

# 吊橋の耐風安定性について

正員 平井 敦\*

Aerodynamic Stability of Suspension Bridge under Wind Action.

(Trans. JSCE, No. 47, Aug. 1957)

Dr. of Engng., Atsushi Hirai, C.E. Member

**Synopsis:** The present paper deals with the forced oscillation of the suspension bridge due to an alternating aerodynamic force and shows the resonance diagram or dynamic magnifier as a function of frequency and wind velocity. The formula for critical wind velocity is also given short and clear.

**要旨** 吊橋の耐風安定性については、いわゆる Kármán 渦の作用にのみ注意が向けられがちであるが、風圧の作用を更に詳しく調べると風を受ける吊橋には一つの理論的限界風速が存在することを示し、次に現在の研究段階における吊橋補剛桁断面の撰定方針にふれたものである。

## 1. 序 言

Tacoma Narrows 橋の落橋以来この種の問題が橋梁工学上の大きな研究項目となり種々な研究結果が示された。しかし吊橋設計の実際面からみれば吊橋の限界風速を推定する最良の方法は風洞による吊橋全径間模型実験であるとされている。更に Farquharson 教授は全径間模型の代りに補剛桁断面をバネで支持したいわゆる部分模型による風洞実験により限界風速が求められることを報告したが、吊橋設計に必要な算式等は与えていない。

筆者は風圧の作用を従来よりは異なつた面にまで調べ、更に Kármán 渦による力を簡単な三角函数で表示し、吊橋には理論的限界風速が存在することを導いた。この小論を約2年前英文で土木学会に投稿したが印刷に至らないうちに、最近外国で一部分印刷公表されたので<sup>1),2)</sup>、今回英文原稿をとりやめてその代りにその概要及びまだ印刷されない部分を主としてここに記することにする。

## 2. 吊橋の限界風速及び共鳴曲面

吊橋補剛桁に作用する流体力学的攪乱力の振動数を  $\omega$  としその大きさを時間  $t$  に対し  $T_k \sin \omega t$  と考えると吊橋のネジレ強制振動の式は近似的に次式で与えられる。但し風は水平方向で且つ橋軸に対して直角とする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta}{l} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C \frac{d \varphi}{dt} + K \varphi = T_k \sin \omega t \\ \text{但し, } K = \left[ \frac{GK \cdot \lambda^2 - \mu^2}{EJ} - S_t \rho b^2 \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

$l$  ……吊橋の支間

$f$  ……ケーブルの垂距

$b$  ……左右の主ケーブルの間隔または補剛桁の幅

$\varphi$  ……補剛桁のネジレ角で、水平風に対しては迎角に等しい

$\theta/l$  ……補剛桁の単位長当りの質量慣性モーメント

$2m$  ……吊橋の単位長当りの死荷重

$H$  ……死荷重に基づく片側主ケーブルの水平張力;  $H = ml^2/8f$

$EI$  ……補剛桁のタワミ剛性

$GK$  ……補剛桁のネジレ剛性

$EJ$  ……吊橋の換算タワミ剛性。中央一節点の振動に対しては次式が成立する。

$$EJ = EI + \frac{l^2}{2\pi^2} H \dots \dots \dots (2)$$

$GK$  ……吊橋の換算ネジレ剛性。中央一節点を対象とすると、

$$\underline{GK} = GK + \frac{\pi^2 b^2}{l^2} EJ \dots \dots \dots (3)$$

\* 工学博士、東京大学教授

$V$ ……風速

$\rho$ ……空気密度

$p$ ……動圧;  $p = (1/2)\rho V^2$

$C_d$ ……補剛桁の抵抗係数

$S_t$ ……補剛桁の流体力学的係数の迎角零の点の傾斜

$S$ ……補剛体の揚力係数の迎角の零の点の傾斜

$\mu$ ……流体力学的係数に関係ある係数で、中央一節点の振動に対しては;

$$\mu^2 = 1 + \frac{\sqrt{128}}{4\pi^2} \frac{s}{C_d} \dots\dots\dots (4)$$

$\lambda$ …… $\lambda = 2\pi/l$

$C$ ……ダンピング係数

$\mathfrak{R}$ ……風圧に関する項

$$\mathfrak{R} = \frac{C_d b b l^2}{\sqrt{128}} \dots\dots\dots (5)$$

(1) 式を導くに当つては、補剛桁のネジレ角の橋軸方向 ( $Z$  軸方向) の変化を  $\sin(2\pi/l)Z$  と考えている。又 Kármán 渦及び他の原因による流体力学的攪乱力として  $T_k \sin \omega t$  と仮定したが、 $T_k$  自体についての資料は現状においては皆無である。現在筆者は中央大学教授、林泰三工博及び東大大学院、工学修士島田静雄等と主として Kármán 渦に関する研究を行つている途中である。しかしながら  $T_k$  自体に関する資料の欠は次のごとく「振動の動的増幅率」を求めることによりある程度補われる。(1) 式より求められる動的増幅率  $\mathfrak{S}$  は攪乱力の振動数  $\omega$  と風速  $V$  との函数であつて結局次式で示される。

$$\mathfrak{S}(\omega, V) = \frac{1}{\sqrt{(1 - Y^2 - \bar{A}X - \bar{B}X^2)^2 + 4(C/\nu_0)^2 Y^2}} \dots\dots\dots (6)$$

但し、

$$X = \left( \frac{V}{\omega \varphi b} \right)^2, \quad Y = \frac{\omega}{\omega \varphi}$$

$$\bar{A} = \frac{S_t \rho b^2}{2\theta/l} b^2, \quad \bar{B} = \frac{(\mu C_d \rho b l^2)^2}{512 EJ(\theta/l)} \omega \varphi^2 b^4$$

$$\omega \varphi^2 = \frac{GK \cdot \lambda^2}{\theta/l} \quad (\text{無風時の固有ネジレ振動数})$$

$$\nu_0 = 2 \frac{\theta}{l} \omega \varphi \quad (\text{無風時の限界減衰係数})$$

減衰項を省略するとその場合の動的増幅率  $\mathfrak{S}_1$  は;

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{1 - Y^2 - \bar{A}X - \bar{B}X^2} \dots\dots\dots (7)$$

(6) 式より吊橋の共鳴曲面を描くことができ(後掲の図-3) 又その結果次の様な限界風速  $V_k$  が誘導されるが、その詳細は前記文献<sup>1), 2)</sup> 又は私の著書の鋼橋(Ⅲ)を参照されたい<sup>3)</sup>。

$$V_k^2 = \frac{4\pi\sqrt{128}\sqrt{EJ \cdot GK}}{\mu C_d \rho b l^3} \dots\dots\dots (8)$$

(8) 式は結果的には吊橋構造としての風圧によるいわゆるネジレ座屈 (Kippung) に相当する。吊橋構造の静的荷重によるネジレ座屈の現象の存在は筆者及び矢島基臣によつて一度実験的にも確かめられたが、更に現在筆者は中央大学竹間弘助教授及び東大大学院、工学修士倉西茂等とその研究を行つている。

吊橋の共鳴曲面の状態より高風速になると吊橋のネジレ振動の周期が長くなることが期待されるがこの点は Farquharson 教授の見解と相違する点である。この点を実験的に確かめる目的の下に大阪大学教授、安宅勝工博との協同研究を阪大の 3.5 米風洞を用いて行つたが長周期の振動が存在することが確かめられた<sup>4)</sup>。

理論的限界風速として (8) 式を示したがこれより低風速に危険な風速が存在しないとは言えないという点を一応指摘したい。組立柱の理論座屈値は一応 Euler 荷重として与えられるが、Euler 値は柱の局部的弱点(例えば竣工の弱い場合)による破壊までもカバーすることができないのと同様なことが存在するものと筆者は考えている。更に Kármán 渦の生態が明らかになれるならばこれと吊橋の共鳴曲面との関連性の問題が解かれるわけである。筆者が指摘したことがある様に<sup>3)</sup>、Farquharson 教授は主として Kármán 渦に注目しているわけであるが、同教授の実験は単に Strouhal 数を実験的に求めているのであつて、Kármán 渦自体の生態には殆んど触れてい

ない。この様な点から吊橋設計上、現状としては、(8)式に更に安全率を導入する措置が望ましい。

以上の議論においては擾乱力として  $T_k \sin \omega t$  を考えその結果動的増幅率として(6)式を得たが、周期的に連続した Dirac 函数で表示される力(図-1参照)を仮定すると共鳴曲面の峰が更に複雑なものとなる。この計算は筆者の指示の下に大学院学生岡内功及び伊藤学等が上として行つたものである。すなわち(1)式の代りに次式を取り上げる。



図 - 1

但し、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta}{l} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C \frac{d \varphi}{dt} + K \varphi &= D(t) \\ D(t) &= 0 \quad t \neq 0, \tau, 2\tau, \dots \\ &= \infty \quad t = 0, \tau, 2\tau, \dots \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{m\tau}^{m\tau + \Delta t} D(t) dt &= T_0 \quad (m=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

その結果、強制振動を表わす部分を取出すと；

$$\varphi(t) = \frac{T_0}{\omega \varphi^2 (\theta/l) \tau [1 - \bar{A}X - \bar{B}X^2]} + \frac{2 T_0}{\theta/l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \omega_f t + \phi_n)}{\sqrt{\tau^2 \omega \varphi^2 [1 - \bar{A}X - \bar{B}X^2 - n^2 Y^2]^2 + \left(\frac{2 \pi C_m}{\theta/l^2}\right)^2}} \dots \dots \dots (10)$$

但し、  $\omega_f = \frac{2\pi}{\tau}$  (擾乱力の振動数)

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{\omega \varphi^2 \theta/l}{n \omega_f C} [1 - \bar{A}X - \bar{B}X^2 - n^2 Y^2], \quad n=1, 2, 3, \dots$$

(10)式を基として動的増幅率  $\bar{\delta}$  を図示することができる。その共鳴曲面の山の尾根に相当する曲線を示すと図-2の傾向にある。一番外側の曲線は(6)式より得られるものである。なおこの外側の曲線は吊橋の自由ネジレ振動の安定論よりも導かれることを指摘したい。

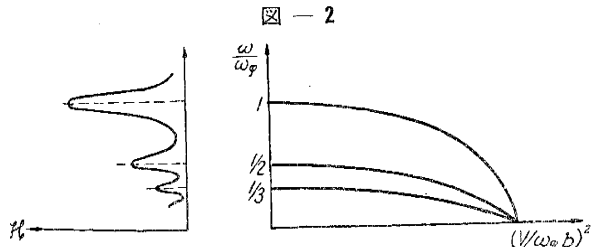


図 - 2

3. タワミとネジレの連成振動

擾乱外力を考えない場合、風を受ける吊橋のネジレとタワミの連成振動の安定性を考えると5つの条件が得られる。その内の主なものは次のごとくである<sup>3)</sup>。

①  $s' : s + C_d > 0$  (自励振動を誘起しないための条件).....(11)

② (8)式に相当する条件

③ 一般的にいえば、 $s_t < 0$ .....(12)

の方が好ましい。

更に擾乱力として  $T_k \sin \omega t$  型の力を仮定し、動的増幅率  $\bar{\delta}_2$  を算出すると<sup>1), 2)</sup>；

$$\bar{\delta}_2 = \frac{s' - eS_t}{s'} \frac{1}{(1 - Y^2 - \bar{B}X^2)} \dots \dots \dots (13)$$

但し、  $s' = s + C_d$   
e はある係数である。

(7)式の主要項は  $\bar{A}X$  を除いたものであるが、(11)式と比較すると(13)式には更に  $(s' - eS_t)/s'$  なる係数が乗ぜられている。(13)式の主要部分が(7)式と同じものであるということは、吊橋の安定性を支配する主役はネジレ振動であるということである。

(13)式の導入にはなお検討されるべき点が残されているが、 $(s' - eS_t)/s'$  なる係数に着目すると  $s_t > 0$  の方が動的増幅率の点からは好ましいということになる。擾乱力を考えない場合の条件  $s_t < 0$  をも考慮すると、

$$s_t = 0 \dots \dots \dots (14)$$

という断面形が一般的にいつて一応の撰定規準となる。

$s_i \neq 0$  の断面形を選定することが困難な場合には、(12) 式の関係の方が優先するものと筆者には考えられるので、流体力学的モーメント係数の傾斜をできるだけ小さくしつつ  $s_i < 0$  の性格のものを選定したい。しかしながら(12) 式の条件は一般的な関係であつて特別な場合には  $s_i > 0$  の条件となる場合もあり得ることを付言したい<sup>3)</sup>。  
 なお補剛桁断面のみをバネで支持したいいわゆる部分模型の研究を工学士岡内功等と現在行つているが、この関係は別の機会に譲りたい。

4. 吊橋補剛桁の断面の選定について

(6) 式により動的増幅率を  $(\omega/\omega_\phi)$  及び  $(V/\omega_\phi b)^2$  の函数として表示すると 図-3 又は 写真-1 の様な共鳴曲面が得られる。最高峰の点  $K$  が(8)式に相当するが、風速  $V$  の増加と共に共鳴振動数  $\omega$  が低下してくることがうかがわれる。一般に攪乱力による吊橋の共鳴をさけるためには、攪乱力そのものを吊橋に与える機会を少なくすることである。この意味において吊橋補剛桁の断面形としては可及的に Kármán 渦を生じないものが望ましい。渦の発生を皆無にするということは困難と思われるが、たとへ渦が発生するとしても力の小さなもの又は規則正しくないものである様な断面形を選定することが肝要となる。補剛桁を構成する各部分よりの渦が互に他の渦の規則性を乱す様にした。高振動数の小さな渦よりは低振動数の大渦を避けたい。

補剛桁の断面形の揚力曲線の傾斜が負のものは(11) 式が示す様に自動振動を誘起するので絶対に避けたい。このことは単に迎角  $\phi = 0$  の付近のみならず正及び負の迎角の相当の範囲にわたつて守られなければならない。特にプレート・ガーダー系統の補剛桁を採用する場合にこの点留意することが望ましい。又床部の吹上げを考えるとなるべくならば揚力のないものがよい。

補剛桁断面形の流体力学的モーメント係数の傾斜  $S_i$  についてはなるべくならば  $S_i \neq 0$  としたい。 $S_i > 0$  の場合には個々の場合につき、関連する各条件式を吟味する必要がある。

補剛桁断面形の抵抗係数は小なるものが望ましいが(4) 式の関係をも考慮しなければならない。又渦が発生したすと抵抗係数が増大する傾向にある。

以上主として補剛桁の断面形について述べたが吊橋として安定であるためには(8) 式の条件を満たさなければならない。吊橋の設計上はこれに安全率  $\nu$  を入れた次式を筆者は現在使用している。

$$V_k^2 = \frac{120}{\nu} \times \frac{\sqrt{EJ \cdot GK}}{\mu C_{d0} b l^3} \dots\dots\dots(15)$$

この式は吊橋に対しある剛性を要求するもので、吊橋の死荷重もその他の要素と共に吊橋の安定性に関与することを語る。

吊橋補剛桁の流体力学的諸係数は 写真-2 又は 写真-3 の様な模型によつて風洞を用いて測定される。図-4 は平板系の係数であるが、右側の図のごとく平板に開孔部を設けると揚力係数及び流体力学的モーメント係数の傾斜が著しく緩になる。左図では迎角  $8^\circ$  以上で負の傾斜で存在するが開孔された平板ではこの様

図-3 吊橋の共鳴曲面

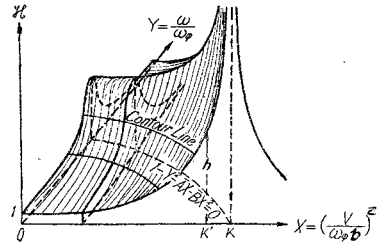


写真-1

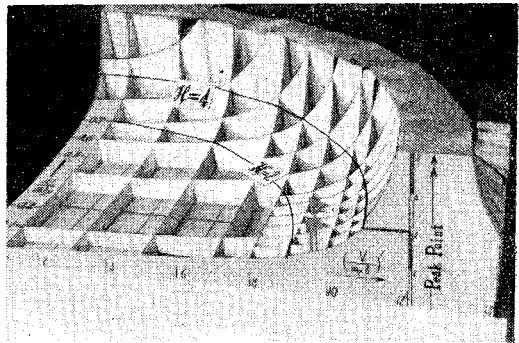


写真-2 上路型補剛桁（開床部を有するトラス）

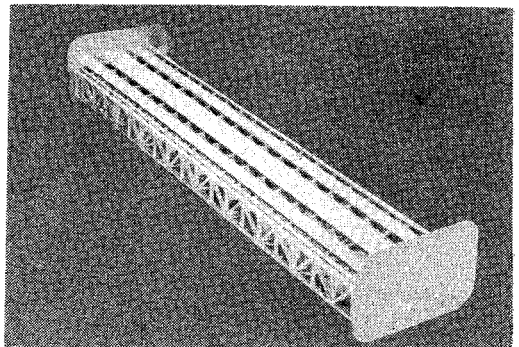


写真-3 中路型補剛桁（開床部を有するトラス）

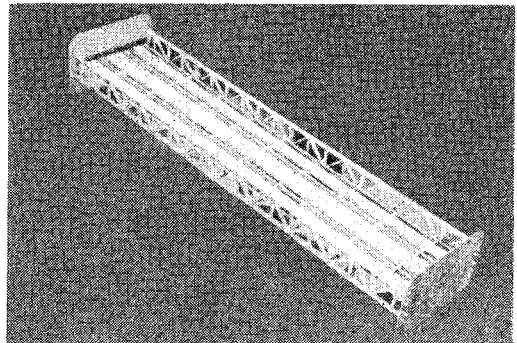


図-4 平板系の流体力学的係数

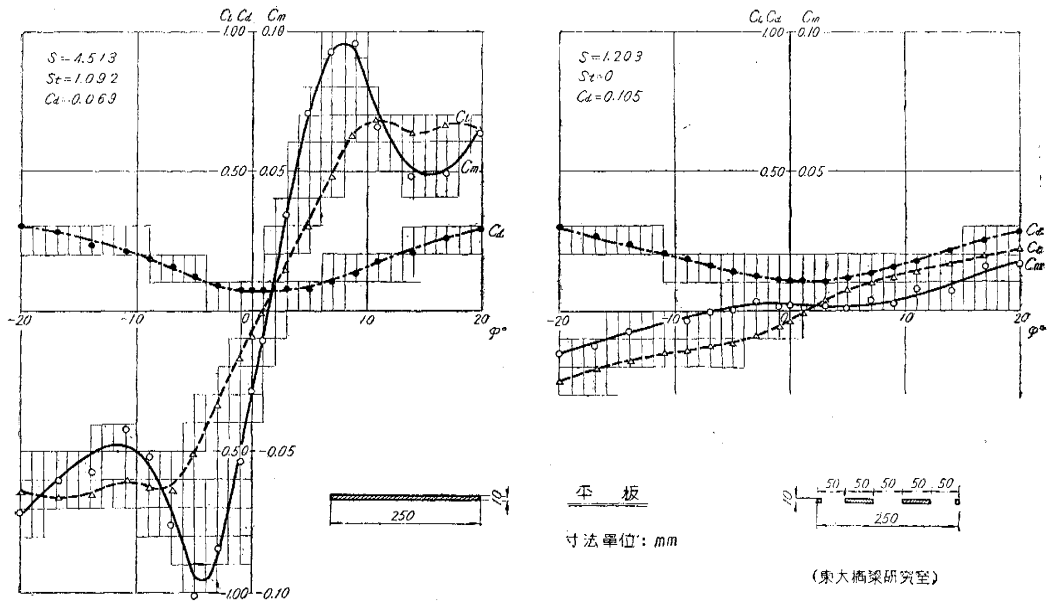
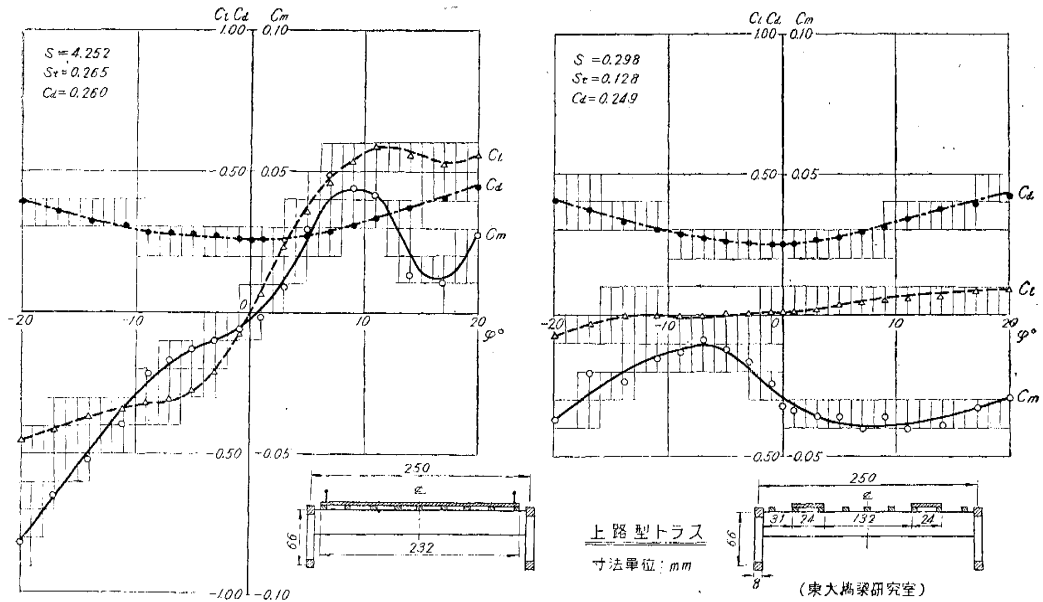


図-5 上路型トラスの流体力学的係数



な部分が図の範囲に存在しない。

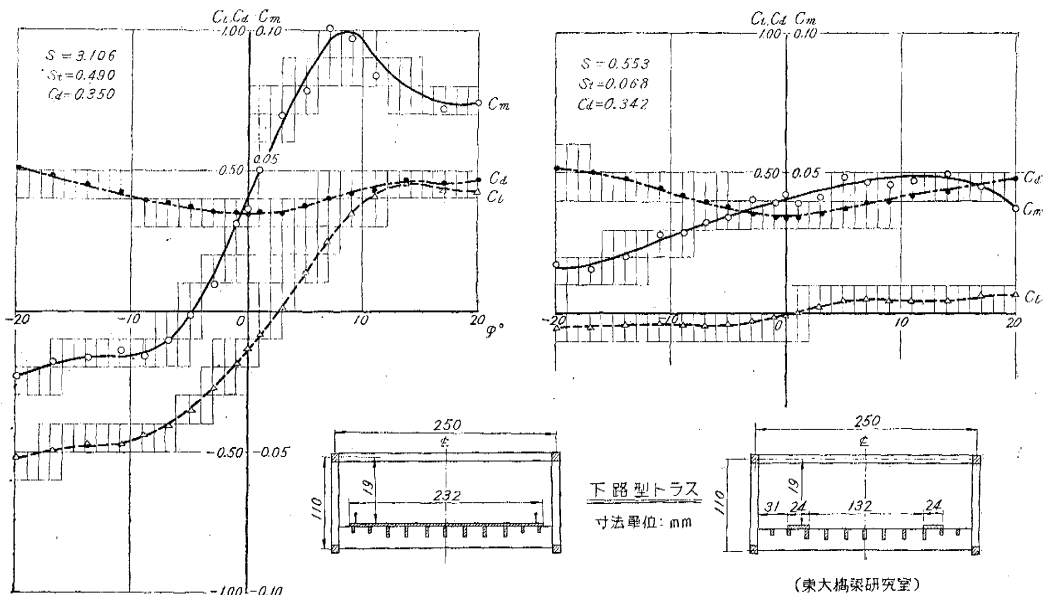
図-5 は上路型トラスの係数の一例で、左図は閉床型（但し弦材と床部との間には空隙を存置）右図は開床型である。閉床型では  $s > 0$ 、 $s_t > 0$  でその傾斜は図-4の完全平板よりは小ではあるが相当大であるのに対し、開床型では  $s > 0$ 、 $s_t < 0$  でその傾斜はかなり小である。

図-6 は下路型トラスの場合で開床型では  $s > 0$ 、 $s_t > 0$  とこの場合はなっている。

図-7 は中路型トラスの一例であるが、開床型では  $s \neq 0$ 、 $s_t \neq 0$  の状態に近づいている。このような図を比較すると一応中路型の開床構造のものが、この場合には、一番優れている様に見受けられる。実際の吊橋では床部の中間の開孔部は網目構造とするのであるが、更にその効果をも実測しなければならない。

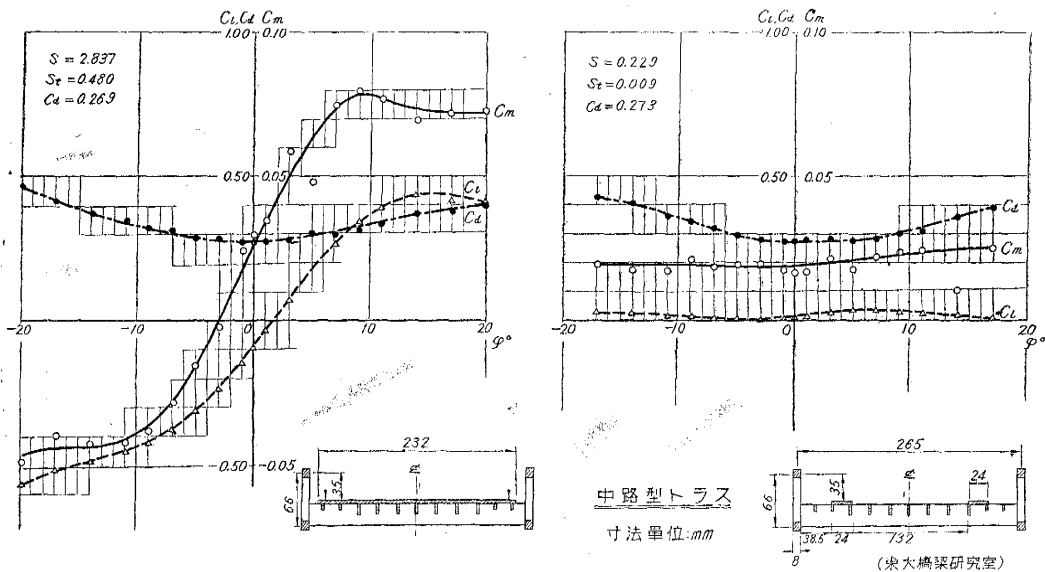
一般に補剛桁をトラスで構成する場合には、床部と弦材との関連性に配慮することが必要である。図-5の弦材と床部との間にはある程度のスキマを設けることが必要の様である。

図-6



(東大橋梁研究室)

図-7



(東大橋梁研究室)

### 5. 結 語

最初にお断り致した様に英文原稿を取りやめているうちに外国での公表が先になつてしまつたため、概要程度にしたことをお断りしたい。従つて意味不明瞭の点については前記<sup>1), 2), 3)</sup>報告をも参照されたい。この方面の研究はその第一歩をふみ出したばかりで、現在筆者及び協同研究者等はなお研究を続行中である。

### 参 考 文 献

- 1) A. Hirai, Aerodynamische Stabilität von Hängebrücken unter Windbelastung. Bauingenieur, 1956 Heft 11, S. 402~408
- 2) A. Hirai, Aerodynamic Stability of Suspension Bridges under Wind Action. Preliminary Publications for the 5th International Congress for Bridge and Structural Engineering at Lisbon (1956) P. 213~P. 239
- 3) 平井敦, 鋼橋Ⅲ (技報堂)
- 4) この研究の一部分は昭和 25 年~28 年度にわたる文部省科学試験研究によつて行われた。(詳細についてわたくしの著書鋼橋Ⅲ参照) (昭.30.10.22)