

対数正規分布に関する順序統計学的考察

准員 高 瀬 信 忠*

Order-Statistic Consideration on Logarithmic-Normal Distribution

(Trans. JSCE, No. 47, Aug. 1957)

By Nobutada Takase, C.E. Assoc. Member.

Synopsis: Recently, order-statistic and stochastic treatments of hydrologic quantities became popular. Although order-statistics has a very extensive application, it has been neither investigated sufficiently, nor introduced widely to our engineering field. In this paper, the author studied order-statistically the logarithmic-normal distribution in the form of its general representation as the cumulative distribution functions of the hydrologic data, from the standpoint of river-projects. Furthermore, several tabulations were prepared, in order to facilitate rapid computation for the practical estimation on such problems.

要旨 われわれが常に直面する水文諸量解析の裏付けとなる水文統計学は、近年著しく発展し、継続曲線その他を統計的に推定できるようになった。最近では順序統計学的、さらに推計学的な取扱いが普及しており、特に順序統計学は極めて広い適用性があるのかかわらず、わが国では未だ十分な紹介や研究が行われていない。そこで本文では、水文諸量の分布函数として最も広く経験的に用いられている対数正規分布について、水工計画の立場から順序統計学的な考察を加え、かつ、その計算を非常に簡単にするための実用的数表を作製し提示することにしたのである。

1. 概 説

順序統計学は標本をその数値の大きさの順に並べて観察する学問で、いわば順序統計量に関する統計推理論である。この学問が発達する以前から、標本を順序だてて考察することもあつたので、この種の理論は古くから無意識のうちに原始的な形で利用されていたともいえる。

順序統計学では、多くの学者が任意の順序統計量の極限分布や極値の極限分布を研究していたが、これを始めて数学的に解析したのは Fisher-Tippett¹⁾であつて、三つの場合があることを明らかにした。その I 型は、Gumbel が始めて洪水流量に適用し、Gumbel 分布と呼称した。II 型および III 型については、角屋氏が対数極値分布と名付けて、最大降雨量の分布函数として解析している^{2), 3)}。

正規分布は順序統計学の基礎式をある一定条件の下で解いて中間値の分布として導くことができるが、順序統計学的にみた水文諸量の形は、(1) Gumbel 分布、(2) 対数正規分布、(3) 対数極値分布の三つに大別できるように思われる。本文では、水文諸量の分布函数として最もよく用いられている対数正規分布について、実地的見地から順序統計学的な考察を加えることにした。

2. 順序統計量の基礎式と対数正規分布

いま、 $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ を確率素分 $f(x)dx$ をもつ母集団からとつた大きさ n なる一つの標本とし、 $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ は小さいものから大きさの順に並べたものとする、小さい方から r 番目の値 x_r の確率素分 dp_r は⁴⁾、

$$dp_r = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n-r+1)} [F(x_r)]^{r-1} [1-F(x_r)]^{n-r} f(x_r) dx_r, \dots \dots \dots (1)$$

ここに $F(x_r) = \int_{-\infty}^{x_r} f(x_r) dx_r$ であつて、(1) 式が順序統計量の基礎式である。

最も広く用いられている対数正規分布そのものの解法と応用については、岩井教授が深く研究し、一般化されてきたが、最近われわれは積率法による新解法を提示して実用上その適用を容易ならしめることができた。ここではこの分布が順序統計学的にも統計処理の有力な手段であることを強調しておきたい。

対数正規分布の基本型としては、図—1 のような四つの型をあげることができ、最も一般的なものは III 型であるが、下限値 b と上限値 g の合理的決定が困難であり、ことに g の決定がむづかしい。従つて最初は最も簡単な

* 建設技官、宮崎工事事務所 (元京都大学助手、工学部土木工学教室)

II型について考察し、あとで他の型についてもふれてみることにする。

さて、II型の基礎式は

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi, \dots\dots\dots (2)$$

であるが、これが正規分布であることから、つぎのようにあらわして実用に便利にしている。

$$F(x) = \frac{1}{2} \{1 + \Phi(\xi)\}, \dots\dots\dots (3)$$

$$\xi = \alpha(X \cdot A) - \alpha(\log x - \log a), \dots\dots\dots (4)$$

ここに、

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi, \quad \alpha, \quad A (= \log a) : \text{常数}$$

この解法に際しては、Plotting position により正規化して確率紙上に資料をプロットし、これらに適合する1本の理論直線を引いて、各観測点とその直線に集中しておれば適合度がよいとするのである。この理論直線の推定には、後に述べるように最小自乗法かまたは積率法が用いられるが、計算や解析の便宜上からは後者の方が好都合である。しかし、この両者のいずれによつても、計算値には大差がない。

3. Plotting position

各観測値のもつている確率を知ることが必要であるが、このためには確率論的に考察して得た理論上の反覆生起区間と実際資料を確率紙にプロットしたときの反覆生起区間とを比較検討しなければならない。

(1) Hazen plot (略算法)⁵⁾ これは Hazen によつて実用化せられ、古くから用いられてきたものである。その理論的根拠を考えると、任意の順序統計量 x_r そのものの生起確率は見掛け上 $1/n$ となり、これをヒストグラムで示すと、図-2 のように横軸上の $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r, \dots$ を丁度中点としてはさむような x の連続微小区間上にそれぞれ $1/n$ ずつの面積をもつたク形をつくつたものとなる。すなわち、 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r, \dots$ は各微小区間の代表値である中点として考えられる。従つて $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r, \dots$ に対する左側の密度曲線の面積は、それぞれ $1/2n, 3/2n, 5/2n, \dots, (2r-1)/2n, \dots$ で表わされ、一般に次式が成立する。

$$F_r = (2r-1)/2n \dots\dots\dots (5)$$

この F_r は非超過の確率を示し、 r は資料を小さいものから大ききの順に並べたときの順番である。一方、反覆生起年は $T=1/(1-F_r)$ であるから、資料の最大値に対しては $r=n$ とおいて $T=2n$ となる。

(2) Thomas plot (非母数法)⁶⁾ これは Thomas が順序統計量の基礎式 (1) から導いたものであつて、変量 x を含めないで大ききの順位のみに着目している。すなわち、(1) 式の符号を変えた。

$$dp_r = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n-r+1)} F_r^{r-1} (1-F_r)^{n-r} dF_r \dots\dots\dots (1)'$$

において、変量 x を含めないで大ききの順位のみを考え、非超過確率 F_r の平均値 \bar{F}_r でプロットしようとするものであつて、

$$\begin{aligned} \bar{F}_r &= \int_0^1 F_r dp_r = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n-r+1)} \int_0^1 F_r^r (1-F_r)^{n-r} dF_r \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n-r+1)} B(r+1, n-r+1) = \frac{r}{n+1} \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

となる。従つて資料の最大値に対する生起年は $T=1/(1-\bar{F}_r) = n+1$ となる。

(3) 調整確率法⁷⁾ これは Gumbel が順序統計量の基礎式から最尤法によつて求めた最も厳密な方法であるが、計算が非常にむづかしく、しかも任意の中間値に対して厳密には求めがたいので、実用的でなく、ほとんど実際には用いられていない。

以上の各方法を比較すると、調整確率法は実用に供しがたいので、実際上は Hazen plot か Thomas plot のいずれかが用いられている。この場合、最大値の生起年は前者では $2n$ であるが、後者では $n+1$ となる。統計年数 n が非常に大きい場合は、理論上の生起年と見掛け上のそれとが大体一致すべき点から考えて、Thomas

図-1 対数正規分布の基本型
Fig.1 Fundamental types of logarithmic-normal distribution

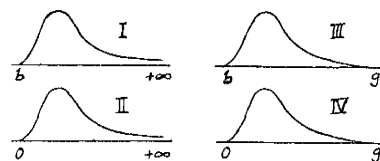
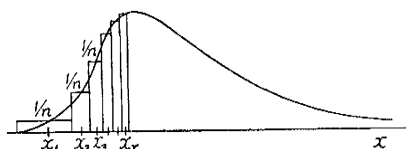


図-2 密度曲線
Fig.2 Density curve



plotの方が適当と思われる。しかし、われわれが取り扱う水文諸量では、 n が小さくて一般に100年以下であるから、簡単に両者を批判することができず、いまのところ両者の優劣を決定する理論はない。著者らは新しい積率理論を用いてこれを研究し、Hazen plotのすぐれた点を指摘したが、決定的な結論をうるに至っていない。経験上からいうと、確率紙にプロットした場合には、Hazen plotがThomas plotよりも適合度がよいようである。なお、確率計算をしたときに、Thomas plotがHazen plotよりも大きい値を与えるのは当然であつて、多少は過大値を与える傾向がある。

4. 理論直線の決定

水文資料が理論直線上に正確にのほど完全なものはほとんどなく、直線の周囲にある偏差をもつて散らばるのが普通である。従つて確率紙に資料をプロットした場合、その直線傾向に最も適合するように理論直線を決定しなければならないが、これに最小自乗法と積率法との二つの方法がある。

(1) 最小自乗法 確率紙は一般に横軸に資料の対数変換をした値 X を表わし、縦軸に累積度数 (CDF) または反覆生起区間を正規変換目盛 F_r で表わしている。この確率紙に資料をプロットしたときの偏差は、観測値 X と理論値 X_0 との間に存する差であるから、適合理論直線を決定するには、

$$\sum (X - X_0)^2 = M \dots\dots\dots (7)$$

を最小にすればよい。この直線の方程式が (4) 式を変形して、

$$X_0 = \frac{1}{\alpha} \xi + A \dots\dots\dots (8)$$

にて表わされるものとすれば、常数 $1/\alpha$ および A をつぎのようにして決定することができる。すなわち、(7) 式を $1/\alpha$ および A にて偏微分したものをそれぞれ 0 とおいて、(8) 式に代入すると、正規式

$$\frac{1}{\alpha} \sum \xi^2 + A \sum \xi = \sum X \xi, \quad \frac{1}{\alpha} \sum \xi + A n = \sum X \dots\dots\dots (9)$$

が得られ、これを解いて

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\bar{\xi} \cdot \bar{X} - \bar{X} \bar{\xi}}{\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}^2}, \quad A = \bar{X} - \frac{1}{\alpha} \bar{\xi} = \frac{\bar{\xi} \cdot \bar{X} \bar{\xi} - \bar{\xi}^2 \cdot \bar{X}}{\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}^2} \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここに、

$$\bar{\xi} = \sum \xi / n, \quad \bar{X} = \sum X / n, \quad \bar{\xi}^2 = \sum \xi^2 / n, \quad \bar{X} \bar{\xi} = \sum X \xi / n.$$

正規分布においては、 $\bar{\xi} = 0$ となるから、(10) 式はつぎのように簡単に表わされる。

$$1/\alpha = X \bar{\xi} / \bar{\xi}^2, \quad A = \bar{X} \dots\dots\dots (11)$$

(2) 積率法 (4) 式を変形した

$$X = \frac{1}{\alpha} \xi + A \dots\dots\dots (8')$$

において、平均値 \bar{X} のまわりの積率を求めると、

$$\mu_{2(X)} = \sigma_x^2 = \bar{X}^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{\alpha^2} (\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}^2) = \frac{1}{\alpha^2} \sigma_\xi^2 = \frac{1}{\alpha^2} \mu_{2(\xi)} \dots\dots\dots (12)$$

となる。同様にして、

$$\mu_{3(X)} = \frac{1}{\alpha^3} \mu_{3(\xi)} \quad \text{一般に} \quad \mu_{n(X)} = \frac{1}{\alpha^n} \mu_{n(\xi)} \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。ここに、 $\mu_{n(X)}$ は \bar{X} のまわりの n 次モーメント、 $\mu_{n(\xi)}$ は $\bar{\xi} = 0$ のまわりの n 次モーメント、 σ_x および σ_ξ は標準偏差である。特に正規分布の場合には $\bar{\xi} = 0$ となり、(12)、(8') 式を用いて所要の常数 $1/\alpha$ および A をつぎのように決定できる。

$$1/\alpha = \sigma_x / \sigma_\xi, \quad A = \bar{X} \dots\dots\dots (14)$$

なお、図-1に示すように下限値 b または上限値 g を有する対数正規分布の場合には、 b または g の値を、例えば岩井法によつて推定してから、

b のみを有するときは

$$\xi = \alpha(X - A) = \alpha \{ \log(x - b) - \log(a - b) \} \dots\dots\dots (15)$$

b および g を有するときは

$$\xi = \alpha(X - A) = \alpha \left\{ \log \frac{x - b}{g - x} - \log \frac{a - b}{g - a} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

として、前と同様に所要の $1/\alpha$ および A を計算すればよい。

5. 計算例と σ_ξ の数値表

表-1 積率法による計算表 (Thomas plot)*
Table 1 Computation table based on the moment method (Thomas plot)

n	x	$X=\log x$	X^2	F_r	$\phi=2F_r-1$	ξ	ξ^2
1	270.5	2.4322	5.9156	0.97674	0.95348	1.40780	1.98190
2	234.0	2.3692	5.6131	0.95349	0.90698	1.18760	1.41039
3	221.0	2.3444	5.4962	0.93023	0.86046	1.04465	1.09129
4	210.0	2.3222	5.3926	0.90698	0.81396	0.93512	0.87445
5	193.0	2.2856	5.2240	0.88372	0.76744	0.84408	0.71247
6	188.5	2.2753	5.1770	0.86047	0.72094	0.76540	0.58584
7	185.0	2.2672	5.1402	0.83721	0.67442	0.69517	0.48326
8	182.9	2.2622	5.1175	0.81395	0.62790	0.63113	0.39833
9	181.0	2.2577	5.0972	0.79070	0.58140	0.57200	0.32718
10	175.0	2.2430	5.0310	0.76744	0.53488	0.51653	0.26680
11	170.7	2.2322	4.9827	0.74419	0.48838	0.46409	0.21538
12	161.5	2.2082	4.8761	0.72093	0.44186	0.41407	0.17145
13	142.5	2.1538	4.6389	0.69767	0.39534	0.36604	0.13399
14	142.0	2.1523	4.6324	0.67442	0.34884	0.31974	0.10223
15	137.5	2.1383	4.5723	0.65116	0.30232	0.27465	0.07543
16	134.0	2.1271	4.5246	0.62791	0.25582	0.23075	0.05325
17	131.0	2.1173	4.4830	0.60465	0.20930	0.18764	0.03521
18	127.2	2.1045	4.4289	0.58140	0.16280	0.14527	0.02110
19	126.0	2.1004	4.4117	0.55814	0.11628	0.10344	0.01070
20	124.0	2.0934	4.3823	0.53488	0.06976	0.06188	0.00383
21	123.8	2.0927	4.3794	0.51163	0.02326	0.02060	0.00042
22	116.0	2.0645	4.2622	0.48837	-0.02326	-0.02060	0.00042
23	112.5	2.0512	4.2074	0.46512	-0.06976	-0.06188	0.00383
24	108.0	2.0334	4.1347	0.44186	-0.11628	-0.10344	0.01070
25	103.8	2.0162	4.0651	0.41860	-0.16280	-0.14527	0.02110
26	103.0	2.0128	4.0514	0.39535	-0.20930	-0.18764	0.03521
27	101.5	2.0065	4.0260	0.37209	.	.	.
28	99.5	1.9978	3.9912	0.34884	.	.	.
29	95.5	1.9800	3.9204	0.32558	.	.	.
30	94.0	1.9731	3.8931	0.30233	.	.	.
31	92.0	1.9638	3.8565	0.27907	.	.	.
32	88.5	1.9469	3.7904	0.25581	.	.	.
33	85.0	1.9445	3.7811	0.23256	.	.	.
34	87.5	1.9420	3.7714	0.20930	.	.	.
35	85.0	1.9294	3.7226	0.18605	.	.	.
36	84.0	1.9243	3.7029	0.16279	.	.	.
37	78.0	1.8921	3.5800	0.13953	.	.	.
38	77.0	1.8865	3.5589	0.11628	.	.	.
39	71.0	1.8513	3.4273	0.09302	.	.	.
40	68.3	1.8344	3.3650	0.06977	.	.	.
41	63.7	1.8041	3.2548	0.04651	.	.	.
42	62.5	1.7959	3.2253	0.02326	.	.	.

$$\begin{aligned} \sum X &= 87.4299 & \sum X^2 &= 183.1044 & \sum \xi &= 0 & \frac{1}{2} \sum \xi^2 &= 8.95490 \\ \bar{X} &= 2.08166 & \bar{X}^2 &= 4.35963 & & & \sum \xi^2 &= 17.90980 \\ \sigma_{X^2} &= 0.02632 & & & & & \bar{\xi}^2 &= 0.426424 \\ \sigma_X &= 0.1622 & 1/\alpha = \sigma_X / \sigma_\xi &= 0.2484 & & & \sigma_\xi &= 0.6530 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\alpha} \xi + \bar{X} = 0.2484 \xi + 2.0817 \\ 50 \text{年確率} &: \xi = 1.4520 & x_{50} &= 276.9 \\ 100 \text{年確率} &: \xi = 1.6450 & x_{100} &= 309.2 \end{aligned}$$

50年確率日雨量=276.9 mm, 100年確率日雨量=309.2 mm

福井県大河内の年最大日雨量系列 ($n=42$) について、Thomas plot を用い積率法によって計算した結果が表-1である。一方、同じく最小自乗法によって計算し、積率法によつた場合と比較したのが表-2であるが、計算結果にあまり差のないことがわかるであろう。

現在では一般に積率法が用いられているようであるが、この場合 σ_ξ を求めるには、まず Plotting position として Hazen plot

表-2 計算結果の比較 単位: mm
Table 2 Comparison of the computed results

	積率法	最小自乗法
50年確率日雨量	276.9	275.3
100年確率日雨量	309.2	307.2

* 実際計算に当つては x を大きさの順に並べる必要はないが、このようにすると適合度検定のときに便利である。

表-3 σ_{ξ} の数値表 (Thomas plot)
Table 3 Values of σ_{ξ} (Thomas plot)

n	σ_{ξ}	n	σ_{ξ}	n	σ_{ξ}	n	σ_{ξ}
10	0.5575	33	0.6427	56	0.6635	79	0.6737
11	5.5668	34	0.6441	57	0.6641	80	0.6740
12	0.5747	35	0.6454	58	0.6647	81	0.6743
13	5.5818	36	0.6467	59	0.6652	82	0.6746
14	0.5880	37	0.6479	60	0.6658	83	0.6748
15	0.5935	38	0.6489	61	0.6663	84	0.6751
16	0.5985	39	0.6500	62	0.6668	85	0.6754
17	0.6030	40	0.6510	63	0.6673	86	0.6757
18	0.6070	41	0.6521	64	0.6678	87	0.6759
19	0.6108	42	0.6530	65	0.6682	88	0.6761
20	0.6142	43	0.6539	66	0.6686	89	0.6763
21	0.6174	44	0.6547	67	0.6691	90	0.6766
22	0.6203	45	0.6555	68	0.6695	91	0.6769
23	0.6231	46	0.6563	69	0.6700	92	0.6772
24	0.6256	47	0.6571	70	0.6704	93	0.6775
25	0.6279	48	0.6580	71	0.6708	94	0.6778
26	0.6301	49	0.6589	72	0.6712	95	0.6781
27	0.6322	50	0.6597	73	0.6716	96	0.6784
28	0.6342	51	0.6605	74	0.6720	97	0.6786
29	0.6361	52	0.6611	75	0.6724	98	0.6788
30	0.6379	53	0.6617	76	0.6727	99	0.6790
31	0.6396	54	0.6623	77	0.6730	100	0.6792
32	0.6412	55	0.6629	78	0.6733		

表-4 σ_{ξ} の数値表 (Hazen plot)
Table 4 Values of σ_{ξ} (Hazen plot)

n	σ_{ξ}	n	σ_{ξ}	n	σ_{ξ}	n	σ_{ξ}
10	0.6632	33	0.6937	56	0.6994	79	0.7014
11	0.6672	34	0.6941	57	0.6995	80	0.7015
12	0.6705	35	0.6944	58	0.6996	81	0.7016
13	0.6733	36	0.6948	59	0.6997	82	0.7016
14	0.6657	37	0.6951	60	0.6998	83	0.7017
15	0.6778	38	0.6954	61	0.6999	84	0.7018
16	0.6796	39	0.6957	62	0.7000	85	0.7018
17	0.6812	40	0.6960	63	0.7001	86	0.7019
18	0.6826	41	0.6962	64	0.7002	87	0.7019
19	0.6839	42	0.6964	65	0.7003	88	0.7020
20	0.6851	43	0.6967	66	0.7004	89	0.7020
21	0.6861	44	0.6969	67	0.7004	90	0.7021
22	0.6870	45	0.6971	68	0.7005	91	0.7022
23	0.6879	46	0.6974	69	0.7006	92	0.7022
24	0.6887	47	0.6976	70	0.7007	93	0.7023
25	0.6894	48	0.6978	71	0.7008	94	0.7024
26	0.6901	49	0.6980	72	0.7009	95	0.7024
27	0.6908	50	0.6982	73	0.7009	96	0.7025
28	0.6913	51	0.6984	74	0.7010	97	0.7025
29	0.6918	52	0.6986	75	0.7011	98	0.7026
30	0.6923	53	0.6988	76	0.7012	99	0.7026
31	0.6928	54	0.6990	77	0.7013	100	0.7027
32	0.6932	55	0.6992	78	0.7013		

かまたは Thomas plot のいずれかを用いて F_r を算出し、 $\phi = 2F_r - 1$ より ϕ を計算し、Gauss の表によつて ϕ に対する ξ を見出し、その ξ の σ_{ξ} を計算すればよいわけである。しかし、 ξ は n によつて規定されるから、 σ_{ξ} も n によつて定まるはずであり、あらかじめ n に対する σ_{ξ} の値を算出しておくこと、面倒な計算をすることなく、(14) 式から簡単に常数 $1/\alpha$ および A を決定することができる。こうした意味で $n=10\sim 100$ に対する σ_{ξ} の値を計算した結果は、表-3、表-4 に示すとおりである。

6. 理論直線の適合性

確率紙上にプロットされた観測値は直線傾向を示すが、一般には積率法または最小自乗法によつて求めた理論直線に正確にのることなく、この直線のまわりにある偏差をもつて散らばるのが普通である。従つて推定した分布函数が実際の資料によく適合しているかどうかを検定する必要がある。この問題に対する偏差の許容限界として注目されるのは、角屋氏の変動域理論である⁸⁾。角屋氏は各観測点が理論直線のまわりに分散しているのを統計量としてある分布をしているものとみなし、順序統計学的に変動域の理論を導いて、変動曲線を定めている。われわれは実際の計算に当つてこの変動曲線を容易に推定できるような近似法を提案し、それによつて推定した曲線を支配曲線としたのである。

このために、任意の中間値に対しては、例えば r 番目の値の変動域を $S(X_r)$ で表わすと⁹⁾、

$$S(X_r) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha\sqrt{n}} \sqrt{F_r(1-F_r)} \cdot e^{\xi^2} \equiv \frac{1}{\alpha\sqrt{n}} C_{\xi} \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 $C_{\xi} = \sqrt{\pi} \sqrt{F_r(1-F_r)} \cdot e^{\xi^2}$ であつて、 F_r は非超過の確率である。従つて C_{ξ} は X_r に無関係に ξ によつて定まるが、 $\xi = +0.5$ の場合には 0.972、 $\xi = 0$ の場合には 0.886 となる。この (17) 式は $F_r = 0.5$ 付近では近似度が高いが、両端に行くに従つて誤差が多くなり、正規分布から極値分布へ移行していくものと考えられる。大体において、 $0.1 < F_r < 0.9$ の中間値に対しては (17) 式を適用してよいが、 $0.1 > F_r$ および $0.9 < F_r$ に対しては極値分布から規定しなければならない。一般に (17) 式は変動域を標準偏差の幅でおさえるのが普通であり、従つて 68% 変動域で規定される。

つぎに極値の変動域を $S(X_n)$ で表わすと、

$$\left. \begin{aligned} 50\% \text{ 変動域のとき, } S(X_n) &= 0.7443/2\alpha \\ 68\% \text{ 変動域のとき, } S(X_n) &= 1.1407/2\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

となる。 $S(X_n)$ も $S(X_r)$ と同じく 68% 変動域で規定してもよいように思われるが、 X の値は対数をとつてある関係上相当に大きな変動域を与えることになるから、50% 変動域で十分であろうと考えられる⁹⁾。

つぎに著者の提案する支配曲線の定め方を示すと、

(1) 中間値の分布 (17)式からわかるように、 C_ξ は ξ によつて変化するが、 $\xi = -0.5 \sim +0.5$ の範囲内では C_ξ の変動が少ないから、 $\xi = 0$ の場合と $\xi = \pm 0.5$ の場合との平均をとり $C_\xi = 0.929$ とし、

$$S(X_r) = 0.929/\alpha/\sqrt{n} \dots\dots\dots (19)$$

とする。従つて $\xi = -0.5 \sim +0.5 (F_r = 24 \sim 76\%)$ においては、(19) 式で求められる値だけ理論直線より左右にとつて支配曲線とする。これを図式的に行うには、理論直線上に $F_r = 24 \sim 76\%$ の範囲で任意に1点をとり、それより左右に(19) 式で求められる $S(X_r)$ の値を真数目盛でとつて2点を定め、これらの2点をそれぞれ通る直線を理論直線に平行にひけばよい。

(2) 最大値の分布 変動域は(18) 式の 50% 変動域によつて規定されるが、その範囲は $|\xi| > 1.163 (F_r > 95\% \text{ および } F_r < 5\%)$ とし、支配曲線の描き方は前と同じ要領である。

(3) 過渡領域の分布 $0.5 < |\xi| < 1.163 (F_r = 76 \sim 95\% \text{ および } F_r = 5 \sim 24\%)$ においては、中間値の分布から最大値の分布への過渡領域とみなして、その間は直線的に変化していくものとした。

図-3 は大河内の年最大日雨量について、Thomas plot を用い、上述の要領で支配曲線を描いたもので、適合度検定の結果が良好であることがわかる。こうした検定の場合に、最大値や最小値の観測点が支配曲線の外に落ちることがあるが、こうした資料を支配曲線内に落ちる他の資料と同様に理論的に取り扱うことは妥当性を欠いている。もしこれを除外しなければ、原資料が示す結果とは異なつた結果があらわれるかもしれない。支配曲線外に落ちる資料は、残りの原資料とは質的に異なるものと考え、実際計算ではこれを除外して再計算することが必要である。なお、最大値には実際上は 50% 変動域を採用したが、理論上は中間値と同様に 68% 変動域をとつて支配曲線としてもよいわけである。これらの変動域の概念は、従来から用いられている信頼区間とは全く異なるものであることを付記しておきたい。

7. 結 言

水文統計学で広く用いられる対数正規分布について、順序統計学的な考察を加えるとともに、その計算を非常に簡易化する実用的数値表を提示することができた。この場合の解析の基礎となつている Plotting position についても、その意義を明らかにしたが、Hazen plot と Thomas plot の優劣については、今後の研究にまつことにした。なお、適合度の検定のために角屋氏の変動域理論を用い、実用的立場から支配曲線の定め方について著者の見解を提示しておいた。

以上、対数正規分布の解法から最後の検定に至るまで、順序統計学的に詳細な考察を加え、実用上適切な提示を行つたのであるが、この研究に際し終始御指導を賜つた京大石原、岩井両教授および大阪府大角屋講師に対し、深謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) R. A. Fisher and L. H. C. Tippett : Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest Number of a Sample, Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 24, 1928, pp. 180-190.
- 2) 角屋 睦 : 計画降雨量に関する順序統計学的考察, 農業土木研究, 22巻6号, 昭.30.3, pp.1~10.
- 3) 角屋 睦 : 極値分布とその一解法, 農業土木研究, 23巻6号, 昭.31.3, pp.28~35.
- 4) S. S. Wilks : Order Statistics, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 54, 1948, pp. 17-20.
- 5) A. Hazen : Flood Flows, John Wiley and Sons, Inc., 1930, pp.13-18.
- 6) H. A. Thomas : Frequency of Minor Floods, Jour. Boston Soc. Civ. Eng., Vol. 25, 1948, pp. 425-442.
- 7) E. J. Gumbel : Simplified Plotting of Statistical Observation, Trans. Amer. Geoph. Union, Vol. 26, Pt. 1, 1945, pp. 69~82.
- 8) 角屋 睦 : 計画洪水量に関する順序統計学的考察, 農業土木研究, 21巻3号, 昭.28.9, pp. 40~47.
- 9) 角屋 睦 : 確率雨量, 農林省第5回農業土木技術研修テキスト, 昭.29.8, pp. 18~20.

(昭.32.3.2)

図-3 適合度検定の1例

Fig.3 An example of the conformity examination

