

土の粒度式の特性

福本武明*

先に提案したまさ土の粒度式は、一般に“土の粒度式”と見なして便利に使えるものであるが、式の諸特性は未だ不明のままである。そこで本論文では、粒度式の利用価値を一層高めるために、周知の対数正規分布の場合と対比しつつ、式の特徴を理論的に明確にするとともに、各種平均粒子径など重要な分布特性値の算定式の誘導を行っている。さらに、通常の粒径分布（質量基準）から他基準（個数、表面積）の分布曲線への変換も理論的に可能にしている。そして最後に粒度式の活用例を幾つか提示している。

Key Words : grading equation, grain size distribution, granular soil, mean particle diameter

1. 緒言

土を構成する大小粒子の粒径分布に規則性があれば、粒子集合体としての土の力学特性を粒子レベルから出発して数理的に考究することができる。花崗岩質岩石類の風化残積土であるまさ土の場合、粒径分布に規則性が認められる。著者は、以前に母岩から土への風化過程を数学的に考察し、1つの粒度式を誘導した¹⁾。この粒度式は、実際の多数のまさ土の粒径加積曲線に当てはめて検証した結果、適合性の非常に良いことが判明している²⁾⁻⁴⁾。さらに、この粒度式をまさ土と生成過程の異なる各種自然土や建設用（粒度調整）材料などにも当てはめて検討した結果、まさ土以外の種々の土質に対しても適用可能なことが分かっている^{5),6)}。このように提案式がまさ土に限らず土全般を対象に便利に使えるものであることは分かったが、式のもつ諸特性については未だ不明のままである。

そこで本論文では、粒度式の利用価値を一層高めるために、式の諸特性、すなわち分布の特徴や重要な特性値などを、周知の対数正規分布の場合と対比しながら、理論的に明確に記述し、併せて粒度式の身近な活用例を幾つか提示する。このような取り組みは、今後粒子集合体の力学を考えてゆく上で特に有益な多くの情報を提供してくれる。

2. 粒度式とその別表示

提案した粒度式は、次のようなものである。すなわち、ふるい比入を有する一連のふるいで風化生成物をふるい分けたとき、最大粒径 D_{max} から数えて n 番目のふるい径 D_n にとどまる残留率を q_n 、通過質量百分率を p_n とすれば、

$$q_n = \binom{m+n-1}{n} \cdot (1-r)^m \cdot r^n \dots\dots\dots (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} p_n &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+i-1}{m-1} \cdot (1-r)^m \cdot r^i \dots\dots\dots (2a) \\ n &= \frac{\log \left(\frac{D_{max}}{D_n} \right)}{\log \lambda} \dots\dots\dots (2b) \end{aligned} \right.$$

式中、 r は等比数列の公比、 m は地質学的年代に関する係数である。なお式 (2a) は、確率統計学でいう、いわゆる負の二項分布 (negative binomial distribution) の形をしている。

ところで式 (2) は、その誘導過程をさかのぼれば、次のような表現もできる。すなわち、土試料をふるい比 λ を有する一連のふるいでふるい分けした場合、相隣るふるい径間に留まる土粒子の残留率 q_n と q_{n-1} の比が、常に式 (3) を満足するような形で結ばれている。

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{m+n-1}{n} r \dots\dots\dots (3)$$

もし、 $m=1$ ならば、 $q_n/q_{n-1}=r$ となり、公比 r の等比数列となる。通常、土の粒度を扱う場合、 $m>0$ 、 $0 < r < 1$ の範囲を考えればよく、この範囲で m と r を適当に選ぶことによって、多様な粒径分布の表示ができる。なお、 m, r ともに負値の場合にも式の適用は可能であるが (例えば、文献6) 中の噴砂、参照)、本論文ではこの領域を対象としないことにする。

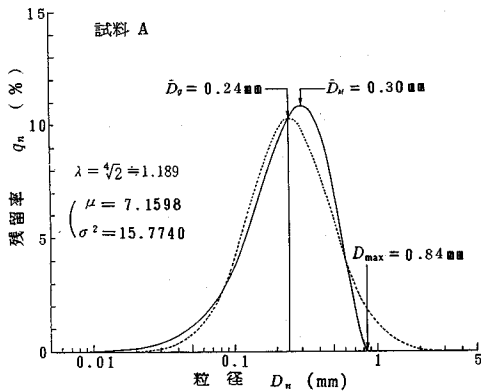
3. 分布の特徴

提案式を、工学上よく用いられる対数正規分布と比較し、分布の特徴を明確にしておくことは有意義である。

(1) 分布の非対称性

多数の実測粒度曲線への当てはめ結果¹⁾⁻⁶⁾をみると、理論曲線の形状は、変量である粒径 D_n の対数 (粒度曲線の横軸) に対し、最大粒径の位置からスタートして細

*正会員 工博 立命館大学教授 理工学部土木工学科 (〒603 京都市北区等持院北町 56-1)



図一 頻度分布曲線の例

粒側に長く伸びる、いわゆるすその長い曲線であることがわかる。

図一は、この様子を河川堤防堤体用土の場合(既報⁶⁾の図一5(b)中の⑥参照)を例にとり(以後、文中では“試料A”と呼ぶ)、滑らかにならした頻度分布(実線)の形で具体的に描き直したものである。このような非対称性の状況を数学的に吟味するために、統計学という歪度(skewness) r を求めてみると、次のようになる(誘導:付録I参照)。

$$r = \frac{1+r}{1-r} \frac{1}{\sigma} \dots \dots \dots (4)$$

土の場合、通常、 $0 < r < 1$ の範囲を考えればよいから、 $r < 0$ であり、したがって非対称分布である。さらに、式(4)から、 r を一定にして $\sigma \rightarrow \infty$ にすると、 $r \rightarrow 0$ となるから、分布の分散 σ^2 が大きくなるほど対数正規分布に近づく性質のあることがわかる。

(2) 最頻径 (D_M) の存在

重要な粒度特性値である幾何平均径 (geometric mean, \bar{D}_g), 50% 径 (median, D_{50}), そして最頻径 (mode, D_M) は、粒径分布が対数正規分布型るとき、いずれも完全に一致する。しかし、提案式の場合には、非対称であるから、上記3者は一致しない。これらのうち、 D_{50} は得られた粒径加積曲線から読み取ればよく、 \bar{D}_g はその定義式から次式のように算定できる(誘導過程:5節参照)。

$$\bar{D}_g = D_{max} \cdot \lambda^{-\frac{m}{1-r}} \dots \dots \dots (5)$$

したがって、ここで問題となるのは、最大頻度のときの粒径 D_M の決め方である。

いま、 D_{max} 側から数えて $(n-1)$ 項目と n 項目の残留率をそれぞれ q_{n-1} , q_n としてそれらの比が式(3)のように表現できることから、 n が $(m-1)r/(1-r)$ を越えなければ q_n の方が大きく、越えれば q_{n-1} の方が大きいといえる。したがって、頻度最大時に相当する条

件として、次式が得られる。

$$n_M = \frac{(m-1)r}{1-r} \dots \dots \dots (6)$$

この式を式(2b)に代入して整理すると、結局、最頻径 D_M は次式のようになる。

$$D_M = D_{max} \cdot \lambda^{-n_M} = \bar{D}_g \cdot \lambda^{\frac{r}{1-r}} \dots \dots \dots (7)$$

図一に示した試料Aの場合 ($m=5.951$, $r=0.5461$), $D_M=0.30$ mm, $D_{50}=0.25$ mm, $\bar{D}_g=0.24$ mm となる。

4. 質量基準から他基準への変換

土質工学の分野における粒径分布は、普通、ふるい分けた土の質量を測定して表す、いわゆる質量(体積)基準の場合に該当する。しかし、種々の土質現象を考察の対象とする際、粒子数を数えて求める、いわゆる個数基準の粒径分布が必要となる場合もあれば、土粒子の表面積を基準とする分布が必要となる場合もある。このような場合に、これら各基準間の関係が明確であれば、非常に便利である。

(1) 質量分布と個数分布の関係

さて、式(2)が質量基準による粒度式である場合、これを個数基準に直すことを考えてみよう。いま、全乾燥土の体積を V_0 とし、ふるい比 λ を有する一連のふるいでふるい分けるとき、最大粒径 D_{max} から数えて n 番目のふるい径間に残留する粒子の個数 N_n を、球形粒子と仮定して求めると

$$N_n = \left(\frac{6V_0}{\pi} \right) \cdot \left(\frac{q_n}{D_n^3} \right) \dots \dots \dots (8)$$

一方、 D_n と D_{max} との間に式(2b)の関係があり、また q_n は式(1)で表されるから、これらを式(8)に代入すると、次式が得られる。

$$N_n = \left(\frac{6V_0}{\pi D_{max}^3} \right) \cdot \binom{m+n-1}{n} \cdot (1-r)^m \cdot (\lambda^3 r)^n \dots \dots (9)$$

土試料全体の個数 N_T を求めると、次式のようになる。

$$N_T = \sum N_n = \left(\frac{6V_0}{\pi D_{max}^3} \right) \cdot \left(\frac{1-r}{1-\lambda^3 r} \right)^m \dots \dots \dots (10)$$

従って、各ふるい径間に残留する土粒子の個数頻度 q_{Nn} は、

$$q_{Nn} = \frac{N_n}{N_T} = \binom{m+n-1}{n} \cdot (1-\lambda^3 r)^m \cdot (\lambda^3 r)^n \dots \dots (11)$$

となるから、個数分布の加積通過率 p_n は、結局、

$$p_{Nn} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+i-1}{m-1} \cdot (1-\lambda^3 r)^m \cdot (\lambda^3 r)^i \dots \dots (12)$$

となる。このことから、質量分布が負の2項分布であれば、個数分布も負の2項分布の形となることがわかる。

(2) 質量分布と表面積分布の関係

いま、あるふるい径間に残留する土粒子の表面積 S_n

表一 各分布の平均と分散

分布	平均	分散
質量基準	$\mu = \frac{mr}{1-r}$	$\sigma^2 = \frac{mr}{(1-r)^2}$
表面積基準	$\mu_s = \frac{m(\lambda r)}{1-\lambda r}$	$\sigma_s^2 = \frac{m(\lambda r)}{(1-\lambda r)^2}$
個数基準	$\mu_n = \frac{m(\lambda^3 r)}{1-\lambda^3 r}$	$\sigma_n^2 = \frac{m(\lambda^3 r)}{(1-\lambda^3 r)^2}$

を、球形粒子と仮定して式表示すれば、

$$S_n = N_n \cdot \pi D_n^2 = 6V_0 \left(\frac{q_n}{D_n} \right) \dots\dots\dots (13)$$

となる。この式に式(1)と式(2b)を代入すれば、次式が得られる。

$$S_n = \left(\frac{6V_0}{D_{max}} \right) \cdot \binom{m+n-1}{n} \cdot (1-r)^m \cdot (\lambda r)^n \dots\dots\dots (14)$$

次に、土試料全体の表面積 S_T を求めると、次式のようになる。

$$S_T = \sum S_n = \left(\frac{6V_0}{D_{max}} \right) \cdot \left(\frac{1-r}{1-\lambda r} \right)^m \dots\dots\dots (15)$$

それ故、各ふるい径間に残留する土粒子の表面積の頻度 q_{Sn} は、次のようになる。

$$q_{Sn} = \frac{S_n}{S_T} = \binom{m+n-1}{n} \cdot (1-\lambda r)^m \cdot (\lambda r)^n \dots\dots\dots (16)$$

したがって、表面積分布の加積通過率 p_{Sn} は、次式となる。

$$p_{Sn} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+i-1}{m-1} \cdot (1-\lambda r)^m \cdot (\lambda r)^i \dots\dots\dots (17)$$

結局、この場合も負の2項分布となり、基準の変換によって分布型は変わらない。

(3) 分布の平均と分散

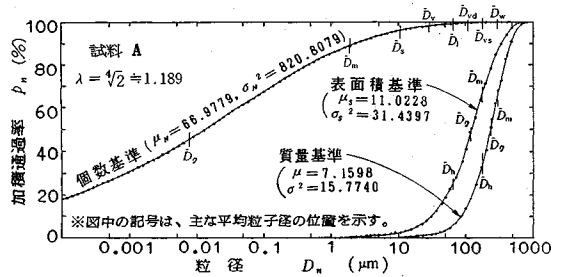
質量分布の平均 μ と分散 σ^2 については、次式のように表せることを既に示した⁴⁾。すなわち、

$$\begin{cases} \mu = \sum q_n \cdot n = \frac{mr}{1-r} \\ \sigma^2 = \sum q_n \cdot n^2 - \mu^2 = \frac{mr}{(1-r)^2} \end{cases} \dots\dots\dots (18)$$

個数分布と表面積分布についても、それぞれ式(12)と式(17)を用いて同様の計算を行えば求められ、表一の関係が得られる。なお参考のために、個数分布の平均 μ_N と分散 σ_N^2 の計算過程を付録Ⅱに示しておく。

また、表一より質量基準の m と r に対応して、表面積基準のとき m_s と r_s 、個数基準のとき m_n と r_n のように記号すれば、次式の関係が確認できる。すなわち、

$$\begin{cases} m_n = m_s = m \\ r_n = \lambda^3 r, \quad r_s = \lambda r \end{cases} \dots\dots\dots (19)$$



図一 各基準間の関係 (試料 A の場合)

表一 平均粒子径の種類と定義

種類	定義式
(1) 算術平均径	$\bar{D}_m = \sum q_i D_i = q_0 D_0 + q_1 D_1 + q_2 D_2 + \dots$
(2) 幾何平均径	$\log \bar{D}_g = \sum q_i \cdot \log D_i = q_0 \log D_0 + q_1 \log D_1 + q_2 \log D_2 + \dots$
(3) 調和平均径	$\frac{1}{\bar{D}_h} = \frac{q_0}{D_0} + \frac{q_1}{D_1} + \frac{q_2}{D_2} + \dots$
(4) 長さ平均径	$\bar{D}_l = \frac{\sum q_i D_i^2}{\sum q_i D_i} = \frac{q_0 D_0^2 + q_1 D_1^2 + q_2 D_2^2 + \dots}{q_0 D_0 + q_1 D_1 + q_2 D_2 + \dots}$
(5) 体面積平均径	$\bar{D}_{vs} = \frac{\sum q_i D_i^3}{\sum q_i D_i^2} = \frac{q_0 D_0^3 + q_1 D_1^3 + q_2 D_2^3 + \dots}{q_0 D_0^2 + q_1 D_1^2 + q_2 D_2^2 + \dots}$
(6) 重量平均径	$\bar{D}_w = \frac{\sum q_i D_i^4}{\sum q_i D_i^3} = \frac{q_0 D_0^4 + q_1 D_1^4 + q_2 D_2^4 + \dots}{q_0 D_0^3 + q_1 D_1^3 + q_2 D_2^3 + \dots}$
(7) 平均面積径	$\bar{D}_s = \sqrt{\sum q_i D_i^2} = \sqrt{q_0 D_0^2 + q_1 D_1^2 + q_2 D_2^2 + \dots}$
(8) 平均体積径	$\bar{D}_v = \sqrt[3]{\sum q_i D_i^3} = \sqrt[3]{q_0 D_0^3 + q_1 D_1^3 + q_2 D_2^3 + \dots}$
(9) 体積・長さ平均径	$\bar{D}_{vd} = \sqrt{\frac{\sum q_i D_i^3}{\sum q_i D_i}} = \sqrt{\frac{q_0 D_0^3 + q_1 D_1^3 + q_2 D_2^3 + \dots}{q_0 D_0 + q_1 D_1 + q_2 D_2 + \dots}}$

注記) D_i : 粒子径 ($D_0 = D_{max}$), q_i : 残留率 ($\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$)

(4) 具体例

図一は、本節で得た関係式を試料 A の場合(図一)に適用し、質量・表面積・個数基準による各分布曲線を求め、一括図示したものである。図中には次節で述べる各種平均粒子径の位置も記号を付して示してある。この図から、各分布曲線間の相互関係を客観的に把握することができる。

5. 各種平均粒子径の算定

土の粒径分布(質量基準)が式(2)で表せる場合、式中の粒度パラメータ $D_{max}(=D_0)$, m , r を用いて、種々の平均粒子径を求めることができる。

平均粒子径には、表一に示すようなものがあり^{7),8)}、扱う現象や対象に応じて取捨選択される。これらのうちで、主要なものを2, 3 求めると、次のようになる。

(1) 算術平均径: \bar{D}_m

$$\bar{D}_m = q_0 D_0 + q_1 D_1 + q_2 D_2 + q_3 D_3 + \dots$$

表-3 平均粒子径の算定式

平均粒子径	質量基準	表面積基準	個数基準
(1) 算術平均径 \bar{D}_m	$D_{\max} \left(\frac{1-r}{1-\frac{r}{\lambda}} \right)^m$	$D_{\max} \left(\frac{1-\lambda r}{1-r} \right)^m$	$D_{\max} \left(\frac{1-\lambda^3 r}{1-\lambda^2 r} \right)^m$
(2) 幾何平均径 \bar{D}_g	$D_{\max} \cdot \lambda^{-\frac{m}{m+1}}$	$D_{\max} \cdot \lambda^{-\frac{m}{m+1}}$	$D_{\max} \cdot \lambda^{-\frac{m}{m+1}}$
(3) 調和平均径 \bar{D}_h	$D_{\max} \left(\frac{1-\lambda r}{1-r} \right)^m$	$D_{\max} \left(\frac{1-\lambda^2 r}{1-\lambda r} \right)^m$	$D_{\max} \left(\frac{1-\lambda^4 r}{1-\lambda^3 r} \right)^m$
(4) 長さ平均径 \bar{D}_l	$D_{\max} \left(\frac{1-\frac{r}{\lambda}}{1-\frac{r}{\lambda^2}} \right)^m$	$D_{\max} \left(\frac{1-r}{1-\frac{r}{\lambda}} \right)^m$	$D_{\max} \left(\frac{1-\lambda^2 r}{1-\lambda r} \right)^m$
(5) 体面積平均径 \bar{D}_{v_s}	$D_{\max} \left(\frac{1-\frac{r}{\lambda^2}}{1-\frac{r}{\lambda^3}} \right)^m$	$D_{\max} \left(\frac{1-\frac{r}{\lambda}}{1-\frac{r}{\lambda^2}} \right)^m$	$D_{\max} \left(\frac{1-\lambda r}{1-r} \right)^m$
(6) 重量平均径 \bar{D}_w	$D_{\max} \left(\frac{1-\frac{r}{\lambda^3}}{1-\frac{r}{\lambda^4}} \right)^m$	$D_{\max} \left(\frac{1-\frac{r}{\lambda^2}}{1-\frac{r}{\lambda^3}} \right)^m$	$D_{\max} \left(\frac{1-r}{1-\frac{r}{\lambda}} \right)^m$
(7) 平均面積径 \bar{D}_s	$D_{\max} \left(\frac{1-r}{1-\frac{r}{\lambda^2}} \right)^{\frac{m}{2}}$	$D_{\max} \left(\frac{1-\lambda r}{1-\frac{r}{\lambda}} \right)^{\frac{m}{2}}$	$D_{\max} \left(\frac{1-\lambda^3 r}{1-\lambda r} \right)^{\frac{m}{2}}$
(8) 平均体積径 \bar{D}_v	$D_{\max} \left(\frac{1-r}{1-\frac{r}{\lambda^3}} \right)^{\frac{m}{3}}$	$D_{\max} \left(\frac{1-\lambda r}{1-\frac{r}{\lambda^2}} \right)^{\frac{m}{3}}$	$D_{\max} \left(\frac{1-\lambda^3 r}{1-r} \right)^{\frac{m}{3}}$
(9) 体積・長さ平均径 \bar{D}_{vd}	$D_{\max} \left(\frac{1-\frac{r}{\lambda}}{1-\frac{r}{\lambda^3}} \right)^{\frac{m}{2}}$	$D_{\max} \left(\frac{1-r}{1-\frac{r}{\lambda^2}} \right)^{\frac{m}{2}}$	$D_{\max} \left(\frac{1-\lambda^2 r}{1-r} \right)^{\frac{m}{2}}$

$$\begin{aligned}
 &= D_0 \left(q_0 + \frac{q_1}{\lambda} + \frac{q_2}{\lambda^2} + \frac{q_3}{\lambda^3} + \dots \right) \\
 &= D_0 (1-r)^m \left\{ 1 + \binom{m}{m-1} \cdot \left(\frac{r}{\lambda} \right) + \binom{m+1}{m-1} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 + \binom{m+2}{m-1} \cdot \left(\frac{r}{\lambda} \right)^3 + \dots \right\} \\
 &= D_0 \left(\frac{1-r}{1-\frac{r}{\lambda}} \right)^m \dots \dots \dots (20)
 \end{aligned}$$

(2) 幾何平均径: \bar{D}_g

$$\begin{aligned}
 \log \bar{D}_g &= q_0 \log D_0 + q_1 \log D_1 + q_2 \log D_2 + \dots \\
 &= \log D_0 - (q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \dots) \log \lambda \\
 &= \log D_0 - mr(1-r)^m \left\{ 1 + \binom{m+1}{m} r \right. \\
 &\quad \left. + \binom{m+2}{m} r^2 + \binom{m+3}{m} r^3 + \dots \right\} \log \lambda \\
 &= \log D_0 - \frac{mr}{1-r} \log \lambda \\
 \therefore \bar{D}_g &= D_0 \cdot \lambda^{-\frac{mr}{1-r}} \dots \dots \dots (21)
 \end{aligned}$$

(3) 調和平均径: \bar{D}_h

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\bar{D}_h} &= \frac{q_0}{D_0} + \frac{q_1}{D_1} + \frac{q_2}{D_2} + \frac{q_3}{D_3} + \dots \\
 &= \frac{1}{D_0} \left(q_0 + q_1 \lambda + q_2 \lambda^2 + q_3 \lambda^3 + \dots \right) \\
 &= \frac{(1-r)^m}{D_0} \left\{ 1 + \binom{m}{m-1} \cdot (\lambda r) \right. \\
 &\quad \left. + \binom{m+1}{m-1} \cdot (\lambda r)^2 + \binom{m+2}{m-1} \cdot (\lambda r)^3 + \dots \right\} \\
 &= \frac{1}{D_0} \left(\frac{1-r}{1-\lambda r} \right)^m \\
 \therefore \bar{D}_h &= D_0 \left(\frac{1-\lambda r}{1-r} \right)^m \dots \dots \dots (22)
 \end{aligned}$$

他の(4)~(9)の平均径についても、表-2中の定義に従い、上と同様の計算を行えば求められる。また個数基準や表面積基準の場合には、それぞれの粒度式、つまり式(12)と式(17)を使って上と同様の方法で誘導すればよい。以上のようにして算定され平均粒子径を一覧表に整理して示すと、表-3のようになる。表から、例えば質量基準の調和平均径 \bar{D}_h が表面積基準の算術平

表一4 平均粒子径の算定式 (対数正規分布の場合)

平均粒子径	質量基準
(1) 算術平均径	$\log \bar{D}_m = \log \bar{D}_0 + 1.151 \log^2 \sigma_0$
(2) 幾何平均径	$\log \bar{D}_0 = \log \bar{D}_0$
(3) 調和平均径	$\log \bar{D}_h = \log \bar{D}_0 - 1.151 \log^2 \sigma_0$
(4) 長さ平均径	$\log \bar{D}_l = \log \bar{D}_0 + 3.454 \log^2 \sigma_0$
(5) 体面積平均径	$\log \bar{D}_{vs} = \log \bar{D}_0 + 5.757 \log^2 \sigma_0$
(6) 重量平均径	$\log \bar{D}_w = \log \bar{D}_0 + 8.059 \log^2 \sigma_0$
(7) 平均面積径	$\log \bar{D}_s^2 = \log \bar{D}_0^2 + 4.605 \log^2 \sigma_0$
(8) 平均体積径	$\log \bar{D}_v^3 = \log \bar{D}_0^3 + 10.362 \log^2 \sigma_0$
(9) 体積・長さ平均径	$\log \bar{D}_{vd}^2 = \log \bar{D}_0^2 + 9.211 \log^2 \sigma_0$

均径 \bar{D}_m に、また個数基準の体面積平均径 \bar{D}_{vs} にそれぞれ該当するなど、周知の事柄が容易に確認できるばかりでなく、相互換算等に必要な諸量間の関係が明瞭に把握できる。

ここで対数正規分布の場合の各種平均径と対比してみよう。土の粒径分布が対数正規分布に従うとき、各種平均径は表一4 に示す諸式を用いて算定できる^{7)~9)}。具体的に試料 A の場合 (図一1, 図一2 参照)、質量基準の幾何平均径 \bar{D}_0 と幾何標準偏差 σ_0 は、それぞれ次のような値となる。

$$\begin{cases} \bar{D}_0 = D_{max} \cdot \lambda^{-\mu} = 0.84 (\sqrt[4]{2})^{-7.1598} = 0.243 \text{ mm} \\ \sigma_0 = \lambda^\sigma = (\sqrt[4]{2})^{3.9717} = 0.199 \end{cases}$$

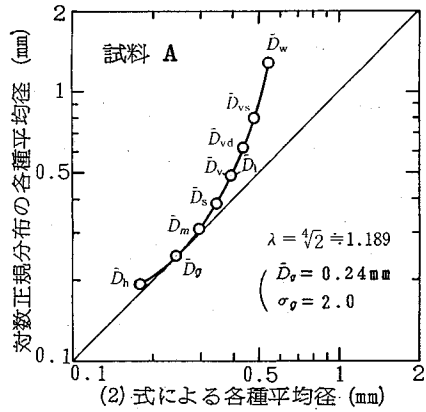
この \bar{D}_0 と σ_0 の値を同一に保ち、表一3 と表一4 の算定式より両分布の各種平均径を求めて図示すれば、図一3 が得られる。図より、同一値に設定した \bar{D}_0 を除く他の平均粒子径は、この場合、いずれも対数正規分布の方が大きいことがわかる。

6. 粒度式の活用

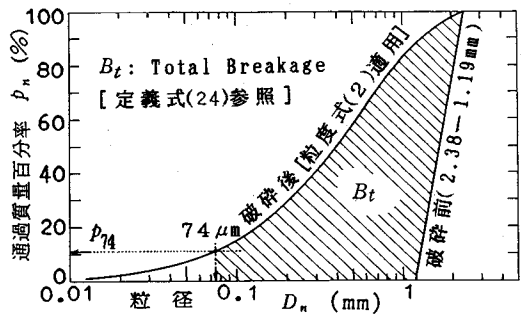
土の粒径分布が式 (2) に従う場合、既に述べたように質量基準を個数基準に換算したり (4 節)、種々の平均粒子径 (表一3) や粒子表面積 (式 (15) 参照) などの諸値を算定することができる。他にも粒度式の使途は数多く考えられるが、ここでは上記以外の身近な活用例を幾つか示しておく。

(1) 粉碎理論との関連

著者は、各種土質試験の過程で生起する粒状土の粒子破碎現象について、粒度変化の立場から式 (2) を用い



図一3 平均粒子径の比較



図一4 破砕前後の粒径加積曲線

て検討し、試験中の土粒子の壊れ方に一定の規則性があることを指摘^{10), 11)}するとともに、このことを土台に古典的粉碎理論¹²⁾を考察し、次のような結論を得ている。すなわち、Rittinger (1867) の破碎エネルギーは破碎に伴う比表面積の増加に比例する量であるのに対し、Kick (1885) の破碎エネルギーは破碎前後の粒径加積曲線で囲まれた図形上の面積に比例する量である¹¹⁾。

(2) 粒子破碎の尺度

Hardin¹³⁾は、次のような Breakage Potential なる概念を導入し、

$$b_p = \log_{10} \left[\frac{D_n (\text{mm})}{0.074 \text{ mm}} \right] \dots \dots \dots (23)$$

粒子破碎の程度を示す指標を次のように定義している。

$$B_t = \int_0^1 (b_p - b_p) dp \dots \dots \dots (24)$$

ここに、右辺の第1項と第2項は、それぞれ破碎前と後の Breakage Potential である。この B_t なる量は、Total Breakage と呼ばれ、図一4 に斜線で示したような図形上の面積に相当する。著者¹⁴⁾は、この B_t について初期試料が均一径で破碎前後の粒径分布に式 (2) が適用できる場合を考察し、次式を誘導している。

$$B_t = \frac{mr \log \lambda}{1-r} (1-p_{74}) \dots \dots \dots (25)$$

結局、この式から、 B_r は分布の平均 $\mu [=mr/(1-r)]$ と破碎による細粒分 (74 μm 以下) の増加 p_{74} に関係する量であることがわかる。

(3) 径深の表現

土質工学において、土中水の挙動は重要である。Taylor の教科書¹⁵⁾ には、土の透水係数 k を定式化する過程で、径深 R_H (hydraulic radius) が、次式のように表わされている。

$$R_H = e \frac{V_s}{A_p} \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 e は間隙比、 V_s は土粒子の体積、 A_p は土粒子の表面積である。これを大小粒子の集合体に適用すると、

$$R_H = \frac{e \bar{D}_v}{\kappa \bar{D}_s} \dots\dots\dots (27)$$

となる。式中、 κ は粒子の形状係数であり、球形粒子のとき $\kappa=6$ である。式 (27) に表—3 中 (個数基準) の \bar{D}_v と \bar{D}_s を代入して整理すれば、次式を得る。

$$R_H = \frac{e D_{max}}{\kappa} \left(\frac{1-\lambda r}{1-r} \right)^m \dots\dots\dots (28)$$

この式で表される R_H なる量は、単に土中水の流れに関して意味があるばかりでなく、土の堆積構造と深く関係をもつことから、土の構造指標として有効な量と考えられる。

(4) 粗粒率の意味

コンクリート骨材分野の粗粒率 (Fineness Modulus)¹⁶⁾ は、最近、土質工学の分野においても粒子破碎の程度を示す指標¹⁷⁾ として、あるいは泥岩のスレーキング評価¹⁸⁾ などに利用されている。骨材粒度を対数正規分布と仮定すれば、粗粒率 $F.M.$ は幾何平均径 \bar{D}_g と次式の関係にある¹⁹⁾。

$$\bar{D}_g = 0.105 \times 2^{F.M.} \dots\dots\dots (29)$$

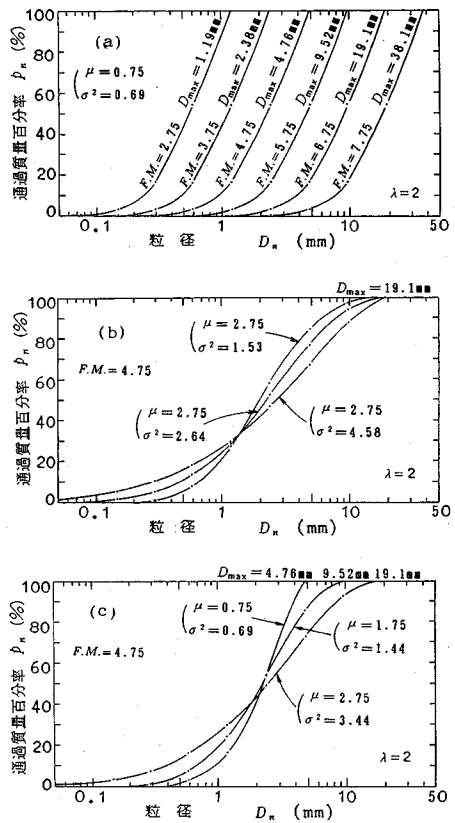
ここに、0.105 mm は No.100 ふるい (0.149 mm) と No.200 ふるい (0.074 mm) の目開きの幾何平均であり、2 はふるい比 $\lambda=2$ を意味する。

対数正規分布に代わって式 (2) に従う骨材粒度を用いれば、粗粒率は次式のようにになる。

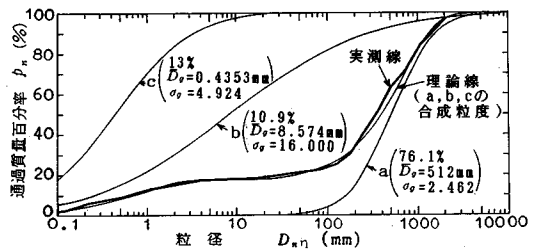
$$F.M. = 3.32 \log \left(\frac{D_{max}}{0.105} \right) - \mu \dots\dots\dots (30)$$

この式から知れるように、 $F.M.$ は分布の平均 μ と最大粒径 D_{max} によって決まる量である。具体的には、図—5 (a) に示すように同じ平均 ($\mu=0.75$) をもつ骨材のとき、 $F.M.$ は D_{max} が大きいと大きくなり、“粒径が大なるほど粗粒率が大” というイメージと一致する。しかし、図—5 (b), (c) に示すような場合 (条件: 図中参照)、粒度に大差があっても粗粒率は等しい ($F.M.=4.75$)。

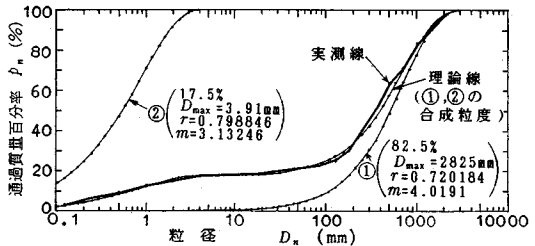
したがって、粗粒率は便利で利用価値のある指標ではあるが、その使用に際し異なる粒度の骨材が同じ値を示



図—5 粗粒率の説明図



図—6 (a) 対数正規分布による粒度の合成



図—6 (b) 提案式による粒度の合成

す場合のあることに特別な注意が必要である。

(5) 粒度の合成

河床材料においては、双峰性などの特異な粒径分布をもつ²⁰⁾ことも多く、粒度の合成が必要となる場合がある

が、ここでは土石流の研究に関連して合成粒度を扱った例を示しておきたい。

奥田²¹⁾は、図-6 (a) に示すように、採土缶で採取した土石の粒度分析結果と併せて、この実測粒度曲線に平均と分散を異にする3組の対数正規分布を当てはめて合成した結果を示している(注:原図はφ-unitを用い対数確率紙上に描かれている)。一方、図-6 (b) は、この3組の対数正規分布に代わって、式(2)の粒度式を使って2組の理論曲線の合成として描いたもので、結果的に図-6 (a) の場合と大差ない合成粒度を得ることができる。

7. 結 言

本論文では、先に提案した粒度式の利用価値を高めるために、式のもつ諸特性の理論的な明確化を試みるとともに、式の身近な用途を幾つか提示している。得られた主な事柄は、次のとおりである。

(1) 粒度式の特徴は、対数正規分布と違い、幾何平均径と50%径と最頻径が一致せず、非対称で、細粒側へすその広い分布を与える。

(2) 通常、土の場合、粒度式中のパラメータ m, r を $0 < r < 1, m > 0$ の範囲で適当に選ぶことによって、指数分布のように細粒側へすその非常に広い非対称分布から対数正規分布に近いものまで広範な粒径分布が得られる(なお、 m と r がともに負の領域でも式の適用は可能であるが、本論文中では扱わなかった)。

(3) 通常の粒径分布(質量基準)のほかに表面積(S)基準と個数(N)基準の粒径分布式を誘導している。これら各分布の平均(μ, μ_s, μ_N)や分散($\sigma^2, \sigma_s^2, \sigma_N^2$)も求めている。これにより質量基準から他基準への変換が可能となる。

(4) 各基準(質量・表面積・個数)毎の各種平均粒子径などの分布特性値を求めるための算定式を示している。質量基準による各種平均粒子径については、対数正規分布の場合と対比して具体的に示している。

(5) この粒度式に考えられる多くの用途のうち、本文中では身近な活用例として粒子破碎の尺度、径深の表現、粗粒率の意味、粒度の合成などを提示している。

付録 I 式(4)の誘導

幾何平均径 \bar{D}_g のまわりのモーメント ν_1, ν_2, ν_3 を求める。

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{\sum q_i (\log D_i - \log \bar{D}_g)}{N} = 0 \\ \nu_2 &= \log^2 \sigma_g \quad (\sigma_g: \text{幾何標準偏差}) \\ &= \frac{\sum q_i (\log D_i - \log \bar{D}_g)^2}{N} \end{aligned}$$

$$= \sigma^2 \log^2 \lambda$$

$$\begin{aligned} \nu_3 &= \frac{\sum q_i (\log D_i - \log \bar{D}_g)^3}{N} \\ &= -\frac{1+r}{1-r} \sigma^2 \log^3 \lambda \end{aligned}$$

故に、歪度 r は次のようになる。

$$\begin{aligned} r &= \frac{\nu_3}{\nu_2^{3/2}} \quad (\text{定義式}) \\ &= \frac{-\frac{1+r}{1-r} \sigma^2 \log^3 \lambda}{(\sigma^2 \log^2 \lambda)^{3/2}} \\ &= -\frac{1+r}{1-r} \frac{1}{\sigma} \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

付録 II 個数分布の平均 μ_N と分散 σ_N^2 の誘導

$$\begin{aligned} \mu_N &= \nu_{N1} = \sum q_{Nn} \cdot n \quad (\sum q_{Nn} = 1) \\ &= m(\lambda^3 r)^m \cdot (1 - \lambda^3 r)^m \times 1 + \left(\frac{m+1}{m-1} \right) \\ &\quad \cdot (\lambda^3 r)^{2m} \cdot (1 - \lambda^3 r)^m \times 2 \\ &\quad + \dots + \left(\frac{m+n-2}{m-1} \right) (\lambda^3 r)^{n-1} (1 - \lambda^3 r)^m \times (n-1) + \dots \\ &= \frac{m\lambda^3 r}{1 - \lambda^3 r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= \nu_{N2} - \mu_N^2 = \frac{m\lambda^3 r(1+m\lambda^3 r)}{(1-\lambda^3 r)^2} - \left(\frac{m\lambda^3 r}{1-\lambda^3 r} \right)^2 \\ &= \frac{m\lambda^3 r}{(1-\lambda^3 r)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_{N2} &= \sum q_{Nn} \cdot n^2 = m(\lambda^3 r)^m \cdot (1 - \lambda^3 r)^m \times 1^2 \\ &\quad + \left(\frac{m+1}{m-1} \right) \cdot (\lambda^3 r)^{2m} \cdot (1 - \lambda^3 r)^m \times 2^2 + \dots \\ &\quad + \left(\frac{m+n-2}{m-1} \right) \cdot (\lambda^3 r)^{n-1} \cdot (1 - \lambda^3 r)^m \times (n-1)^2 + \dots \\ &= \frac{m\lambda^3 r(1+m\lambda^3 r)}{(1-\lambda^3 r)^2} \end{aligned}$$

参 考 文 献

- 1) 福本武明: まさ土の粒径分布に関する一考察, 第22回土質工学研究発表会, pp. 165~166, 1987.
- 2) 福本武明: まさ土の粒度式について, 第23回土質工学研究発表会, pp. 197~198, 1988.
- 3) 福本武明・三好力也: 花崗岩質風化残積土の粒度特性, 立命館大学理工学研究所紀要, 第48号, pp. 55~68, 1989.
- 4) Fukumoto, T.: A Grading Equation for Decomposed Granite Soil, Soils and Foundations, Vol.30, No.1, pp.27~34, 1990.
- 5) 福本武明: 離散型粒度式の連続分布式化への試み, 土木学会第45回年次学術講演会講演集, Ⅲ, pp. 1094~1095, 1990.

- 6) 福本武明：土の粒径分布に関する検討，土木学会論文集，投稿中。
- 7) 久保輝一郎他編：粉体—理論と応用—，丸善，pp.83～87，1962。
- 8) 三輪茂雄：粉粒体工学，朝倉書店，pp.56～61，1972。
- 9) Orr & Dalla Valle 共著，牟田・角田共訳：粉体の測定，産業図書，pp.19～23，1968。
- 10) 福本武明：粒子破砕機構に関する一考察，第24回土質工学研究発表会，pp.259～260，1989。
- 11) Fukumoto, T. : Particle Breakage Characteristics of Granular Soils, Soils and Foundations, Vol.32, No.1, pp.26～40, 1992.
- 12) 例えば，亀井三郎著：粉砕，工業図書，pp.22～47，1943。
- 13) Hardin, B.O. : Crushing of Soil Particles, Jour. of Geot. Eng., ASCE, Vol.111, No.10, pp.1177～1192, 1985.
- 14) Fukumoto, T. : Investigation on the Main Measures of Particle Breakage, Univ. of Kentucky, pp.1～27, 1989.
- 15) Taylor, D.W. : Fundamentals of Soil Mechanics, John Wiley & Sons, Inc., pp.97～123, 1948.
- 16) 例えば，国分正胤編：土木材料実験，pp.33～38，技報堂，1973。
- 17) 谷口秀男：締固めによる粗粒火山灰の粒子破砕が締固め密度に及ぼす影響，土と基礎，Vol.27, No.6, pp.29～34, 1979.
- 18) 島 博保・今川史郎：スレーキング材料（ぜい弱岩）の圧縮沈下と対応策，土と基礎，Vol.28, No.7, pp.45～52, 1980.
- 19) Lecompte, P. : The Fineness Modulus and Its Dispersion Index, Jour. of A.C.I., pp.474～480, 1969
- 20) 山本晃一：河川材料から見た河川の特徴，土木技術資料，Vol.21-1, pp.3～8, 1979.
- 21) 奥田節夫：土石流の研究における粒度分析，粉体工学会誌，Vol.17, No.5, pp.23～30, 1980.

(1992.10.21 受付)

ON THE CHARACTERISTICS OF A GRADING EQUATION FOR SOIL

Takeaki FUKUMOTO

The grading equation for decomposed granite soil is applicable to granular soils of various types other than decomposed granite soil. In this paper, for greater use of this grading equation, its features were theoretically clarified, and equations for determining important values such as mean particle diameter were derived. Transformation from the grain size distribution by ordinary weight basis to that by other criteria (number basis, specific surface basis) is theoretically described. Finally, several examples of the application of this grading equation are presented.