k$  は一定値であるが,  $C_v$  は種々の値をとることができる。今, 対数正規分布と比較するために, 対数正規分布で  $C_s=1.1395$  の場合を考える,

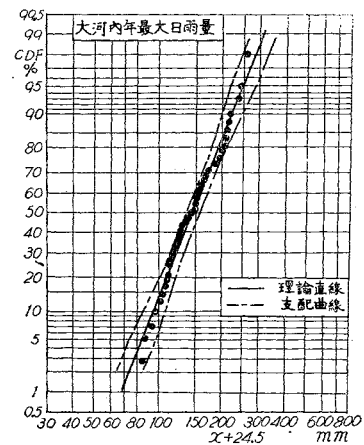
$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= e^m e^{1/4k^2} + b = 1.064 e^m + b = 1.064 x_0 - 0.064 b, \\ \sigma_x &= e^m (e^{1/k^2} - e^{1/2k^2})^{1/2} = 0.387 e^m = 0.387 (x_0 - b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

となる。(11) 式にて未知数は  $\alpha, x_0$  の二つであるから,  $\bar{x}$  および  $\sigma_x$  を任意に定めることができる。これに対し (12) 式においても  $\bar{x}$  および  $\sigma_x$  を任意に選ぶことができるから, 結局  $C_s=1.1395$  に対しては, 両者の  $\bar{x}$ ,  $\sigma_x$  および  $C_s$  を等しくすることができるわけである。一方  $C_s=1.1395$  に対する対数正規分布の  $C_k$  を (6) 式から求めると  $C_k=5.4000$  になることから, 対数正規分布の  $C_s=1.1395$  の場合と Gumbel 分布とは, 4次まで

表-2 実際資料に対する適用結果 (50年確率計算値)  
Table 2 Results of application (Calculated values of 50 years probability)

観測地点	岩井法	順序統計学			著者の方法
		対数正規分布		Gumbel分布	
		Plotting position			
		Hazen 法	Thomas 法	Thomas 法	
1. 伊賀上野	233.1	239.9	255.5	226.7	227.8
2. 五城目町	156.0	151.1	158.0	158.6	149.7
3. 大河内	258.5	263.0	276.9	276.4	258.3
4. 大谷	245.7	283.2	296.3	265.0	247.2
5. 石徹白	228.9	239.2	249.9	247.4	227.8
6. 大野	199.5	226.4	238.7	220.6	208.1
7. 九頭龍川流域平均	224.1	195.6	207.4	212.3	191.2
8. 宮川	4700	4900	5600	4600	4900
9. Merrimack R.	2460	2490	2580	2580	2450

図-3 適合度検定の1例  
Fig.3 One example of the inspection of conformity.



の積率を等しくすることができるので、実用上は近似的に Gumbel 分布が対数正規分布の特殊な場合であるとみてさしつかえない。このことは、Ven Te Chow が Frequency factor  $k$  を用いて解析し<sup>7)</sup>、その  $k$  が対数正規分布の  $C_0=1.1395$ ,  $C_0=0.364$  (彼は  $b=0$  のときを取り扱っている) の場合 Gumbel 分布の  $k$  の値と近似していることから、Gumbel 分布が近似的に対数正規分布の特殊な場合であると提唱した理論の妥当性を、積率理論によつて根拠づけることができたといえよう。

いま、大河内年最大日雨量の系列について考察するに、

$$\bar{x}=129.7 \text{ mm}, \quad \sigma_x=50.7 \text{ mm}$$

であつたから、これらを (11), (12) 式に入れて各常数を定めるとつぎのようになる。

$$F(x)=\exp(-e^{-\xi}), \quad f(x)=0.02530 \exp(-\xi-e^{-\xi}), \quad \xi=0.02530(x-106.9) \dots\dots(13)$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi, \quad f(x)=\frac{1.1322 e^{-\xi^2}}{x+9.6}, \quad \xi=1.1474[\log(x+9.6)-2.1173] \dots(14)$$

図-4 はこれらの式から求めた継続曲線  $F(x)$  および密度曲線  $f(x)$  を図示したものであるが、(13) 式の Gumbel 分布と (14) 式の対数正規分布とがほとんど一致し、両者の区別がつかないほどであることがわかる。

6. 結 言

最も適用性の広い、上限 $\infty$ で下限常数  $b$  を有する対数正規分布について、3 次までの積率を用いる新解法を提案し、実際の資料に適用した結果は表-2 のようになって、岩井法と類似した値が多く算出せられた。この場合、下限値  $b$  を (9) 式から求めると負になつたものが多かつたが、この  $b$  を Gumbel 分布のように分布曲線に適合させるための係数と考えると、 $b$  の値が負になつてもさしつかえないであろう。このことは観測値  $x=0$  でもある確率をもつことになるが、実際の資料に適用した結果、その確率は極めて小さく、いずれも 0.01% (生起年: 10,000 年) 以下であつた。

以上述べたわれわれの積率法による新解法は、従来のものより計算が非常に簡単であつて実用的であると確信する。なお、積率理論によつて、Gumbel 分布が対数正規分布の特殊な場合であることを証明したが、これは Ven Te Chow が Frequency factor を用いて指摘した結果と一致するものである。

最後に本研究に対し貴重な示唆を与えられた京大岩井教授および大阪府大角屋講師に謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 岩井重久: Slade 型分布の非対称性の吟味及びその 2,3 の解法, 土木学会論文集, 4, 昭.24, pp. 84-104.
- 2) A. Hazen: Flood Flows, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1930.
- 3) H. A. Foster: Theoretical Frequency Curves and their Application to Engineering Problems, Trans. ASCE., Vol. 87, 1924, pp. 192-203.
- 4) R.A. Fisher: Statistical Method for Research Workers, 10th Edition, 1948, Sec. 14.
- 5) 角屋 睦: 計画洪水量に関する順序統計学的考察, 農業土木研究, 21巻3号, 昭.28.9, pp. 188-195.
- 6) 角屋 睦: 極値分布とその一解法, 農業土木研究, 23巻6号, 昭.31.3, pp. 28-35.
- 7) Ven Te Chow: The Log-Probability Law and its Engineering Applications, Proc. ASCE, Vol. 80, Sep. No. 536, 1955
- 8) Shigehisa Iwai: Discussion of "The Log-Probability Law and its Engineering Applications", Proc. ASCE, Vol. 81, Sep. No. 709, 1956.

(昭.32.1.17)

図-4 Gumbel 分布と対数正規分布との比較図  
Fig. 4 Graphs comparing the Gumbel distribution and the logarithmic-normal distribution

